



**IME** INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
E ESTATÍSTICA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

**BACHARELADO EM MATEMÁTICA**

Renata Marques do Nascimento

K-Teoria e Teorema da Periodicidade de Bott

São Paulo

2º Semestre de 2024

Renata Marques do Nascimento

K-Teoria e Teorema da Periodicidade de Bott

Monografia apresentada à disciplina  
MAT-0148 — Introdução ao Trabalho Científico,  
Departamento de Matemática,  
Instituto de Matemática e Estatística,  
Universidade de São Paulo.

**Área de Concentração:** TOPOLOGIA ALGÉBRICA

**Orientador:** Prof. Dr. Ivan Struchiner – IME-USP

**Coorientadora:** Prof. Dra. Luciana Basualdo Bonatto – Universidade de Oxford

São Paulo

2º Semestre de 2024



O conteúdo deste trabalho é publicado sob a **Licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional – CC BY 4.0**

Ficha catalográfica elaborada com dados inseridos pelo(a) autor(a)  
Biblioteca Carlos Benjamin de Lyra  
Instituto de Matemática e Estatística  
Universidade de São Paulo

---

do Nascimento, Renata Marques  
K-Teoria e Teorema da Periodicidade de Bott / Renata Marques  
do Nascimento; orientador, Ivan Struchiner; coorientadora,  
Luciana Basualdo Bonatto. - São Paulo, 2024.  
93 p.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) -  
Matemática / Instituto de Matemática e Estatística /  
Universidade de São Paulo.  
Bibliografia

1. K-Teoria. 2. Teorema da Periodicidade de Bott.  
3. Fibrados Vetoriais. 4. Topologia Algébrica. I.  
Struchiner, Ivan. II. Título.

---

Bibliotecárias do Serviço de Informação e Biblioteca  
Carlos Benjamin de Lyra do IME-USP, responsáveis pela  
estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:  
Maria Lúcia Ribeiro CRB-8/2766; Stela do Nascimento Madruga CRB 8/7534.

# FOLHA DE AVALIAÇÃO

Aluno: Renata Marques do Nascimento

Título: K-Teoria e Teorema da Periodicidade de Bott

Data: 2º Semestre de 2024

## BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ivan Struchiner – IME-USP (Orientador)

Prof. Dr. Renato Vasconcellos Vieira – Unicamp

Prof. Dr. Renato Ferreira de Velloso Vianna – IME-USP

*Dedicado à professora Edith, por sempre acreditar no potencial da educação básica e pública.*

*Dedicado à minha família, que me apoiou durante toda a graduação.*

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer ao meu orientador Ivan Struchiner, pelo apoio constante ao longo da graduação. Também gostaria de agradecer à minha coorientadora Luciana Basualdo Bonatto pela parceria, porque sem ela esse projeto não seria possível. Obrigada pelo apoio e pela paciência em ensinar. Agradeço ainda ao Renato Vasconcellos Vieira pela ajuda e pelas considerações importantes na reta final do meu trabalho. Além do apoio acadêmico, os três compartilharam comigo muito do amor de vocês pela matemática.

Agradeço ao apoio da minha família, especialmente dos meus pais, que me deram todo o suporte possível durante a graduação.

Gostaria também de agradecer a todos os amigos que fizeram parte dessa trajetória no IME junto comigo: Rodrigo, Mathuzalem, Mateus, Manu, Raul, Haoyu, David, Ariel e Daniel. Cada um de vocês foi extremamente importante nos últimos quatro anos. Obrigada por todo o apoio acadêmico, emocional e pela companhia nos momentos mais difíceis.

Em especial, agradeço ao Pedro, pela parceria de vida e pelo suporte em todas as situações.

Também agradeço ao apoio constante das minhas amigas Helena, Letícia, Laura, Lidiany, Line, Luisa, Marcela, Mariana e Bia, que são meu porto seguro. É um privilégio compartilhar minha jornada com mulheres tão inspiradoras.

Por fim, gostaria de agradecer ao CNPq pelo financiamento desta pesquisa e à toda a banca avaliadora pelas sugestões que acrescentaram muito ao trabalho.

## RESUMO

NASCIMENTO, R. M. **K-Teoria e Teorema da Periodicidade de Bott**. 2024. 93 p. Monografia (Bacharelado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2º Semestre de 2024.

O projeto tem como foco estudo da K-Teoria reduzida, que é uma teoria de cohomologia generalizada por satisfazer todos os axiomas de Eilenberg-Steenrod, exceto o axioma da dimensão. Essa teoria estuda classes de fibrados vetoriais sobre espaços topológicos.

Assim, o trabalho se inicia com a definição de fibrados vetoriais e a apresentação de propriedades importantes. Em um segundo momento, ocorre a introdução da K-Teoria reduzida.

Neste momento, também é apresentado o seu caráter como uma teoria de cohomologia generalizada, utilizando-se do Teorema da Periodicidade de Bott, cuja demonstração e aplicações são discutidas ao final do projeto.

**Palavras-chave:** K-Teoria. Teorema da Periodicidade de Bott. Fibrados Vetoriais. Cohomologia Generalizada.

## ABSTRACT

NASCIMENTO, R. M. **K-Theory and Bott Periodicity Theorem**. 2024. 93 p. Monografia (Bacharelado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2º Semestre de 2024.

The project focuses on the study of reduced K-Theory, which is a generalized cohomology theory because it satisfies all the Eilenberg Steenrod axioms, except the dimension axiom. This theory studies classes of vector bundles over topological spaces.

Thus, this work begins with the definition of vector bundles and the presentation of important properties. In a second moment, reduced K-Theory is introduced.

At this point, its nature as a generalized cohomology theory is also presented, making use of Bott Periodicity Theorem, whose demonstration and applications are discussed at the end of the project.

**Keywords:** K-Theory. Bott Periodicity Theorem. Vector Bundles. Generalized Cohomology.

# Lista de Figuras

2.1	Quociente entre $X \cup CA$ e $X/A$ . . . . .	64
2.2	Quociente entre e $(X \cup CA) \cup CX$ e $SA$ . . . . .	65



# Lista de Tabelas

1	Periodicidade dos grupos de homotopia de $O(n)$ e $Sp(n)$ . . . . .	2
2	Periodicidade dos grupos de homotopia de $U(n)$ . . . . .	2
3	Periodicidade de $\tilde{K}^n(S^2)$ . . . . .	2
A.1	Tabela de multiplicação dos octônios . . . . .	92

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

IME	Instituto de Matemática e Estatística
USP	Universidade de São Paulo
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
Unicamp	Universidade Estadual de Campinas

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produto interno
$*$	Produto externo
$\cong$	Isomorfismo de grupos ou de anéis
$\approx$	Isomorfismo de fibrados vetoriais
$\approx_s$	Relação de equivalência de $K(X)$
$\sim$	Relação de equivalência de $\tilde{K}(X)$
$\forall$	Para todo
$\mathbb{C}$	Números complexos
$\mathbb{C}^n$	Espaço complexo coordenado de dimensão $n$
$\mathbb{C}P^n$	Espaço projetivo complexo
$CX$	Cone de $X$
$C(X, Y)$	Conjunto das funções contínuas entre espaços topológicos $X$ e $Y$
$\partial$	Fronteira de um espaço
$D_+^k$	Hemisfério norte da esfera $S^k$
$D_-^k$	Hemisfério sul da esfera $S^k$
$E _x$	Fibra sobre $x$ de $E$
$GL_n(\mathbb{C})$	Grupo linear geral complexo
$GL_n(\mathbb{R})$	Grupo linear geral real
$H$	Fibrado linha canônico
$\mathbb{H}$	Quatérnios
$Hom(X, Y)$	Morfismos entre $X$ e $Y$ em uma categoria
$ImT$	Imagem de $T$
$K$	Functor da K-Teoria
$\tilde{K}$	Functor da K-Teoria Generalizada
$KerT$	Núcleo de $T$
$\mathbb{O}$	Octônios
$O(n)$	Grupo das matrizes ortogonais
$\oplus$	Soma direta
$\otimes$	Produto tensorial
$E^\perp$	Complemento ortogonal
$\pi_n$	$n$ -ésimo grupo de homotopia

$f^*$	Pullback de $f$
$\mathbb{R}$	Números reais
$\mathbb{R}^n$	Espaço real coordenado de dimensão $n$
$\mathbb{R}P^n$	Espaço projetivo real
$S$	Suspensão
$\Sigma$	Suspensão reduzida
$S^n$	$n$ -esfera em $\mathbb{R}^{n+1}$
$Sp(n)$	Grupo simplético unitário
$SX$	Suspensão de $X$
$T_p S^n$	Espaço tangente a $S^n$ em $p$
$TS^n$	Fibrado vetorial tangente a $S^n$
$U(n)$	Grupo das matrizes unitárias
$VBM(E, F)$	Funções entre fibrados vetoriais
$\varepsilon^n$	Fibrado vetorial trivial de dimensão $n$
$\vee$	Soma wedge
$\wedge$	Produto smash
$\mathbb{Z}$	Números inteiros
$\mathbb{Z}_n$	Números inteiros módulo $n$
$\bar{z}$	Conjugado complexo

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Fibrados Vetoriais</b>	<b>5</b>
1.1 Fibrados Vetoriais . . . . .	5
1.2 Operações em Fibrados Vetoriais . . . . .	12
1.2.1 Soma . . . . .	12
1.2.2 Produto . . . . .	22
1.3 Classificação de fibrados vetoriais . . . . .	26
1.3.1 Pullback de fibrados vetoriais . . . . .	26
1.3.2 Funções colagem . . . . .	34
1.3.3 Aplicação das funções colagem . . . . .	38
<b>2 K-Teoria como Teoria de Cohomologia</b>	<b>41</b>
2.1 Os funtores $K$ e $\tilde{K}$ . . . . .	42
2.1.1 Estruturas de anel . . . . .	48
2.1.2 Homomorfismos importantes . . . . .	52
2.2 Os axiomas . . . . .	56
2.2.1 Sequência exata induzida por cones iterados . . . . .	58
2.2.2 O primeiro axioma . . . . .	73
2.2.3 O terceiro axioma . . . . .	74
<b>3 Teorema da Periodicidade de Bott</b>	<b>77</b>
3.1 Parte 1 . . . . .	77
3.2 Parte 2 . . . . .	80
3.3 O Teorema . . . . .	84
3.4 Aplicações . . . . .	86
3.4.1 Esperas Paralelizáveis . . . . .	86

**A Os Octônios de Cayley** **91**  
A.1 Duplicação de Cayley-Dickson . . . . . 91

# Introdução

Uma importante investigação na topologia é a verificação se dois espaços são homeomorfos ou não. Uma forma simples de verificar que dois espaços não são homeomorfos é através de invariantes topológicos. Um exemplo de invariante topológico é o funtor  $\pi_1$ , também conhecido como grupo fundamental. Quando dois espaços  $X$  e  $Y$  são homeomorfos, temos que  $\pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$ . Isto é, dois espaços com grupos fundamentais não isomorfos não podem ser homeomorfos. De forma mais geral, há os invariantes topológicos que são os funtores  $\pi_n$ , com  $n \geq 1$ , todos eles conhecidos como grupos de homotopia, de forma que o  $n$ -ésimo grupo de homotopia de um espaço topológico  $X$  é o conjunto das classes de homotopia de mapas contínuos  $\alpha : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  onde  $I^n$  é  $[0, 1]^n$ ,  $\alpha$  é mapa de  $I^n$  em  $X$  e  $\alpha(\partial I^n) = x_0$ , ou seja,  $\alpha(x) = x_0, \forall x \in \partial I^n$ .

Um problema que surge nessa investigação é a dificuldade em se calcular os grupos de homotopia de alguns espaços. Até os dias de hoje, computar esses grupos para as esferas permanece um problema em aberto. Em específico, é complicado calcular  $\pi_i(S^n)$  quando  $i > n$ .

Assim, uma pergunta importante que surge é "como construir novos invariantes?". Uma estratégia é a construção de novos funtores, e as teorias de homologia e cohomologia surgem como alternativas aos grupos de homotopia. Nesse novo contexto, os axiomas de Eilenberg-Steenrod caracterizam as condições para que uma série de funtores seja uma teoria de homologia ou cohomologia.

Além de uma nova alternativa, essas teorias levam a muitos outros resultados. A partir da homologia, é possível alcançar diversas aplicações, por exemplo o resultado clássico da topologia algébrica que diz que esferas  $S^n$  possuem um campo contínuo de vetores tangentes não nulos se e somente se  $n$  for ímpar. Um outro exemplo de aplicação, neste caso algébrica, é a demonstração de que  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$  são as únicas álgebras de divisão de dimensão finita que são comutativas e possuem identidade. Há diversos outros exemplos de aplicações em diferentes áreas.

A K-Teoria surge como um exemplo de teoria de cohomologia generalizada, isto é, uma teoria de cohomologia que satisfaz os axiomas de Eilenberg-Steenrod com exceção do axioma da dimensão. Essa teoria utiliza uma sequência de funtores  $K^n$  para inteiros  $n$  construídos a partir de classes de equivalência de fibrados vetoriais. Um dos diversos exemplos de aplicação desta

teoria, que não foi explorada neste trabalho, se refere à versão clássica Teorema da Periodicidade de Bott. Este teorema é um resultado na periodicidade dos grupos de homotopia estáveis de alguns espaços, em específico das matrizes ortogonais  $O(n)$ , das matrizes unitárias  $U(n)$  e das matrizes do grupo simplético unitário  $Sp(n)$  (para  $n$  suficientemente grande), conforme apresentado nas tabelas abaixo. Isto é, a K-Teoria auxilia no problema apresentado inicialmente, da dificuldade do cálculo dos grupos de homotopia.

$i \pmod{8}$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\pi_i(O) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_i(O(n))$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$
$\pi_i(Sp) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_i(Sp(n))$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$

Tabela 1: Periodicidade dos grupos de homotopia de  $O(n)$  e  $Sp(n)$

$i \pmod{2}$	0	1
$\pi_i(U) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_i(U(n))$	0	$\mathbb{Z}$

Tabela 2: Periodicidade dos grupos de homotopia de  $U(n)$

Neste trabalho, será explorada a K-Teoria reduzida, que se baseia em uma sequência de funtores  $\tilde{K}^n$  também construída a partir de classes de equivalência de fibrados vetoriais. Dentre as diversas aplicações destas teorias, foi feita a escolha de foco no resultado das esferas paralelizáveis, que é interessante ao afirmar que as únicas esferas que possuem fibrado tangente trivializável são  $S^0$ ,  $S^1$ ,  $S^3$  e  $S^7$ . A partir da mesma demonstração também é possível extrair um resultado algébrico, que diz que as únicas álgebra de divisão reais são  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^4$  e  $\mathbb{R}^8$ .

Além disso, neste texto será explorada apenas a versão complexa do Teorema da Periodicidade de Bott, que mostra que há uma periodicidade nos grupos da K-Teoria generalizada da esfera, isto é:

$n \pmod{2}$	0	1
$\tilde{K}^n(S^2)$	$\mathbb{Z}$	0

Tabela 3: Periodicidade de  $\tilde{K}^n(S^2)$

Essa versão foi escolhida pois será importante tanto para a verificação de que a K-Teoria reduzida é uma teoria de cohomologia generalizada quanto para o resultado referente às esferas paralelizáveis e álgebras de divisão reais.

Estruturalmente, o trabalho é dividido da seguinte forma:

1. **Capítulo 1** - Uma apresentação dos fibrados vetoriais e algumas de suas propriedades. Em um primeiro momento são apresentadas definições básicas e posteriormente as definições

de soma direta e de produto tensorial, juntamente com propriedades destas operações que serão importantes na montagem da estrutura de grupo abeliano e de anel de  $K(X)$  e de  $\tilde{K}(X)$ . Ao final, as funções colagem terão importância direta no Teorema da Periodicidade.

2. **Capítulo 2** - Apresentação dos funtores  $K$  e  $\tilde{K}$ , assim como da sequência  $\tilde{K}^n$  que forma uma teoria de cohomologia generalizada e a verificação desses axiomas.
3. **Capítulo 3** - Demonstração da versão complexa do Teorema da Periodicidade de Bott e aplicação deste na verificação de que as únicas esferas paralelizáveis são  $S^0, S^1, S^3$  e  $S^7$ , assim como  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4$  e  $\mathbb{R}^8$  são as únicas álgebras de divisão reais. Para tal verificação, alguns lemas não foram demonstrados, sendo tratados como resultados assumidos para fins de desenvolvimento. De forma geral, o trabalho é concluído com uma amostra do potencial da K-Teoria para a resolução de problemas.



# Capítulo 1

## Fibrados Vetoriais

Neste capítulo, são apresentados os fibrados vetoriais e algumas de suas propriedades

### 1.1 Fibrados Vetoriais

Nesta seção o objetivo central é o de definir os fibrados vetoriais. Ao final desta seção, o primeiro resultado a ser apresentado é o de que as esferas  $S^0$ ,  $S^1$ ,  $S^3$  e  $S^7$  são trivializáveis.

Na esfera  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ , existe um plano tangente a cada ponto na sua superfície. Seja  $x$  um ponto de  $S^2$  e  $T_x S^2$  o plano tangente a  $x$ . Considere cada elemento do plano  $T_x S^2$  como um vetor com início em  $x$ . Considere também  $TS^2$  como o conjunto cujos elementos são todos aqueles que pertencem a  $T_x S^2$  para algum  $x$  na superfície  $S^2$ .

Uma maneira interessante de interpretar  $TS^2$  é como uma união de espaços vetoriais disjuntos onde, para cada  $x$  em  $S^2$ ,  $T_x S^2$  é um espaço vetorial. Observe que a forma que construímos  $TS^2$  permite que mesmo que os planos tangentes pareçam se intersectar,  $T_a S^2$  é formado por vetores que possuem início em  $a$  e  $T_b S^2$  é formado por vetores com início em  $b$ , ou seja, quaisquer dois planos tangentes a pontos distintos são disjuntos. Isto é, não os vemos como planos contidos em  $\mathbb{R}^3$ , mas sim como espaços vetoriais bidimensionais independentes.

Uma possível pergunta é se é possível criar uma correspondência entre  $TS^2$  e  $S^2 \times \mathbb{R}^2$ , uma vez que é possível pensar no espaço tangente como um plano isomorfo a  $\mathbb{R}^2$ . Em particular, na exploração dos fibrados vetoriais, gostaríamos de encontrar um homeomorfismo  $h : TS^2 \rightarrow S^2 \times \mathbb{R}^2$  que, quando restrito, leva  $T_x S^2$  em  $\{x\} \times \mathbb{R}^2$  através de um isomorfismo de espaços vetoriais. Entretanto, esse mapa  $h$  não existe para  $S^2$ .

Em outras palavras, é possível dizer que o fibrado vetorial tangente a  $S^2$  não é trivializável.

O motivo e o significado disso serão explorados nos próximos capítulos.

**Definição 1.1.1** (Fibrados vetoriais). Considere  $\mathbb{K}$  como  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Um **fibrado vetorial de dimensão**  $n$  consiste em um mapa contínuo  $p : E \rightarrow B$  em que  $E$  é denotado espaço total,  $B$  é espaço topológico denotado por espaço base e valem as seguintes propriedades:

1. Para todo  $b \in B$  a fibra  $p^{-1}(b)$  é  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial.
2. Existe uma cobertura  $(U_\alpha)_\alpha$  de  $B$  tal que, para cada  $U_\alpha$ , existem homeomorfismos  $h_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{K}^n$ . O mapa  $h_\alpha$  é denotado **trivialização local do fibrado vetorial** e suas restrições  $h_\alpha|_{p^{-1}(b)} : p^{-1}(b) \rightarrow \{b\} \times \mathbb{K}^n$  são isomorfismos de espaços vetoriais para todo  $b \in B$ .

**Observação 1.1.2.** De início todos os fibrados vetoriais serão reais, ou seja, com  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Quando for necessário, será explicitado o uso do fibrado vetorial complexo, com  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

**Exemplo 1:** Um exemplo de fibrado vetorial é o **fibrado trivial**, cujo espaço total  $E$  é  $B \times \mathbb{R}^n$ . O fibrado  $p : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow B$  é definido por

$$p(b, v) = b \text{ para todo } (b, v) \in B \times \mathbb{R}^n.$$

**Exemplo 2:** Mais um exemplo é o **fibrado tangente a uma esfera**  $S^n$ . Assim como no texto de apresentação desta seção, o plano tangente a uma esfera  $S^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$  num ponto  $p \in S^n$  pode ser interpretado como o conjunto dos vetores com início em  $p$  tais que esses vetores são ortogonais ao vetor que vai de 0 a  $p$ . Esse plano pode ser definido como

$$T_p(S^n) = \{(p, v) \in \{p\} \times \mathbb{R}^{n+1} : \langle p, v \rangle = 0\}.$$

Além disso,  $TS^n = \bigcup_{p \in S^n} T_p(S^n)$  também pode ser definido por

$$TS^n = \{(x, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, v \rangle = 0\}.$$

O fibrado tangente é  $p : TS^n \rightarrow S^n$  tal que  $p(x, v) = x$  para todo  $(x, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ . Geometricamente, pode-se interpretar este fibrado como o mapa que leva os vetores de  $TS^n$  para o seu ponto de início.

**Definição 1.1.3.** [Mapa entre fibrados vetoriais] Dados dois fibrados vetoriais  $p_1 : E_1 \rightarrow B$ ,  $p_2 : E_2 \rightarrow B$ , um mapa de fibrados vetoriais entre eles é  $f : E_1 \rightarrow E_2$  contínuo tal que  $p_1 = p_2 \circ f$ , isto é,  $f$  é mapa contínuo tal que

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f} & E_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & & B \end{array}$$

comuta e  $f$  é mapa linear entre cada fibra, isto é,  $f|_{p_1^{-1}(b)} : p_1^{-1}(b) \rightarrow p_2^{-1}(b)$  é mapa linear.

**Notação:** Dados dois fibrados vetoriais  $p_1 : E_1 \rightarrow B$  e  $p_2 : E_2 \rightarrow B$ , denote por  $VBM(E_1, E_2)$  o conjunto dos mapas de fibrados vetoriais entre  $p_1 : E_1 \rightarrow B$  e  $p_2 : E_2 \rightarrow B$ .

**Definição 1.1.4** (Isomorfismo entre fibrados vetoriais). Dados dois fibrados  $p_1 : E_1 \rightarrow B$ ,  $p_2 : E_2 \rightarrow B$ , um isomorfismo entre eles é um homeomorfismo  $h : E_1 \rightarrow E_2$  tal que  $h|_{p_1^{-1}(b)} : p_1^{-1}(b) \rightarrow p_2^{-1}(b)$  é isomorfismo linear. Escrevemos  $E_1 \approx E_2$ .

**Definição 1.1.5** (Fibrado Trivializável). Um fibrado é trivializável quando existe um isomorfismo entre ele e um fibrado trivial.

**Definição 1.1.6** (Seção). Dado um fibrado vetorial  $p : E \rightarrow B$ , uma seção é um mapa contínuo  $s : B \rightarrow E$  que leva cada ponto  $b \in B$  para  $s(b) \in p^{-1}(b)$ , ou seja, associa cada ponto da base com um ponto da fibra nesse mesmo ponto.

Outras notações importantes que serão utilizadas nesta seção:

**Notação:** Dados dois espaços vetoriais  $V_1$  e  $V_2$ ,  $Hom(V_1, V_2)$  denota o conjunto de funções lineares entre  $V_1$  e  $V_2$ .

**Notação:** Dados dois espaços topológicos  $X$  e  $Y$ ,  $C(X, Y)$  que denota o conjunto das funções contínuas entre  $X$  e  $Y$ .

**Lema 1.1.7.** Considere o mapa  $\varphi : VBM(B \times \mathbb{R}^n, B \times \mathbb{R}^m) \rightarrow C(B, Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$  definido por  $\varphi(f) : B \rightarrow Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  tal que  $\varphi(f)(b) = p_2(f(b, -)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Observe que  $p_2$  é projeção do

mapa  $f(b, -)$  na segunda coordenada

$$f(b, v) = (b, v') \in B \times \mathbb{R}^m \Rightarrow p_2(f(b, v)) = v' \in \mathbb{R}^m \quad \forall (b, v) \in B \times \mathbb{R}$$

O mapa  $\varphi$  é bijeção.

**Demonstração:** A função está bem definida pois para todo  $f \in VBM(B \times \mathbb{R}^n, B \times \mathbb{R}^m)$ ,  $\varphi(f)$  realmente é mapa contínuo pois a composição das funções contínuas  $p_2$  e  $f$  é contínua. Assim,  $\varphi(f) \in C(B, Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ .

Provemos primeiro a sobrejetividade. De fato, se  $\psi \in C(B, Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ , pode-se definir  $f : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow B \times \mathbb{R}^m$  por

$$f(b, v) = (b, \psi(b)(v)) \quad \forall (b, v) \in B \times \mathbb{R}^n.$$

A função  $f$  é mapa linear fixado cada  $b$  pois  $\psi(b) \in Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  é mapa linear.  $f$  é mapa contínuo pois  $\psi$  é contínuo também e de fato  $f \in VBM(B \times \mathbb{R}^n, B \times \mathbb{R}^m)$ .

Basta notar que  $\varphi(f) = \psi$ :

$$\psi(b) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ é mapa tal que } \psi(b)(v) \in \mathbb{R}^m \quad \forall b \in B \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

$$\varphi(f)(b) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ é mapa tal que } \varphi(f)(b)(v) = p_2(f(b, v)) = \psi(b)(v) \in \mathbb{R}^m \quad \forall b \in B \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Provada a sobrejetividade, a injetividade segue de tomarmos  $f_1, f_2 \in VBM(B \times \mathbb{R}^n, B \times \mathbb{R}^m)$  com  $f_1 \neq f_2$ . Isso significa que existe  $(b, v) \in B \times \mathbb{R}^n$  tal que  $f_1(b, v) = (b, u_1)$ ,  $f_2(b, v) = (b, u_2)$  e  $u_1 \neq u_2$ . Portanto,  $\varphi(f_1) \neq \varphi(f_2)$  pois  $\varphi(f_1)(b) \neq \varphi(f_2)(b)$ , uma vez que  $\varphi(f_1)(b)(v) = u_1 \neq u_2 = \varphi(f_2)(b)(v)$ .  $\square$

**Lema 1.1.8.** Dado  $f : E_1 \rightarrow E_2$  mapa contínuo entre os fibrados vetoriais  $p_1 : E_1 \rightarrow B$  e  $p_2 : E_2 \rightarrow B$ , temos que  $f$  é um isomorfismo entre fibrados nos termos de 1.1.4, se  $f$  leva  $p_1^{-1}(b)$  em  $p_2^{-1}(b)$  por isomorfismo linear para todo  $b \in B$ .

**Demonstração:** Resta mostrar que  $f$  é homeomorfismo e já temos que  $f$  é bijeção, uma vez que leva  $p_1^{-1}(b)$  em  $p_2^{-1}(b)$  de maneira bijetiva para todo  $b \in B$  e as fibras não se intersectam.

Considere  $U$  um aberto do espaço  $B$  tal que a restrição dos dois fibrados a esses abertos é trivial, ou seja, existem homeomorfismos  $h_1 : p_1^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$  e  $h_2 : p_2^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^m$ .

Note que é possível cobrir  $B$  com abertos que trivializam os dois fibrados apenas tomando intersecções entre as coberturas que trivializam cada um dos dois fibrados vetoriais.

Agora, antes de proceder com a demonstração, note que podemos supor sem perda de generalidade que  $E_1$  e  $E_2$  são fibrados vetoriais triviais. Isto é,  $E_1 = B \times \mathbb{R}^n$  e  $E_2 = B \times \mathbb{R}^m$ . Para visualizar isto, basta notar que a continuidade é uma condição local e que  $f$  é homeomorfismo se e somente se o mapa  $f' : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow U \times \mathbb{R}^m$  que faz o diagrama a seguir comutar possui inversa contínua:

$$\begin{array}{ccc}
 p_1^{-1}(U) & \xrightarrow{f|_{p_1^{-1}(U)}} & p_2^{-1}(U) \\
 \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 \\
 U \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f'|_{U \times \mathbb{R}^n}} & U \times \mathbb{R}^m \\
 \searrow pr_U^{U \times \mathbb{R}^n} & & \swarrow pr_U^{U \times \mathbb{R}^m} \\
 & U &
 \end{array}$$

Onde  $pr_U^{U \times \mathbb{R}^n} : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow U$  é a projeção definida por

$$pr_U^{U \times \mathbb{R}^n} : (b, v) = b \quad \forall (b, v) \in U \times \mathbb{R}^n$$

e  $pr_U^{U \times \mathbb{R}^m} : U \times \mathbb{R}^m \rightarrow U$  é a projeção definida por

$$pr_U^{U \times \mathbb{R}^m} (b', v') = b' \quad \forall (b', v') \in U \times \mathbb{R}^m$$

Note que  $f'_U \in VBM(U \times \mathbb{R}^n, U \times \mathbb{R}^m)$  porque  $f'_U = h_2 \circ f|_{p_1^{-1}(U)} \circ h_1^{-1}$  é contínua e linear em cada fibra com  $pr_U^{U \times \mathbb{R}^n} = pr_U^{U \times \mathbb{R}^m} \circ f'_U$  para todo aberto  $U$  da cobertura de  $B$  que gera trivializações locais. Além disso,  $f'_U$  também leva  $(pr_U^{U \times \mathbb{R}^n})^{-1}(b)$  em  $(pr_U^{U \times \mathbb{R}^m})^{-1}(b)$  por isomorfismo linear, herdando a característica de  $f$  de levar fibra em fibra por isomorfismo linear para todo  $b \in U$ .

Fica claro que no diagrama que  $f^{-1}$  é contínua, ou seja,  $f$  é mapa aberto se e somente se, para todo aberto  $U$  nas condições acima,  $f'_U$  é mapa aberto. Basta então mostrar que, para  $U$  qualquer,  $f'_U$  possui inversa contínua, o mesmo que mostrar que um mapa entre fibrados vetoriais triviais possui inversa contínua. Mostramos assim que, basta provar o caso em que  $f$  é mapa entre fibrados vetoriais triviais.

Supondo agora que  $p_1 : E_1 \rightarrow B$  e  $p_2 : E_2 \rightarrow B$  são fibrados vetoriais triviais:

Temos  $f(b, v) = (b, k_b(v))$  para algum mapa  $k_b$  uma bijeção contínua linear de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^m$  e, se  $\phi$  é definida assim como no Lema 1.1.7 anterior,  $\phi(f) : B \rightarrow Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  é tal que  $\phi(f)(b) = k_b$

para todo  $b \in B$ , com  $k_b$  dependendo continuamente de  $b \in B$ , conforme também provado no Lema 1.1.7.

A função  $k_b$  possui inversa contínua por ser bijeção linear contínua de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^m$ . Basta mostrar que  $k_b$  é mapa aberto, o que é uma consequência do Teorema da Aplicação Aberta, importante resultado na Análise Funcional.

Conclui-se então que  $f|_{b \times \mathbb{R}^n}$  possui inversa contínua para todo  $b \in B$ . Como  $k_b$  é mapa linear inversível, que depende continuamente de  $b$ , temos:  $k_b \in GL_n(\mathbb{R})$  e, assim,  $k_b^{-1} = \frac{1}{\det k_b} \text{adj}(k_b)$ , onde  $\text{adj}(k_b)$  é a matriz adjunta de  $k_b$ . Escrevendo dessa forma, como a inversa é escrita pode ser escrita de forma algébrica em termos das entradas de  $k_b$ , é possível notar que  $k_b^{-1}$  também depende continuamente de  $b \in B$ . Com isso, é possível concluir que  $f^{-1}(b, v) = (b, k_b^{-1}(v))$  é mapa contínuo em todo o seu domínio, como queríamos. □

**Lema 1.1.9.** *Um fibrado vetorial de dimensão  $n$  da forma  $p : E \rightarrow B$  é trivializável se e somente se existem  $n$  seções  $s_1, s_2, \dots, s_n : B \rightarrow E$  tais que  $\{s_1(b), s_2(b), \dots, s_n(b)\}$  é linearmente independente em cada fibra  $p^{-1}(b)$ .*

**Demonstração:** Se  $p : E \rightarrow B$  é isomorfo ao fibrado trivial, então existe um homeomorfismo  $h : E \rightarrow B \times \mathbb{R}^n$  que, restrito a cada fibra  $h|_{p^{-1}(b)} : p^{-1}(b) \rightarrow \{b\} \times \mathbb{R}^n$  é isomorfismo linear. Note que o inverso de  $h|_{p^{-1}(b)}$  também é isomorfismo linear. Isomorfismos lineares levam vetores linearmente independentes em vetores linearmente independentes e então, como  $\mathbb{R}^n$  possui base com  $n$  vetores  $\{v_1, \dots, v_n\}$ ,  $h|_{p^{-1}(b)}^{-1}$  leva cada  $\{b\} \times v_i$  em algum  $x_i \in p^{-1}(b)$ , sempre existirá alguma seção  $s_i$  tal que  $s_i(b) = x_i$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  e  $\{s_1, \dots, s_n\}$  é conjunto linearmente independente no espaço vetorial  $p^{-1}(b)$ .

Por outro lado, se sabemos que existem  $n$  seções linearmente independentes, verifiquemos que o mapa  $h : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow E$  tal que

$$h(b, t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^n t_i s_i(b) \text{ para todo } (b, t_1, \dots, t_n) \in B \times \mathbb{R}^n$$

é isomorfismo entre o fibrado  $p : E \rightarrow B$  e o fibrado trivial.

Para provar que  $h$  é isomorfismo, primeiramente provemos que é bijeção. A sobrejetividade segue do fato de que, para todo  $x \in E$ , existe algum  $b_0 \in B$  (único) tal que  $p(x) = b_0$ , ou seja,  $x \in p^{-1}(b_0)$  para algum  $b_0 \in B$ . Como  $\{s_1(b_0), s_2(b_0), \dots, s_n(b_0)\}$  é base de  $p^{-1}(b_0)$ ,  $x$  pode ser escrito de forma única como  $x = \sum_{i=1}^n t'_i s_i(b_0)$  para determinados valores  $t'_1, \dots, t'_n \in \mathbb{R}$ . Isso implica que  $x = h(b, t'_1, \dots, t'_n)$ . A unicidade de  $b$  e a unicidade dos valores  $t'_1, \dots, t'_n$  também implicam que  $h$  é mapa injetor.

É possível observar também que  $h$  se restringe a um mapa linear entre as fibras dos dois fibrados pois se  $h' = h|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n}$  para algum  $b \in B$  qualquer, então  $h' : \{b\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow p^{-1}(b)$  é linear. De fato, como a soma do espaço vetorial  $\{b\} \times \mathbb{R}^n$  é  $(b, x) + (b, y) = (b, x + y)$  e o produto por escalar nesse mesmo espaço é  $\alpha(b, x) = (b, \alpha x)$  com  $x, y \in \mathbb{R}^n$  e com  $\alpha \in \mathbb{R}$ , temos que  $h'((b, t_1, \dots, t_n) + \alpha(b, k_1, \dots, k_n)) = h'(b, t_1 + \alpha k_1, \dots, t_n + \alpha k_n) = \sum_{i=1}^n (t_i + \alpha k_i) s_i(b) = \sum_{i=1}^n t_i s_i(b) + \alpha \sum_{i=1}^n k_i s_i(b) = h'(b, t_1, \dots, t_n) + \alpha h'(b, k_1, \dots, k_n)$  para todos  $\alpha, t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}$ .

Portanto,  $h$  se restringe a isomorfismo linear entre as fibras dos fibrados o que, pelo Lema 1.1.8 implica que  $h$  é isomorfismo entre fibrados. □

**Observação 1.1.10.** [O fibrado vetorial tangente de  $S^1$  é trivializável] Dado o fibrado tangente  $p : TS^1 \rightarrow S^1$ , mostremos que, em qualquer ponto  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  que pertence a  $S^1$ ,  $p^{-1}(x)$  é fibra tal que existe seção  $s$  tal que  $\{s(x)\}$  é linearmente independente em  $p^{-1}(x)$  para todo  $x \in S^1$ . Se

$$s((x_1, x_2)) = ((x_1, x_2), (-x_2, x_1)),$$

essa seção permite concluir que, como  $\{s(x)\}$  é linearmente independente em  $p^{-1}(x)$  para todo  $x \in S^1$ , pelo Lema 1.1.9, o fibrado vetorial tangente de  $S^1$  é trivializável.

É importante visualizar que aqui  $(-x_2, x_1)$  é uma rotação de  $(x_1, x_2)$  por  $\pi/2$  no sentido horário. Se observarmos  $\mathbb{R}^2$  como o plano complexo e  $(x_1, x_2)$  como  $x_1 + ix_2$ , temos que  $s$  faz uma multiplicação por  $i$ , pois  $i(x_1 + ix_2) = ix_1 - x_2$ , identificado por  $(-x_2, x_1)$  no plano. Assim, pode-se denotar  $s(x) = (x, ix)$ . Essa notação será importante nas próximas observações.

**Observação 1.1.11.** [O fibrado vetorial tangente de  $S^3$  é trivializável] No fibrado tangente  $p : TS^3 \rightarrow S^3$  pode-se realizar o mesmo processo anterior, mas identificando todo  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  em  $\mathbb{R}^4$  por  $x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$  nos quatérnios. Em  $\mathbb{H}$ , conjunto dos quatérnios, basta observar que  $ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, ik = -j, kj = -i$  para calcular  $ix, jx$  e  $kx$ . Aqui, no fibrado  $p : TS^3 \rightarrow S^3$  é possível definir três seções

$$s_1(x) = (x, ix) = (x, (-x_2, x_1, -x_4, x_3)),$$

$$s_2(x) = (x, jx) = (x, (-x_3, x_4, x_1, -x_2))$$

$$\text{e } s_3(x) = (x, kx) = (x, (-x_4, -x_3, x_2, x_1)),$$

de forma que  $\langle ix, x \rangle = \langle jx, x \rangle = \langle kx, x \rangle = 0$  (as seções realmente estão em  $p^{-1}(x)$  para todo  $x$ ).

Por fim, temos que  $\{s_1(x), s_2(x), s_3(x)\}$  é conjunto linearmente independente em  $p^{-1}(x)$  para todo  $x$  porque  $\langle ix, jx \rangle = \langle ix, kx \rangle = \langle jx, kx \rangle = 0$ . Ou seja,  $\{ix, jx, kx\}$  é conjunto onde os elementos são ortogonais dois a dois, e portanto linearmente independente. Assim,  $\{(x, ix), (x, jx), (x, kx)\}$  também é linearmente independente.

Assim, pelo Lema 1.1.9, o fibrado vetorial tangente de  $S^3$  é trivializável.

**Observação 1.1.12.** [O fibrado vetorial tangente de  $S^7$  é trivializável] Para mostrar que esse fibrado também é trivializável, basta repetir o processo anterior, mas desta vez com os Octônios, o conjunto cuja construção é discutida no Apêndice A. Além da construção, os cálculos necessários também estarão detalhados no apêndice. Cada elemento de um octônio pode ser escrito como  $a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7$  com  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 \in \mathbb{R}$  e tal que  $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6$  e  $i_7$  unidades imaginárias, ou seja,  $i_n^2 = -1$  para todo  $n \in \{1, 2, \dots, 7\}$ . No fibrado tangente  $p : TS^7 \rightarrow S^7$  é possível definir sete seções  $s_n(x) = (x, i_n x)$ ,  $n \in \{1, 2, \dots, 7\}$ .

Temos que que  $\langle i_n x, x \rangle = 0$  para todo  $n \in \{1, 2, \dots, 7\}$ , o que implica que as seções realmente se encontram em  $p^{-1}(x)$  para todo  $x$  e, além disso, também ocorre  $\langle i_m x, i_n x \rangle = 0$  para todos  $m, n \in \{1, 2, \dots, 7\}$  com  $m \neq n$ . Do fato de que em  $\{i_n x, n \in \{1, 2, \dots, 7\}\}$  os elementos são dois a dois ortogonais, conclui-se que este conjunto é linearmente independente e, portanto,  $\{(x, i_n x) | n \in \{1, 2, \dots, 7\}\} = \{s_n | n \in \{1, \dots, 7\}\}$  também é linearmente independente.

Por fim, pela Proposição 1.1.9, concluímos que o fibrado vetorial tangente de  $S^7$  também é trivializável.

O fibrado vetorial tangente de  $S^0$  também é trivializável pois  $S^0 = \{-1, 1\}$ ,  $TS^0 = \{(p, v) \in S^0 \times \mathbb{R}^0 | \langle x, v \rangle = 0\}$  e, como  $\mathbb{R} = \{0\}$ , também pode-se escrever  $TS^0 = \{(-1, 0), (1, 0)\} = S^0 \times \mathbb{R}^0$ . Concluímos assim, que os fibrados vetoriais tangentes de  $S^0, S^1, S^3$  e  $S^7$  são trivializáveis. Em momento futuro, será possível concluir que estas são as únicas esferas com tal condição.

## 1.2 Operações em Fibrados Vetoriais

Nesta seção será definida a operação de soma para fibrados vetoriais e serão apresentadas algumas propriedades, em especial a existência de um análogo ao fibrado que é inverso da soma para todo fibrado vetorial.

### 1.2.1 Soma

Primeiramente, lembre a definição de soma direta entre dois espaços vetoriais:

**Definição 1.2.1.** A soma direta entre  $n$  espaços vetoriais  $V_1, \dots, V_n$  é um espaço  $\bigoplus_{1 \leq i \leq n} V_i$  onde cada

$v \in \bigoplus_{1 \leq i \leq n} V_i$  pode ser unicamente representado como  $v = v_1 \oplus \dots \oplus v_n$  com  $v_j \in V_j$  para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

**Definição 1.2.2** (Soma direta). A soma entre dois fibrados  $p_1 : E_1 \rightarrow B$  e  $p_2 : E_2 \rightarrow B$  é um fibrado  $p : E_1 \oplus E_2 \rightarrow B$  tal que  $E_1 \oplus E_2 = \{(v_1, v_2) \in E_1 \times E_2 \mid p_1(v_1) = p_2(v_2)\}$  e  $p(v_1, v_2) = p_1(v_1) = p_2(v_2)$  para todo  $(v_1, v_2) \in E_1 \oplus E_2$ .

**Proposição 1.2.3.** A soma direta entre fibrados vetoriais  $p_1 : E_1 \rightarrow B$  e  $p_2 : E_2 \rightarrow B$  é realmente um fibrado vetorial.

**Demonstração:** Considere o fibrado soma direta  $p : E_1 \oplus E_2 \rightarrow B$ . Sabemos que existem coberturas de  $B$  nas quais existem trivializações locais para cada um dos fibrados  $p_1$  e  $p_2$ . Ou seja, tomando interseções entre essas coberturas caso necessário, é possível concluir que existe uma cobertura  $(U_\alpha)_\alpha$  de  $B$  tal que existem os homeomorfismos  $h_1 : p_1^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$  e  $h_2 : p_2^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^m$  que se restringem a isomorfismos vetoriais entre cada fibra.

Isso significa que, considerando a mesma cobertura  $(U_\alpha)_\alpha$ , existe a seguinte trivialização local do fibrado soma:  $h_1 \times h_2 : p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^{n+m}$  definido por  $h_1 \times h_2(v_1, v_2) = (f_1(h_1(v_1)) = f_1(h_2(v_2)), f_2(h_1(v_1)), f_2(h_2(v_2)))$ .  $f_1$  e  $f_2$  são as seguintes projeções:

- Se  $h_1(v_1) = (a_1, b_1)$  com  $a_1 \in U_\alpha$  e  $b_1 \in \mathbb{R}^n$ , temos  $f_1(h_1(v_1)) = a_1$  e  $f_2(h_1(v_1)) = b_1$
- Se  $h_2(v_2) = (a_2, b_2)$  com  $a_2 \in U_\alpha$  e  $b_2 \in \mathbb{R}^m$  temos  $f_1(h_2(v_2)) = a_2$  e  $f_2(h_2(v_2)) = b_2$

Observe, portanto, que o propósito das projeções é não haver a repetição de  $p_1(h_1(v_1)) = p_1(h_2(v_2))$  (como ocorreria caso o produto fosse definido apenas por  $(h_1(v_1), h_2(v_2))$ ) e termos exatamente  $h_1 \times h_2(v_1, v_2) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^{n+m}$ , contradomínio desejado para  $h_1 \times h_2$ . agora ser interpretado como uma trivialização local do fibrado  $p : E_1 \oplus E_2 \rightarrow B$ . Observe também que todo  $(v_1, v_2) \in p^{-1}(U_\alpha)$  é tal que  $v_1 \in p_1^{-1}(U_\alpha)$  e  $v_2 \in p_2^{-1}(U_\alpha)$ , por isso faz sentido calcular  $h_1(v_1)$  e  $h_2(v_2)$ . Como  $h_1$  e  $h_2$  são homeomorfismos que se restringem a isomorfismos vetoriais,  $h_1 \times h_2$  também satisfaz essas condições e, uma vez que este processo pode ser realizado para qualquer aberto da cobertura  $(U_\alpha)_\alpha$ , conclui-se que realmente há trivializações locais para o fibrado  $p : E_1 \oplus E_2 \rightarrow B$ .

Além disso, o fato de que  $S_b = p^{-1}(b) = \{(u, v) \in E_1 \oplus E_2 \mid p_1(u) = p_2(v) = b\}$  é um espaço vetorial para todo  $b \in B$  segue de  $p_1^{-1}(b)$  e  $p_2^{-1}(b)$  serem espaços vetoriais, pois  $(u_1, v_1) + \gamma(u_2, v_2) = (u_1 + \gamma u_2, v_1 + \gamma v_2) \in S_b$  para todos  $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in S$  e  $\gamma \in \mathbb{R}$ , pois  $u_1 + \gamma u_2 \in p_1^{-1}(b)$  e  $v_1 + \gamma v_2 \in p_2^{-1}(b)$ .  $\square$

Utilizando o resultado acima, é simples concluir o seguinte corolário:

**Corolário 1.2.4.** *A soma direta entre dois fibrados trivializáveis  $p_1 : E_1 \rightarrow B$  e  $p_2 : E_2 \rightarrow B$  é trivializável,*

**Demonstração:** Se os dois fibrados são trivializáveis, existem homeomorfismos  $h_1 : E_1 \rightarrow B \times \mathbb{R}^n$  e  $h_2 : E_2 \rightarrow B \times \mathbb{R}^m$  que se restringem a isomorfismos vetoriais em cada fibra. Ou seja,  $h_1$  e  $h_2$  são isomorfismos entre os fibrados enunciados e fibrados triviais.

A situação encontrada é: há apenas um aberto na cobertura  $(U_\alpha)_\alpha$  de  $B$  onde os fibrados  $p_1 : E_1 \rightarrow B$  e  $p_2 : E_2 \rightarrow B$  são trivializáveis localmente: esse único aberto de  $(U_\alpha)_\alpha$  é o próprio  $B$ . Explicitamente, considerando  $p : E_1 \oplus E_2 \rightarrow B$  o fibrado da soma direta, pode-se definir  $h_1 \times h_2 : p^{-1}(B) \rightarrow B \times \mathbb{R}^{n+m}$  da mesma forma que na Proposição anterior 1.2.3:  $h_1 \times h_2(v_1, v_2) = (f_1(h_1(v_1)), f_2(h_2(v_2)))$ . Ele será um homeomorfismo que se restringe a isomorfismos lineares em cada fibra. Como  $p^{-1}(B) = E_1 \oplus E_2$ , a afirmação anterior significa que  $h_1 \times h_2$  é um isomorfismo entre o fibrado soma direta e o fibrado trivial.  $\square$

**Observação 1.2.5.** Também pode ocorrer de uma soma entre fibrados vetoriais não ambos trivializáveis ser trivializável. Um exemplo é a soma direta entre o fibrado vetorial tangente a  $S^n$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$  e o fibrado vetorial normal a  $S^n$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

De fato, se  $E_1 = \{(x, tx) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid t \in \mathbb{R}\}$ , o fibrado normal é  $p_1 : E_1 \rightarrow S^n$  com  $p_1(x, v) = x$  para todo  $(x, v) \in E_1$ . Além disso, o fibrado tangente é  $p_2 : TS^n \rightarrow S^n$  tal que  $p_2(x, v) = x$ , com  $E_2 = TS^n = \{(x, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, v \rangle = 0\}$ .

Pela Definição 1.2.2 temos que o fibrado soma direta é  $p : E_1 \oplus E_2 \rightarrow S^n$  definido por  $p(v_1, v_2) = p_1(v_1) = p_2(v_2)$ . Utilizando a notação da Definição 1.1.4, é fácil notar que  $E_1 \oplus E_2 = \{(x_1, v_1), (x_2, v_2) \in E_1 \times E_2 \mid p_1(v_1) = p_2(v_2)\} \approx \{(x_1, v_1, x_2, v_2) \in E_1 \times E_2 \mid x_1 = x_2, v_1 = \lambda x_1 \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } \langle x_2, v_2 \rangle = 0\}$ . Note que cada fibra de  $E_1 \oplus E_2$  possui dimensão  $n + 1$ , pois fixado  $x \in S^n$ , o espaço com todos os possíveis  $v_1$  é uma reta de dimensão 1 e o espaço com todos os possíveis  $v_2$  é um plano tangente à esfera  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , em que todos os planos tangentes possuem dimensão  $n$ . Assim, é possível definir a aplicação contínua  $f : E_1 \oplus E_2 \rightarrow S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$  por

$$f((x, v_1), (x, v_2)) = (x, v_1 + v_2) \text{ para todo } ((x, v_1), (x, v_2)) \in E_1 \oplus E_2.$$

Como  $v_1$  é paralelo a  $x$  e  $\langle x, v_2 \rangle = 0$ , também temos que  $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ . Portanto, temos que, quando é fixado  $x \in S^n$ , a restrição de  $f$  às fibras de  $x$  é mapa injetivo e, como as fibras possuem as mesmas dimensões, conclui-se que  $f$  é isomorfismo linear quando restrito em cada fibra. Nessas condições, é possível aplicar o Lema 1.1.8 e concluir que  $f$  é isomorfismo entre os fibrados soma direta e um fibrado vetorial trivial, como queríamos.

Observe ainda que o fibrado vetorial normal é trivializável: se o fibrado vetorial trivial de

dimensão 1 com base  $S^n$  é  $pr_1 : S^n \times \mathbb{R} \rightarrow S^n$ , definido por

$$pr_1(x, v) = x \text{ para todo } (x, v) \in S^n \times \mathbb{R},$$

pode-se construir o isomorfismo  $\phi : S^n \times \mathbb{R} \rightarrow E_1$  entre os dois fibrados, definido por

$$\phi(x, t) = (x, tx) \text{ para todo } (x, t) \in S^n \times \mathbb{R}.$$

Note que de fato,  $\phi$  se restringe a um isomorfismo linear entre as fibras, pois se  $x \in S^n$  qualquer e  $\psi_x = \phi|_{pr_1^{-1}(x)} = \phi|_{\{x\} \times \mathbb{R}}$ , temos que  $\psi_x$  é claramente bijeção e  $\psi_x(x, t_1) + \alpha\psi_x(x, t_2) = (x, t_1x) + \alpha(x, t_2x) = (x, (t_1 + \alpha t_2)x) = \psi_x(x, t_1 + \alpha t_2)$  para quaisquer  $t_1, t_2, \alpha \in \mathbb{R}$ . Assim,  $\phi$  é isomorfismo pelo Lema 1.1.8.

Quando um fibrado vetorial  $p : E \rightarrow \mathbb{R}^m$  somado a um fibrado trivializável resulta novamente em um fibrado vetorial trivializável, dizemos que este fibrado é **estavelmente trivial**. Portanto, acabamos de mostrar que o fibrado vetorial tangente a  $S^n$  é estavelmente trivial.

Em geral, sob certas condições, dado qualquer fibrado vetorial não trivializável, é possível encontrar outro fibrado cuja soma com o inicial seja o fibrado trivial. Iniciemos com alguns resultados que serão importantes para demonstrar este fato.

**Definição 1.2.6** (Produto interno em fibrado vetorial real). Um produto interno em um fibrado vetorial  $p : E \rightarrow B$  é um mapa  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \oplus E \rightarrow \mathbb{R}$  que se restringe a um produto interno em cada fibra. Isto é, em cada fibra  $p^{-1}(b)$  vale para todos  $x, y, z \in p^{-1}(b)$  e todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

- $\langle x, x \rangle \geq 0$  e  $\langle x, x \rangle = 0$  se e somente se  $x = 0$
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- $\langle x + \alpha y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \alpha \langle y, z \rangle$

**Definição 1.2.7** (Refinamento). Dada uma cobertura  $\mathcal{C}$  de um espaço topológico  $X$ , dizemos que uma cobertura  $\mathcal{D}$  de  $X$  é um refinamento de  $\mathcal{C}$  se, para todo  $V \in \mathcal{D}$ , existe  $U \in \mathcal{C}$  tal que  $V \subset U$  para algum  $U \in \mathcal{C}$ .

**Definição 1.2.8** (Família de abertos localmente finita). Uma família de abertos de um espaço topológico  $X$ , denotada por  $\mathcal{C}$ , é localmente finita se, para todo  $x \in X$  existe  $V$  vizinhança de  $x$  tal que  $V$  intersecta um número finito de abertos de  $\mathcal{C}$ .

**Definição 1.2.9** (Paracompacto). Um espaço é **paracompacto** se toda cobertura aberta possui refinamento localmente finito.

**Observação 1.2.10.** Relembre o seguinte fato de topologia geral: se  $X$  é espaço paracompacto e Hausdorff, então toda cobertura aberta de  $X$  possui uma partição da unidade subordinada a ela. Uma demonstração completa pode ser vista em [6, p. 259]

**Proposição 1.2.11.** *É possível definir um produto interno no fibrado vetorial  $p : E \rightarrow B$  quando a base  $B$  é paracompacta e Hausdorff.*

**Demonstração:** Considere  $(U_\alpha)_\alpha$  cobertura de  $B$  tal que existe  $h_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$  trivialização local do fibrado vetorial.

Como  $B$  é base paracompacta e Hausdorff, toda cobertura possui uma partição da unidade subordinada a ela, ou seja, existe uma coleção de mapas  $\varphi_\beta : B \rightarrow [0, 1]$  com suporte contido em algum dos abertos da cobertura  $(U_\alpha)_\alpha$  e tal que  $\sum_\beta \varphi_\beta = 1$ , função constante igual a 1. Considere que o suporte de cada mapa  $\varphi_\beta$  está contido em um aberto denotado  $U_{\alpha_\beta}$  da cobertura inicial.

Considere  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$  produto interno em  $p^{-1}(U_\alpha)$  que é pullback do produto interno canônico em  $\mathbb{R}^n$  denotado por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Ou seja, explicitamente, se  $h_\alpha$  é trivialização local em  $U_\alpha$ , dados quaisquer  $x, y \in p^{-1}(U_\alpha)$  tais que  $h_\alpha(x) = (b_1, v_1)$ ,  $h_\alpha(y) = (b_2, v_2)$  com  $b_1, b_2 \in U_\alpha$  e com  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ , definimos  $\langle x, y \rangle_\alpha = \langle v_1, v_2 \rangle$ , para todos  $x, y \in p^{-1}(U_\alpha)$ .

Assim, definindo o mapa  $\langle \cdot, \cdot \rangle_E : E \oplus E \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\langle v, w \rangle_E = \sum_\beta \varphi_\beta(p(v)) \langle v, w \rangle_{\alpha_\beta}$  para todos  $v, w \in E$ , é possível concluir que ele é produto interno em  $E$ .

Verificação:

$\varphi_\beta(p(v)) \neq 0$  se e somente se  $p(v) \in U_{\alpha_\beta}$  e, como  $(v, w) \in E \oplus E$ , então  $p(v) = p(w) = b$ . Considere  $p(v) \in U_{\alpha_{\beta'}}$  e que  $p(v) = b$  se encontra apenas neste aberto da cobertura. Suponha que  $b$  está em apenas um aberto da cobertura. Se  $b$  estivesse numa intersecção de abertos, simplesmente haveria mais parcelas somando na definição do produto interno, e o processo é idêntico.

- $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_E = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle_E$

De fato,  $\langle v, w \rangle_E = \sum_\beta \varphi_\beta(p(v)) \langle v, w \rangle_{\alpha_\beta} = \varphi_{\beta'}(p(v)) \langle v, w \rangle_{\alpha_{\beta'}} = \varphi_{\beta'}(p(w)) \langle w, v \rangle_{\alpha_{\beta'}} = \sum_\beta \varphi_\beta(p(w)) \langle w, v \rangle_{\alpha_\beta} = \langle w, v \rangle_E$ .

- $\langle \mathbf{u} + \mathbf{kv}, \mathbf{w} \rangle_E = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle_E + \mathbf{k} \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_E$

Para provar a linearidade, tome  $k \in \mathbb{R}$  e  $u, v, w \in p^{-1}(b)$ . Como  $p^{-1}(b)$  é espaço vetorial, temos  $p(u) = p(v) = p(u + kv) = b$ . Suponha que  $b \in U_{\alpha_{\beta'}}$  e que  $b$  se encontra apenas neste aberto da cobertura. Calculemos  $\langle u + kv, w \rangle_E = \sum_\beta \varphi_\beta(p(u + kv)) \langle u + kv, w \rangle_{\alpha_\beta} = \varphi_{\beta'}(p(u + kv)) \langle u + kv, w \rangle_{\alpha_{\beta'}}$ . Uma vez que a trivialização local  $h_{\alpha_\beta}$  restrita a cada fibra é um isomorfismo vetorial, pode-se observar que  $h_{\alpha_\beta}(u + kv) = h_{\alpha_\beta}(u) +$

$kh_{\alpha_\beta}(v)$ , isto é, se  $h_{\alpha_\beta}(u) = (b, x)$ ,  $h_{\alpha_\beta}(v) = (b, y)$  e  $h_{\alpha_\beta}(w) = (b, z)$ , então  $h_{\alpha_\beta}(u + kv) = (b, x + ky)$  é a soma no espaço vetorial  $\{b\} \times \mathbb{R}^n$ . Como conclusão, é possível obter  $\langle u + kv, w \rangle_{\alpha_{\beta'}} = \langle x + ky, z \rangle = \langle x, z \rangle + k\langle y, z \rangle = \langle u, w \rangle_{\alpha_{\beta'}} + k\langle v, w \rangle_{\alpha_{\beta'}}$  e, portanto,  $\langle u + kv, w \rangle_E = \varphi_{\beta'}(p(u + kv))\langle u + kv, w \rangle_{\alpha_{\beta'}} = \varphi_{\beta'}(p(u + kv))(\langle u, w \rangle_{\alpha_{\beta'}} + k\langle v, w \rangle_{\alpha_{\beta'}}) = \varphi_{\beta'}(p(u))\langle u, w \rangle_{\alpha_{\beta'}} + k\varphi_{\beta'}(p(v))\langle v, w \rangle_{\alpha_{\beta'}} = \langle u, w \rangle_E + k\langle v, w \rangle_E$ .

- $\langle v, v \rangle_E \geq 0$  e  $\langle v, v \rangle_E = 0$  se e somente se  $v = 0$

Observe que  $\langle v, v \rangle_E \geq 0$  pois se  $b = p(v) \in U_{\alpha_{\beta'}}$  e se  $h_{\alpha_{\beta'}} = (b, v')$ , então  $\langle v, v \rangle_E = \varphi_{\beta'}(p(v))\langle v', v' \rangle_{\alpha_{\beta'}}$ . Temos que  $\varphi_{\beta'}(p(v)) \geq 0$  em geral, e, como  $\sum_{\beta} \varphi_{\beta}(v) = 1$ , neste caso temos  $\varphi_{\beta'}(v) > 0$ . Observe que, se  $b$  estivesse em mais de um aberto, para algum  $\beta''$  o valor deveria ser maior que zero para a soma ser um. Além disso,  $\langle v', v' \rangle \geq 0$  onde  $\langle v', v' \rangle = 0$  se e somente se  $v' = 0$ . Como as restrições a fibras de trivializações locais são isomorfismos vetoriais,  $v' = 0$  se e somente se  $v$  é o elemento neutro de  $p^{-1}(b)$ . Portanto,  $\langle v, v \rangle_E \geq 0$  e vale a igualdade se e somente se  $v = 0$ .

□

**Observação 1.2.12.** É possível definir de forma semelhante produto interno para fibrados vetoriais complexos. A diferença é que  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \oplus E \rightarrow \mathbb{R}$  será um mapa que, em cada fibra, se restringe a um produto interno complexo. Isto é, não temos mais que  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ . Mas sim,  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ .

A demonstração do teorema anterior segue o mesmo processo: tomando o pullback do produto interno canônico em  $\mathbb{C}^n$  através de trivializações locais. Assim, as propriedades do produto interno no fibrado seguirão das propriedades do produto interno canônico.

**Definição 1.2.13** (Subfibrado vetorial). Dado  $p : E \rightarrow B$  um fibrado vetorial e  $E_0 \subset E$ , dizemos que  $E_0$  é subfibrado vetorial de  $p : E \rightarrow B$  se, para todo  $b \in B$ ,  $p^{-1}(b) \cap E_0$  é um subespaço vetorial e, além disso, se  $p|_{E_0}$  é um fibrado vetorial.

**Proposição 1.2.14.** Sejam  $p : E \rightarrow B$  um fibrado vetorial cuja base  $B$  é paracompacta Hausdorff e  $E_0 \subset E$  um subfibrado vetorial. Então existe um subfibrado vetorial  $E_0^\perp \subset E$  tal que  $E_0 \oplus E_0^\perp \approx E$ .

**Demonstração:** Como a base é paracompacta Hausdorff, de acordo com a Proposição 1.2.11, pode-se definir um produto interno em  $E$ . A partir deste produto interno, definimos o espaço de vetores ortogonais a  $E_0$  como  $E_0^\perp = \{v \in E \mid \langle v, w \rangle = 0 \text{ para todo } w \in E_0, w \neq 0\}$ . Mostremos que  $E_0^\perp$  é o subfibrado vetorial que gostaríamos de encontrar.

Para verificar que  $E_0^\perp$  satisfaz a trivialidade local, primeiro passo é notar que podemos assumir que  $E$  é  $B \times \mathbb{R}^n$ , ou seja, que  $p : E \rightarrow B$  um fibrado trivial. É possível assumir isso sem perda de generalidade porque já há a informação de que, localmente, é possível cobrir  $B$  por abertos onde o fibrado  $p : E \rightarrow B$  assume trivialização local e somente gostaríamos de verificar uma condição local.

Seja  $p_1 = p|_{E_0} : E_0 \rightarrow B$  um fibrado vetorial de dimensão  $m$ , onde  $m < n$ , com  $n$  dimensão do fibrado  $p : E \rightarrow B$ . Por definição, existe uma cobertura  $(U_\alpha)_\alpha$  de  $B$  responsável pelas trivializações locais do fibrado  $p_1 : E_0 \rightarrow B$ . Nessa cobertura, fixado um aberto  $U_\alpha$  qualquer, pelo Lema 1.1.9, existem  $m$  seções  $s_1, s_2, \dots, s_m$  tais que  $\{s_1(b), s_2(b), \dots, s_m(b)\}$  é conjunto linearmente independente em  $p^{-1}(b)$  para todo  $b \in U_\alpha$ .

É possível aumentar esse conjunto de seções que formam conjuntos linearmente independentes em  $p^{-1}(b)$ , pois o fibrado  $p : E \rightarrow B$  tem dimensão  $n > m$  e estamos supondo que  $E$  é trivial. Portanto, adicionando  $s_{m+1}, \dots, s_n$  convenientes,  $\{s_1(b), s_2(b), \dots, s_m(b), s_{m+1}(b), \dots, s_n(b)\}$  é conjunto linearmente independente para todo  $b \in U_\alpha$ .

Aplicamos o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para o conjunto  $\{s_1, \dots, s_n\}$ . Seja o produto interno no espaço dos mapas contínuos definido pelo mapa  $\langle f_1, f_2 \rangle(x) = \langle f_1(x), f_2(x) \rangle_\alpha$ , onde este é o produto interno em  $p^{-1}(U_\alpha)$  que é pullback do produto interno canônico em  $\mathbb{R}^n$ , assim como definido na demonstração da Proposição 1.2.11.

Este realmente é um produto interno no espaço das seções pois, denotando por 0 a função nula,

- $\langle f, f \rangle \geq 0$  e  $\langle f, f \rangle = 0$  se e somente se  $f = 0$ , uma vez que  $\langle f, f \rangle(x) = \langle f(x), f(x) \rangle_\alpha$ , onde  $\langle f(x), f(x) \rangle_\alpha \geq 0$  para todo  $x \in U_\alpha$ . Além disso,  $\langle f(x), f(x) \rangle_\alpha = 0$  se e somente se  $f(x) = 0$ , o que implica que  $\langle f, f \rangle = 0$  se e somente se  $f(x) = 0$  para todo  $x \in B$ , como gostaríamos de mostrar.

- A ordem das funções no produto interno resulta no mesmo valor pois  $\langle f, g \rangle(x) = \langle f(x), g(x) \rangle_\alpha = \langle g(x), f(x) \rangle_\alpha = \langle g, f \rangle(x)$  para todo  $x \in U_\alpha$ .

- E por fim, a linearidade segue de, para todas as seções  $f_1, f_2$  e  $g$  valer  $\langle f_1 + \gamma f_2, g \rangle(x) = \langle (f_1 + \gamma f_2)(x), g(x) \rangle_\alpha = \langle f_1(x) + \gamma f_2(x), g(x) \rangle_\alpha = \langle f_1(x), g(x) \rangle_\alpha + \gamma \langle f_2(x), g(x) \rangle_\alpha = \langle f_1, g \rangle(x) + \gamma \langle f_2, g \rangle(x)$  para todo  $x \in U_\alpha$ . Assim,  $\langle f_1 + \gamma f_2, g \rangle = \langle f_1, g \rangle + \gamma \langle f_2, g \rangle$ , como queríamos.

Com este produto interno, é possível definir:

- $s'_1 = s_1$

- $s'_2 = s_2 - \frac{\langle s_2, s'_1 \rangle}{\langle s'_1, s'_1 \rangle} s'_1$  e  $s'_2(b) = s_2(b) - \frac{\langle s_2(b), s'_1(b) \rangle_\alpha}{\langle s'_1(b), s'_1(b) \rangle_\alpha} s'_1(b)$  para todo  $b \in U_\alpha$ .

...

- $s'_n = s_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle s_n, s'_i \rangle}{\langle s'_i, s'_i \rangle} s'_i$  e  $s'_n(b) = s_n(b) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle s_n(b), s'_i(b) \rangle_\alpha}{\langle s'_i(b), s'_i(b) \rangle_\alpha} s'_i(b)$

Observe que isso é o mesmo que realizar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para os conjuntos  $\{s_1(b), s_2(b), \dots, s_n(b)\}$  para todo  $b \in U_\alpha$ . Portanto, depois da ortogonalização, obtemos um novo conjunto  $\{s'_1, \dots, s'_n\}$  de mapas tais que  $\{s'_1(b), \dots, s'_n(b)\}$  é conjunto ortogonal e linearmente independente em  $p^{-1}(b)$  para todo  $b \in U_\alpha$ . Além disso,  $\{s'_1(b), \dots, s'_m(b)\}$  é conjunto ortogonal e linearmente independente em  $p_1^{-1}(b) = p^{-1}(b) \cap E_0$  para todo  $b \in U_\alpha$ , o que implica que  $\{s'_{m+1}(b), \dots, s'_n(b)\}$  é conjunto linearmente independente em  $p^{-1}(b) \cap E_0^\perp$  para todo  $b \in U_\alpha$ .

Defina  $p_2 = p|_{E_0^\perp} : E_0^\perp \rightarrow B$ . Temos  $p_2^{-1}(b) = p^{-1}(b) \cap E_0^\perp$ , que é um espaço vetorial pois é subespaço vetorial de  $p^{-1}(b)$ . De fato, se  $v, w \in p^{-1}(b) \cap E_0^\perp$  e  $\gamma \in \mathbb{R}$ , então  $v + \gamma w \in E_0^\perp$  pois  $\langle v + \gamma w, x \rangle = \langle v, x \rangle + \gamma \langle w, x \rangle = 0$  para todo  $x \in E_0$ .

Novamente, dado que já  $n - m$  seções linearmente independentes nos espaços vetoriais  $p_2^{-1}(b)$  para todo  $b \in U_\alpha$ , com  $U_\alpha$  aberto qualquer da cobertura  $(U_\alpha)_\alpha$ , pelo Lema 1.1.9, concluímos que  $p_2 : E_0^\perp \rightarrow B$  é localmente trivializável e, portanto, é fibrado vetorial.

Falta concluir que  $E_0 \oplus E_0^\perp \approx E$

Denotemos  $p_1 = p|_{E_0} : E_0 \rightarrow B$  e  $p_2 = p|_{E_0^\perp} : E_0^\perp \rightarrow B$  os subfibrados vetoriais de  $p : E \rightarrow B$  anteriormente apresentados. O mapa  $\psi : E_0 \oplus E_0^\perp \rightarrow E$  definido por  $\psi(x, y) = x + y$ , com  $x \in p_1^{-1}(b)$  e  $y \in p_2^{-1}(b)$  para algum  $b \in B$ , é tal que, restrito a fibras, é isomorfismo linear. Ou seja,  $\psi|_{p_1^{-1}(b) \times p_2^{-1}(b)} : p_1^{-1}(b) \times p_2^{-1}(b) \rightarrow p^{-1}(b)$  é isomorfismo vetorial para todo  $b \in B$ . Verifiquemos que isto é verdade a seguir:

- O mapa  $\psi|_{p_1^{-1}(b) \times p_2^{-1}(b)}$  realmente está bem definido para todo  $b \in B$  pois se  $x \in p_1^{-1}(b)$  e  $y \in p_2^{-1}(b)$ , então também vale que  $x \in p^{-1}(b)$  e  $y \in p^{-1}(b)$ . Como  $p^{-1}(b)$  é espaço vetorial, é possível concluir que  $x + y$  continua em  $p^{-1}(b)$ .

- De fato, essa restrição de  $\psi$ , qualquer que seja  $b \in B$ , é sobrejetiva. Se parando em casos, para todo  $v \in p^{-1}(b)$ , pode ocorrer  $v \in E_0$  e portanto  $v$  é soma dele mesmo com o elemento neutro da fibra em  $E_0^\perp$ . Caso  $v \notin E_0$  pode ocorrer  $v \in E_0^\perp$  e portanto  $v$  é a soma do elemento neutro da fibra em  $E_0$  com ele mesmo. E, por fim, caso  $v \notin E_0$  e  $v \notin E_0^\perp$ ,  $v$  é combinação linear de elementos ou em  $E_0$  ou em  $E_0^\perp$ . Vejamos que realmente é possível formar base só com elementos de  $E_0$  e de  $E_0^\perp$ : dada uma base ortogonal de  $p^{-1}(b) \cap E_0$  (que existe pois é espaço vetorial de dimensão finita), é possível completar essa base a uma base de  $p^{-1}(b)$  e, em seguida, ortogonalizá-la pelo processo de Gram-Schmidt. Utilizando este processo, a nova base será formada pelos mesmos elementos da base ortogonal de  $p^{-1}(b) \cap E_0$  tomados inicialmente com mais

vetores acrescentado durante o completamento pertencentes a  $E_0^\perp$ .

- A linearidade é direta:  $\psi_{p_1^{-1}(b) \times p_2^{-1}(b)}((x_1, x_2) + \alpha(y_1, y_2)) = (x_1 + \alpha y_1, x_2 + \alpha y_2) = (x_1 + \alpha y_1) + \alpha(y_1, y_2) + \psi_{p_1^{-1}(b) \times p_2^{-1}(b)}(x_1, x_2) + \alpha \psi_{p_1^{-1}(b) \times p_2^{-1}(b)}(y_1, y_2)$ .

- A injetividade segue de:  $\psi|_{p_1^{-1}(b) \times p_2^{-1}(b)}(x_1, x_2) = \psi|_{p_1^{-1}(b) \times p_2^{-1}(b)}(y_1, y_2) \Rightarrow x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \Rightarrow x_1 - y_1 = y_2 - y_1 \in p_1^{-1}(b) \cap p_2^{-1}(b)$ . Porém,  $p_1^{-1}(b) \cap p_2^{-1}(b) = (p^{-1}(b) \cap E_0) \cap (p^{-1}(b) \cap E_0^\perp) = 0$ , o que nos permite concluir que  $x_1 = y_1$  e  $x_2 = y_2$ , como queríamos.

Por fim, pelo Lema 1.1.8, é possível concluir que, uma vez que  $\psi$  é mapa que se restringe a isomorfismos vetoriais em cada fibra,  $\psi$  é isomorfismo entre fibrados. Portanto,  $E_0 \oplus E_0^\perp \approx E$ .

□

**Teorema 1.2.15.** *Para todo fibrado vetorial  $p : E \rightarrow B$  cuja base  $B$  é compacto Hausdorff, existe um fibrado  $p' : E' \rightarrow B$  tal que  $p \oplus p' : E \oplus E' \rightarrow B$  é fibrado trivializável.*

**Demonstração:** A ideia da demonstração é mostrar que  $E$  é isomorfo a subfibrado vetorial de um fibrado trivial. Como todo compacto Hausdorff é paracompacto, é possível utilizar a proposição anterior para concluir que existe  $E'$  cuja soma direta com  $E$  é isomorfa ao fibrado trivial.

Para todo  $b \in B$  existe uma vizinhança aberta  $U_b$  com  $h_b : p^{-1}(U_b) \rightarrow U_b \times \mathbb{R}^n$  trivialização local do fibrado vetorial  $p : E \rightarrow B$ . Os abertos  $U_b$  constituem uma cobertura de  $B$  com a propriedade que o fibrado  $p : E \rightarrow B$  é trivializável quando restrito a cada elemento dessa cobertura.

Como  $B$  é compacto Hausdorff, é possível concluir que  $B$  é normal. Utilizando o Lema de Urysohn, temos que, dados dois fechados não vazios  $F_1, F_2 \subset B$  quaisquer, existe uma função contínua  $f : B \rightarrow [0, 1]$  que, restrita a  $F_1$  é constante 0 e, restrita a  $F_2$ , é constante 1.

Escolhendo mais especificamente os fechados acima,  $F_2$  pode ser um fechado contido em  $U_b$  com  $b \in F_2$ , enquanto que  $F_1$  pode ser  $B \setminus U_b$ , que é fechado em  $B$  por ser complementar de aberto em  $B$ . Como dito anteriormente, existe mapa  $f_b : B \rightarrow [0, 1]$  tal que  $f_b(B \setminus U_b) = \{0\}$  e  $f_b(F_2) = \{1\}$ , em particular  $f_b(b) = 1$ .

Definindo  $f_x$  da mesma forma para cada  $x \in B$ , temos que  $\{f_x^{-1}(0, 1], x \in B\}$  é uma cobertura aberta de  $B$ , pois em cada  $f_x^{-1}(0, 1]$  há pelo menos  $x$  e, além disso,  $(0, 1]$  é aberto em  $[0, 1]$  o que, pela continuidade de  $f_x$ , implica que a pré imagem  $f_x^{-1}(0, 1]$  também deve ser aberta.

Como  $B$  é espaço compacto, a cobertura  $\{f_x^{-1}(0, 1], x \in B\}$  possui subcobertura finita. Renomeando as funções da subcobertura finita, obtemos o conjunto  $U = \{(U_i, f_i), i \in F\}$  onde  $F$  é conjunto finito com  $k$  elementos. O conjunto  $U$  consiste de pares formados pelos abertos  $U_x$  responsáveis pela trivialização local próxima de  $x$  e pelos mapas  $f_x$  presentes na subcobertura finita. Considere também para todo  $x$  tal que  $(U_x, f_x) \in U$ , a nova representação da trivialização local  $h_x : p^{-1}(U_x) \rightarrow U_x \times \mathbb{R}^n$  como  $h_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$  para algum  $i \in F$ .

Defina para todo  $i \in F$ , os  $k$  mapas  $g_i : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  por  $g_i(e) = f_i(p(e))(p_2(h_i(e)))$ , onde  $p_2 : U_i \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a projeção  $p_2(u, v) = v \in \mathbb{R}^n$  para todo  $(u, v) \in U_i \times \mathbb{R}^n$ . Note que  $g_i$  é uma injeção linear em cada fibra sobre o aberto  $f_i^{-1}(0, 1]$ :

Seja  $b \in f_i^{-1}(0, 1]$  qualquer. Para a fibra  $p^{-1}(b)$ , temos  $f_i(p(p^{-1}(b))) = \{f_i(b)\}$ , ou seja,  $f_i(p(x)) = f_i(b) \in (0, 1]$ , valor constante para todo  $x \in p^{-1}(b)$ . Além disso,  $h_i|_{p^{-1}(b)} : p^{-1}(b) \rightarrow \{b\} \times \mathbb{R}^n$  é um isomorfismo linear.

É possível assim concluir que, para todo  $i \in I$ ,  $g_i$  é injeção linear em cada fibra sobre  $f_i^{-1}(0, 1] \subset U_i$ .

A construção desses  $k$  mapas  $g_i, i \in F$  permite também a construção do mapa  $g : E \rightarrow B \times \mathbb{R}^N$  com  $N = kn$  definido por  $g(e) = (p(e), g_1(e), g_2(e), \dots, g_k(e))$  para todo  $e \in E$ .

É possível concluir que  $g$  é injeção linear em cada fibra  $p^{-1}(b) \subset p^{-1}(U_i)$  por consequência de  $g_i$  ser injeção linear em cada uma dessas fibras para todo  $i \in F$ .

Seja  $\pi : B \times \mathbb{R}^N \rightarrow B$  um fibrado vetorial trivial e seja  $g : E \rightarrow B \times \mathbb{R}^N$  a injeção linear em cada fibra definida acima, ou seja,  $g$  leva  $p^{-1}(b)$  em  $\{b\} \times \mathbb{R}^N$  injetivamente e de forma linear. Isso implica que  $g(p^{-1}(b))$  é subespaço vetorial de  $\pi^{-1}(b)$ .

Note que  $E_0 = \bigcup_{b \in B} g(p^{-1}(b)) = g(E)$  é subfibrado vetorial do fibrado trivial  $\pi : B \times \mathbb{R}^N \rightarrow B$ , uma vez que  $\pi^{-1}(b) \cap g(E) = (\{b\} \times \mathbb{R}^n) \cap (g(p^{-1}(b))) = g(p^{-1}(b))$  de fato é subespaço vetorial de  $\pi^{-1}(b)$  e as trivializações locais de  $\pi|_{g(E)} : g(E) \rightarrow B$  são dadas pela cobertura  $\{f_i^{-1}(0, 1]\}$  de  $B$ , de forma que para cada  $f_i^{-1}(0, 1]$ , o mapa  $h'_i : \pi|_{g(E)}^{-1}(f_i^{-1}(0, 1]) \rightarrow f_i^{-1}(0, 1] \times \mathbb{R}^n$  definido pela projeção  $h'_i(b, v) = (b, v_i)$  onde  $b \in f_i^{-1}(0, 1], v \in \mathbb{R}^N, (b, v) \in (f_i^{-1} \times \mathbb{R}^N) \cap g(E)$  e  $v = (v_1, \dots, v_k)$  com  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  é homeomorfismo que se restringe a isomorfismos lineares em cada fibra.

A continuidade de  $h'_i$  e a linearidade em cada fibra são triviais. A injetividade também é simples de observar, pois se  $h'_i(b, v) = (b, v_i) = h'_i(b, v')$  com  $v \neq v'$ , teríamos que existem  $e, e' \in p^{-1}(b)$  distintos tais que  $g_i(e) = g_i(e')$ , um absurdo pois  $g_i$  é mapa injetivo.

A sobrejetividade de  $h'_i$  segue de:  $g_i(e) = f_i(p(e))(p_2(h_i(e)))$  e assim, para todo par  $(b, v) \in f_i^{-1}(0, 1] \times \mathbb{R}^n$ , temos  $f_i(b) \neq 0$  e, como  $h_i$  é isomorfismo vetorial entre  $p^{-1}(b)$  e  $\{b\} \times \mathbb{R}^n$ , sabemos que existe algum  $v' \in p^{-1}(b)$  tal que  $h_i(v') = (b, \frac{v}{f_i(b)})$ . Assim,  $g_i(v') = f_i(b)(p_2(b, \frac{v}{f_i(b)})) = f_i(b) \frac{v}{f_i(b)} = v$ . Dessa forma,  $h'_i(p(v')) = (b, g_1(v'), \dots, g_i(v') = v, \dots, g_k(v')) = (b, v) \in (f_i^{-1} \times \mathbb{R}^N) \cap g(E)$ , como queríamos, confirmando que  $g(E)$  é realmente subfibrado vetorial do fibrado trivial, por possuir trivializações locais.

Agora, note também que  $E_0 \approx E$  pois  $E_0 = g(E)$  é isomorfismo linear em cada fibra quando seu contradomínio é restrito apenas à imagem. O isomorfismo entre os fibrados segue de 1.1.8.

Pela proposição anterior 1.2.14, existe fibrado vetorial  $E'$  tal que  $E_0 \oplus E' \approx B \times \mathbb{R}^N$ . Note que, como  $E_0 \approx E$ , então  $E \oplus E' \approx B \times \mathbb{R}^N$ , como queríamos. Leia a seguir 1.2.16 para entender

melhor como a soma se comporta bem com isomorfismos.

□

**Observação 1.2.16.** Na demonstração anterior foi utilizado o fato de que, como  $E_0 \approx E$ , então  $E_0 \oplus E' \approx E \oplus E'$ .

De forma geral, se dados dois fibrados  $E_1$  e  $E_2$  com  $E_1 \approx E_2$ , então, dado outro fibrado  $F$  qualquer,  $E_1 \oplus F \approx E_2 \oplus F$ .

De fato, seja  $h : E_1 \rightarrow E_2$  homeomorfismo que se restringe a isomorfismo vetorial em cada fibra. Então o mapa  $h' : E_1 \oplus F \rightarrow E_2 \oplus F$  definido por  $h'(u, v) = (h(u), v)$  também é homeomorfismo que se restringe a isomorfismo vetorial em cada fibra.

Também vale  $F \oplus E_1 \approx F \oplus E_2$ , porque de forma geral, a soma comuta no espaço das classes de isomorfismo de fibrados vetoriais. Isto é, se  $A$  e  $B$  são fibrados vetoriais,  $A \oplus B \approx B \oplus A$ :  $g : A \oplus B \rightarrow B \oplus A$  definido por  $g(a, b) = (b, a)$  também é homeomorfismo que se restringe a isomorfismos vetoriais em cada fibra.

## 1.2.2 Produto

Nesta seção será definido o produto tensorial entre fibrados vetoriais e serão demonstradas algumas propriedades, que seguem das propriedades de produto tensorial para espaços vetoriais. Uma construção de produto tensorial para esses espaços pode ser vista na referência [5, p.258-p.259].

**Definição 1.2.17.** O produto tensorial entre fibrados vetoriais  $p_1 : E_1 \rightarrow B$  e  $p_2 : E_2 \rightarrow B$  é o fibrado vetorial com espaço total  $E_1 \otimes E_2$  definido como a união disjunta dos produtos tensoriais dos espaços vetoriais formados por cada fibra, isto é,  $E_1 \otimes E_2 = \bigsqcup_{b \in B} (p_1^{-1}(b) \otimes p_2^{-1}(b))$ . O fibrado é  $p : E_1 \otimes E_2 \rightarrow B$  que envia todos os pontos de  $p_1^{-1}(b) \otimes p_2^{-1}(b)$  em  $b$  para todo  $b \in B$ .

Este de fato é um fibrado vetorial. Verifiquemos as trivializações locais:

É possível primeiramente observar que dado  $b \in B$  qualquer, existe um aberto  $U$  vizinhança de  $b$  onde há trivializações locais para cada um dos dois fibrados vetoriais dados inicialmente:

$$h_i : p_i^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^{n_i} \text{ para } i = 1, 2.$$

Basta então definir em  $p_1^{-1}(U) \otimes p_2^{-1}(U)$  uma topologia que torne o mapa  $h = h_1 \otimes h_2 : p_1^{-1}(U) \otimes p_2^{-1}(U) \rightarrow U \times (\mathbb{R}^{n_1} \otimes \mathbb{R}^{n_2})$  um homeomorfismo.

**Observação 1.2.18.** O produto tensorial de mapas lineares  $f : U \rightarrow V$  e  $g : U' \rightarrow V'$  é simplesmente o mapa  $f \otimes g : U \otimes U' \rightarrow V \otimes V'$  tal que  $f \otimes g(u \otimes u') = f(u) \otimes g(u')$  para todos  $u \in U$  e  $u' \in U'$ .

**Observação 1.2.19.** É importante notar que a topologia a ser escolhida em  $p_1^{-1}(U) \otimes p_2^{-1}(U)$  é independente da escolha dos mapas  $h_i, i = 1, 2$ .

Em princípio, pode-se pensar que um mesmo ponto  $b \in B$  pode estar na intersecção de abertos distintos com seus respectivos mapas de trivialização local também distintos, o que levaria possivelmente a escolhas de topologia diferentes em  $p_1^{-1}(U) \otimes p_2^{-1}(U)$ . Entretanto, iremos mostrar que se uma topologia torna  $h_1 \otimes h_2$  um homeomorfismo, então qualquer outro  $h'_1 \otimes h'_2$  formado por outras trivializações locais  $h'_1$  e  $h'_2$  em alguma vizinhança de  $b$  também será homeomorfismo observando na intersecção do domínio dos dois mapas produto.

Efetivamente, se há duas trivializações locais em vizinhanças de um mesmo ponto

$$h_i : p_i^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^{n_i} \text{ e } h'_i : p_i^{-1}(V) \rightarrow V \times \mathbb{R}^{n_i}$$

então há um mapa  $g_i(b) \in GL_{n_i}(\mathbb{R})$  que representa a segunda coordenada do mapa que leva todo  $(b, v) \in h'_i(p_i^{-1}(b))$  para  $(b, g_i(b)(v)) \in h_i(p_i^{-1}(b))$ . Especificamente,  $h_i \circ h'^{-1}_i(b, v) = (b, g_i(b)(v))$ . De fato, isso segue de  $h_i$  ser mapa que leva fibra em fibra linearmente.

Assim, é fácil observar que cada  $g_i(b)$  é linear e bijeção.

Além disso, dessas propriedades segue que  $g_1(b) \otimes g_2(b) \in GL_{n_1 n_2}(\mathbb{R})$  é uma bijeção para cada  $b \in B$  e também temos que  $g_1 \otimes g_2 : U \cap V \rightarrow GL_{n_1 n_2}$  definido por

$$(g_1 \otimes g_2)(b) = g_1(b) \otimes g_2(b)$$

é um mapa contínuo, fato que pode ser notado por conta da comutatividade do seguinte diagrama:

Considere que  $\pi : (U \cap V) \times (\mathbb{R}^{n_1} \otimes \mathbb{R}^{n_2}) \rightarrow U \cap V$  é o fibrado vetorial trivializável de grau  $n_1 n_2$  definido por

$$\pi(b, v) = b \text{ para todo } (b, v) \in (U \cap V) \times (\mathbb{R}^{n_1} \otimes \mathbb{R}^{n_2})$$

e também considere que  $Id \times (g_1 \otimes g_2)$  é definido pelo mapa

$$Id \times (g_1 \otimes g_2)(b, v) = (b, (g_1 \otimes g_2)(b)(v)) \text{ para todo } (b, v) \in (U \cap V) \times (\mathbb{R}^{n_1} \otimes \mathbb{R}^{n_2})$$

que faz o diagrama comutar.

$$\begin{array}{ccccc}
& & (U \cap V) \times (\mathbb{R}^{n_1} \otimes \mathbb{R}^{n_2}) & & \\
& \nearrow^{h_1 \otimes h_2} & \downarrow \text{Id} \times (g_1 \otimes g_2) & \searrow^{\pi} & \\
p_1^{-1}(U \cap V) \times p_2^{-1}(U \cap V) & & & & U \cap V \\
& \searrow_{h'_1 \otimes h'_2} & \downarrow & \nearrow_{\pi} & \\
& & (U \cap V) \times (\mathbb{R}^{n_1} \otimes \mathbb{R}^{n_2}) & & 
\end{array}$$

Pela bijeção e linearidade de  $g_1(b) \otimes g_2(b)$ , assim como pela continuidade de  $g_1 \otimes g_2$ , segue do Lema 1.1.8 que de fato  $\text{Id} \times (g_1 \otimes g_2)$  é homeomorfismo, o que implica, pela comutatividade do diagrama, que  $h'_1 \otimes h'_2$  também é homeomorfismo nessa intersecção.

**Proposição 1.2.20** (Comutatividade). *Dados dois fibrados vetoriais  $p_1 : E_1 \rightarrow B$  e  $p_2 : E_2 \rightarrow B$  quaisquer, temos*

$$E_1 \otimes E_2 \approx E_2 \otimes E_1$$

**Demonstração:** Os dois fibrados vetoriais são  $E_1 \otimes E_2 = \bigsqcup_{b \in B} (p_1^{-1}(b) \otimes p_2^{-1}(b))$  e  $E_2 \otimes E_1 = \bigsqcup_{b \in B} (p_2^{-1}(b) \otimes p_1^{-1}(b))$ , cujas fibras são  $p_1^{-1}(b) \otimes p_2^{-1}(b)$  e  $p_2^{-1}(b) \otimes p_1^{-1}(b)$  respectivamente para todo  $b \in B$ . Para quaisquer espaços vetoriais  $A$  e  $B$ ,  $A \otimes B$  é isomorfo a  $B \otimes A$  através do isomorfismo que leva todo  $a \otimes b \in A \otimes B$  em  $b \otimes a \in B \otimes A$ .

Note que esse mapa é isomorfismo vetorial porque de fato leva base em base: para todos os vetores  $a$  em uma base de  $A$  e todos os  $b$  em uma base de  $B$ , vale que os vetores da forma  $a \otimes b$  formam base em  $A \otimes B$  e os vetores da forma  $b \otimes a$  formam base em  $B \otimes A$ .

Portanto,  $p_1^{-1}(b) \otimes p_2^{-1}(b)$  é isomorfo a  $p_2^{-1}(b) \otimes p_1^{-1}(b)$  para todo  $b \in B$  e por isso, utilizando o Lema 1.1.8, conclui-se que os fibrados  $E_1 \otimes E_2$  e  $E_2 \otimes E_1$  são isomorfos, como queríamos.  $\square$

**Proposição 1.2.21** (Associatividade). *Dados fibrados vetoriais  $p_1 : E_1 \rightarrow B$ ,  $p_2 : E_2 \rightarrow B$  e  $p_3 : E_3 \rightarrow B$  quaisquer, vale*

$$(E_1 \otimes E_2) \otimes E_3 \approx E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3)$$

**Demonstração:** Os espaços totais dos dois fibrados vetoriais são  $(E_1 \otimes E_2) \otimes E_3 = \bigsqcup_{b \in B} [(p_1^{-1}(b) \otimes p_2^{-1}(b)) \otimes p_3^{-1}(b)]$  e  $E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3) = \bigsqcup_{b \in B} [p_1^{-1}(b) \otimes (p_2^{-1}(b) \otimes p_3^{-1}(b))]$  cujas fibras são  $(p_1^{-1}(b) \otimes p_2^{-1}(b)) \otimes p_3^{-1}(b)$  e  $p_1^{-1}(b) \otimes (p_2^{-1}(b) \otimes p_3^{-1}(b))$ , respectivamente para todo  $b \in B$ . De forma semelhante à demonstração da proposição anterior, vale para quaisquer espaços vetoriais  $A$ ,  $B$  e  $C$  que  $(A \otimes B) \otimes C$  é isomorfo a  $A \otimes (B \otimes C)$  através do isomorfismo vetorial que leva  $(a \otimes b) \otimes c \in (A \otimes B) \otimes C$  para  $a \otimes (b \otimes c) \in A \otimes (B \otimes C)$ .

Note que esse mapa é isomorfismo vetorial porque de fato leva base em base: para todos os vetores  $a$  em uma base de  $A$ , todos os  $b$  em uma base de  $B$  e todos  $c$  em uma base de  $C$ , vale que os vetores da forma  $(a \otimes b) \otimes c$  formam base em  $(A \otimes B) \otimes C$  e os vetores da forma  $a \otimes (b \otimes c)$  formam base em  $A \otimes (B \otimes C)$ .

Portanto, há isomorfismo vetorial entre as fibras dois dois fibrados vetoriais em questão e assim, pelo Lema 1.1.8, os dois fibrados são isomorfos como queríamos. □

**Proposição 1.2.22** (Distributividade). *Dados fibrados vetoriais  $p_1 : E_1 \rightarrow B$ ,  $p_2 : E_2 \rightarrow B$  e  $p_3 : E_3 \rightarrow B$  quaisquer, segue a distributividade em ambos os lados:*

$$E_1 \otimes (E_2 \oplus E_3) \approx (E_1 \otimes E_2) \oplus (E_1 \otimes E_3)$$

$$(E_1 \oplus E_2) \otimes E_3 \approx (E_1 \otimes E_3) \oplus (E_2 \otimes E_3)$$

**Demonstração:** Será provado o primeiro caso e o segundo é análogo. Considere o espaço vetorial  $E_1 \otimes (E_2 \oplus E_3)$ , cujo espaço total é a união do produto tensorial das fibras de cada um, ou seja, o espaço total é  $\bigsqcup_{b \in B} [p_1^{-1}(b) \otimes (p_2^{-1}(b) \times p_3^{-1}(b))] = \bigsqcup_{b \in B} [p_1^{-1}(b) \otimes (p_2^{-1}(b) \oplus p_3^{-1}(b))]$  pois a soma direta e o produto direto de espaços vetoriais aqui têm o mesmo efeito para as fibras, que possuem dimensão finita. Uma fibra deste fibrado em um ponto  $b \in B$  é  $p_1^{-1}(b) \otimes (p_2^{-1}(b) \oplus p_3^{-1}(b))$ . Considere também o fibrado vetorial  $(E_1 \otimes E_2) \oplus (E_1 \otimes E_3)$  cujo espaço total é  $[\bigsqcup_{b \in B} (p_1^{-1}(b) \otimes p_2^{-1}(b))] \oplus [\bigsqcup_{b \in B} (p_1^{-1}(b) \otimes p_3^{-1}(b))]$  e todas as suas fibras para  $b \in B$  qualquer são  $(p_1^{-1}(b) \otimes p_2^{-1}(b)) \times (p_1^{-1}(b) \otimes p_3^{-1}(b)) = (p_1^{-1}(b) \otimes p_2^{-1}(b)) \oplus (p_1^{-1}(b) \otimes p_3^{-1}(b))$ .

Resgatando o fato de álgebra linear que diz que, para quaisquer espaços vetoriais  $A$ ,  $B$  e  $C$  temos que  $A \otimes (B \oplus C)$  é isomorfo a  $(A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$ .

De fato, considere que  $\{e_\alpha, \alpha \in I\}$  é base de  $A$ ,  $\{f_\beta, \beta \in J\}$  é base de  $B$  e  $\{g_\gamma, \gamma \in K\}$  é base de  $C$ , com  $I, J, K$  finitos. Note que há isomorfismo canônico entre  $B \oplus C$  e  $B \times C$ , pois  $B$  e  $C$  possuem dimensão finita e então pode-se considerar que a base de  $B \oplus C$  é  $\{(f_\beta, 0), \beta \in J\} \cup \{(0, g_\gamma), \gamma \in K\}$ , segue que  $\bigcup_{\alpha \in I, \beta \in J, \gamma \in K} \{e_\alpha \otimes (f_\beta, 0), e_\alpha \otimes (0, g_\gamma)\}$  é base de  $A \otimes (B \oplus C)$ .

Também temos que a base de  $(A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$  é  $\bigcup_{\alpha \in I, \beta \in J, \gamma \in K} \{(e_\alpha \otimes f_\beta, 0), (0, e_\alpha \otimes g_\gamma)\}$  pois as dimensões de  $A \otimes B$  e de  $A \otimes C$  também são finitas.

Assim, basta tomar o mapa que leva todo  $a \otimes (b, c) \in A \otimes (B \oplus C)$  em  $(a \otimes b, a \otimes c) \in (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$  para construir um isomorfismo vetorial entre os dois espaços vetoriais, pois ele leva base em base de forma bijetiva:  $e_\alpha \otimes (f_\beta, 0_C)$  é levado em  $(e_\alpha \otimes f_\beta, e_\alpha \otimes 0_C) = (e_\alpha \otimes f_\beta, 0)$  e  $e_\alpha \otimes (0_B, g_\gamma)$  é levado em  $(e_\alpha \otimes 0_B, e_\alpha \otimes g_\gamma) = (0, e_\alpha \otimes g_\gamma)$  para quaisquer elementos da base, como queríamos.

Assim, pode-se concluir que há isomorfismo vetorial entre as fibras dos dois fibrados vetoriais em questão. Portanto, pelo Lema 1.1.8, os dois fibrados são isomorfos.  $\square$

**Proposição 1.2.23.** *Esse produto possui uma identidade, chamada de **fibrado linha trivial**, isto é, o mapa  $p : B \times \mathbb{R} \rightarrow B$  que é projeção na base  $B$ .*

**Demonstração:** Dado qualquer fibrado vetorial  $p' : E \rightarrow B$ , o fibrado produto é  $p : (B \times \mathbb{R}) \otimes E \rightarrow B$  que envia todos os pontos de  $p^{-1}(b) \otimes p'^{-1}(b)$  em  $b$  para todo  $b \in B$ . Mas  $p^{-1}(b) \otimes p'^{-1}(b) = (\{b\} \times \mathbb{R}) \otimes p'^{-1}(b)$ . Como  $\dim((\{b\} \times \mathbb{R}) \otimes p'^{-1}(b)) = \dim(\mathbb{R})\dim(p'^{-1}(b)) = \dim(p'^{-1}(b))$ , pode-se concluir que a fibra do fibrado produto  $\{b\} \times \mathbb{R} \otimes p'^{-1}(b)$  é isomorfa a  $p'^{-1}(b)$  para todo  $b \in B$ . Pelo Lema 1.1.8, pode-se concluir que o fibrado que resulta desse produto tensorial é isomorfo ao próprio  $p' : E \rightarrow B$ .  $\square$

**Proposição 1.2.24.** *Este produto possui um elemento nulo, que é o fibrado  $p : B \times \mathbb{R}^0 = B \times \{0\} \rightarrow B$  que é projeção na base  $B$ .*

**Demonstração:** Dado qualquer fibrado vetorial  $p' : E \rightarrow B$ , o fibrado produto é  $p : (B \times \mathbb{R}) \otimes E \rightarrow B$  que envia todos os pontos de  $p^{-1}(b) \otimes p'^{-1}(b)$  em  $b$  para todo  $b \in B$ . Mas  $p^{-1}(b) \otimes p'^{-1}(b) = (\{b\} \times \{0\}) \otimes p'^{-1}(b)$ , cuja dimensão é zero. Portanto, assim como na proposição anterior, cada fibra do produto é isomorfa à fibra do elemento neutro correspondente e, pelo Lema 1.1.8, pode-se também concluir que o fibrado vetorial produto é isomorfo a  $p : B \times \mathbb{R}^0 = B \times \{0\} \rightarrow B$ .  $\square$

## 1.3 Classificação de fibrados vetoriais

Nesta seção o objetivo será classificar os fibrados vetoriais dependendo do espaço base que eles possuem. Inicialmente, será introduzido o fibrado pullback e concluiremos que todo fibrado vetorial com uma base paracompacta contrátil é trivializável. Em seguida, serão apresentadas as funções de colagem, que serão importantes para a demonstração do Teorema da Periodicidade de Bott.

### 1.3.1 Pullback de fibrados vetoriais

**Proposição 1.3.1.** *Dada uma função contínua  $f : A \rightarrow B$  qualquer e um fibrado vetorial  $p : E \rightarrow B$ , existe um fibrado vetorial  $p' : E' \rightarrow A$  para algum espaço total  $E'$  e existe um mapa  $f' : E' \rightarrow E$  que se restringe a um isomorfismo entre a fibra de  $a$  e a fibra de  $f(a)$  para todo  $a \in A$ , ou seja,  $f'$  é tal que  $f'|_{(p')^{-1}(a)} : (p')^{-1}(a) \rightarrow p^{-1}(f(a))$  é isomorfismo. Além disso, o fibrado  $p' : E' \rightarrow A$ , é o único que satisfaz essas condições a menos de isomorfismo*

**Demonstração:** Considere, explicitamente,  $E' = \{(a, v) \in A \times E \mid f(a) = p(v)\}$ ,  $p'(a, v) = a$  e  $f'(a, v) = v$ . Basta mostrar que  $p'$  é fibrado vetorial e que  $f'$  se restringe a isomorfismos entre fibras, como enunciado.

Sejam  $\Gamma = \{(a, f(a)), a \in A\}$  o gráfico da função  $f$ ,  $Id \times p : E' \rightarrow \Gamma$ , definido por  $Id \times p(a, v) = (a, p(v)) = (a, f(a))$  e  $\rho : \Gamma \rightarrow A$  definido por  $\rho(a, f(a)) = a$ .

Pode-se concluir que  $p'$  é a composição de  $\rho$  com a restrição do fibrado vetorial  $(Id \times p)$  sobre o gráfico de  $f$ , isto é,  $p' = \rho \circ (Id \times p)|_{\Gamma}$  onde a restrição é simplesmente  $(Id \times p)|_{\Gamma} : (Id \times p)^{-1}(\Gamma) \rightarrow \Gamma$ .

Assim,  $p'$  é composição do homeomorfismo  $\rho$  com a restrição do fibrado vetorial  $g = (Id \times p)$ , que é fibrado vetorial. Pode-se assim concluir que  $p'$  também deve ser fibrado vetorial.

Observação: toda restrição de fibrado vetorial é fibrado vetorial. As fibras permanecem sendo os mesmos espaços vetoriais e, cada trivialização  $h : g^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$  do fibrado original pode ser restrita aos abertos  $U \cap \Gamma$  da restrição, de forma que  $h' : g^{-1}(U \cap \Gamma) \rightarrow (U \cap \Gamma) \times \mathbb{R}^n$  também é trivialização local.

O mapa  $f'$ , por sua vez, de fato se restringe a isomorfismos entre cada fibra pois leva  $(a, u) \in p'^{-1}(a) = \{(a, v) \in \{a\} \times E \mid p(v) = f(a)\} = \{a\} \times p^{-1}(f(a))$  em  $u \in p^{-1}(f(a))$ , operação linear bijetora.

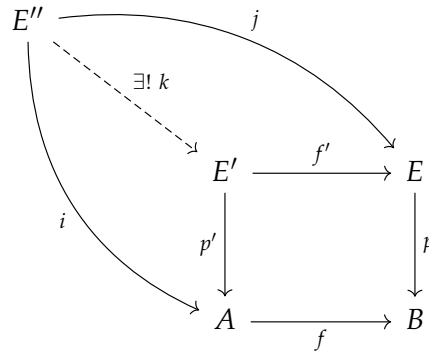
Note que de fato  $E'$  é único a menos de isomorfismo pois, supondo que exista outro fibrado vetorial  $p'' : E'' \rightarrow A$  com um mapa  $f'' : E'' \rightarrow E$  nas mesmas condições do enunciado, seria possível construir o isomorfismo  $\varphi : E'' \rightarrow E'$  definido por

$$\varphi(v) = (p''(v), f''(v)).$$

Como  $f''$  leva fibra em fibra isomorficamente, a restrição de  $\varphi$  a cada fibra é de fato um isomorfismo vetorial e,  $\varphi$  de fato é um isomorfismo de fibrados vetoriais pelo Lema 1.1.8.

□

**Observação 1.3.2.** [Propriedade Universal do Pullback] Observe que  $E'$  junto com os mapas  $f' : E' \rightarrow E$  e  $p' : E' \rightarrow A$  como definidos acima respeitam a propriedade universal do pullback, que diz que se qualquer outro espaço  $E''$  juntamente com morfismos  $i : E'' \rightarrow A$  e  $j : E'' \rightarrow E$  respeitam  $p \circ j = f \circ i$ , então existe único  $k : E'' \rightarrow E'$  tal que  $f' \circ k = j$  e  $p' \circ k = i$ .



De fato, se  $E'$  é como foi definido na demonstração anterior, temos que naturalmente vale  $p \circ f' = f \circ p'$  pois para todo elemento de  $E' = \{(a, v) \in A \times E \mid f(a) = p(v)\}$ , utilizando  $p'(a, v) = a$  e  $f'(a, v) = v$ , temos  $p \circ f'(a, v) = p(v) = f(a) = f \circ p'(a, v)$  para todo  $(a, v) \in E'$ . Ou seja, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f'} & E \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

De forma geral, para qualquer  $E''$  com morfismos  $i$  e  $j$  que respeitem a proposição anterior, para todo  $x \in E''$ , temos  $x \in i^{-1}(a)$  para algum  $a \in A$  e  $j$  leva  $i^{-1}(a)$  para  $p^{-1}(f(a))$  isomorficamente, ou seja,  $f \circ i(x) = f(a) = p \circ j(x)$  para todo  $x \in E''$ . Ou seja, se  $E''$ ,  $i$  e  $j$  são quaisquer que satisfazem as condições da Proposição 1.3.1, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} E'' & \xrightarrow{j} & E \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Perceba que pode-se definir  $k : E'' \rightarrow E'$  como  $k(x) = (i(x), j(x))$ , que valerá  $f' \circ k = j$  e  $p' \circ k = i$

E, se houver outra função  $q : E'' \rightarrow E'$ ,  $q(x) = (q_1(x), q_2(x))$  com  $f' \circ q = j$  e  $p' \circ q = i$ , temos:  $j(x) = f' \circ q(x) = f'(q_1(x), q_2(x)) = q_2(x)$  e  $i(x) = p' \circ q(x) = p'(q_1(x), q_2(x)) = q_1(x)$  para todo  $x \in E''$ . Portanto,  $q = k$ .

Mostramos assim que vale a Propriedade Universal do Pullback. Além disso, temos a informação adicional de que se  $E''$  satisfaz as condições da proposição, o quadrado ao qual ele pertence comuta.

Uma notação importante a ser utilizada nos próximos resultados é  $Vect^n(B)$ , que é o **conjunto das classes de isomorfismo dos fibrados vetoriais de dimensão  $n$** .

**Observação 1.3.3.** Da unicidade da Proposição 1.3.1, pode-se concluir que existe uma função bem definida  $f^* : Vect^n(B) \rightarrow Vect^n(A)$ . Dada uma função contínua  $f : A \rightarrow B$ ,  $f^*$  leva o fibrado vetorial  $p : E \rightarrow B$  no fibrado vetorial  $p' : E' \rightarrow A$  nas condições da proposição. Uma notação comum que simplifica muito a visualização, é  $f^*(E) = E'$ , e este é o **fibrado vetorial induzido por  $f$**  ou o **pullback de  $E$  por  $f$** .

**Proposição 1.3.4.** *Algumas propriedades dos pullbacks são os seguintes isomorfismos entre fibrados:*

1.  $(f_2 f_1)^*(E) \approx f_1^*(f_2^*(E))$
2.  $Id^*(E) \approx E$
3.  $f^*(E_1 \oplus E_2) \approx f^*(E_1) \oplus f^*(E_2)$
4.  $f^*(E_1 \otimes E_2) \approx f^*(E_1) \otimes f^*(E_2)$

**Demonstração:** Todas as demonstrações seguem da construção explícita do fibrado pullback feita na demonstração da Proposição 1.3.1:

1. Todo fibrado na classe de  $(f_2 f_1)^*E$  é isomorfo a  $F = \{(a, v) \in A \times E | f_2 f_1(a) = p(v)\}$ .

Todo fibrado na classe de  $f_2^*E$  é isomorfo a  $E' = \{(b, v) \in B \times E | f_2(b) = p(v)\}$ , e todo fibrado na classe de  $f_1^*(E')$  é isomorfo a  $E'' = \{(a, v') \in A \times E' | f_1(a) = p'(v')\} = \{(a, b, v) \in A \times E' | f_1(a) = b, \text{ onde } f_2(b) = p(v)\}$ .

Note que  $E''$  é isomorfo a  $F$  pelo isomorfismo  $f : E'' \rightarrow F$  definido por

$$f(a, b, v) = (a, v) \text{ para todo } (a, b, v) \in E''$$

$$\begin{array}{ccccc}
 E'' & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & E \\
 p'' \downarrow & & p' \downarrow & & \downarrow p \\
 A & \xrightarrow{f_1} & B & \xrightarrow{f_2} & C
 \end{array}$$

2. Todo fibrado na classe de  $Id^*E$  é isomorfo a  $E' = \{(b, v) \in B \times E | b = Id(b) = p(v)\}$ , que por sua vez é isomorfo a  $E$  pelo mapa  $f : E' \rightarrow E$  definido por

$$f(b, v) = v \text{ para todo } (b, v) \in E'$$

$$\begin{array}{ccc}
 E' & \xrightarrow{\varphi} & E \\
 p' \downarrow & & \downarrow p \\
 B & \xrightarrow{Id} & B
 \end{array}$$

3. Dados os mapas dos fibrados vetoriais  $p_1 : E_1 \rightarrow B$  e  $p_2 : E_2 \rightarrow B$ , um fibrado vetorial na classe de  $f^*(E_1 \oplus E_2)$  é isomorfo a  $F = \{(a, v_1, v_2) \in A \times E_1 \times E_2 \mid f(a) = p_1(v_1) = p_2(v_2)\}$ . Enquanto isso, um fibrado na classe de  $f^*(E_1)$  é isomorfo a  $F_1 = \{(a, v_1) \in A \times E_1 \mid f(a) = p_1(v_1)\}$ , um fibrado na classe de  $f^*(E_2)$  é isomorfo a  $F_2 = \{(a, v_2) \in A \times E_2 \mid f(a) = p_2(v_2)\}$  com  $F_1 \oplus F_2 = \{(a, v_1, a', v_2) \in A \times E_1 \times A \times E_2 \mid f(a) = p_1(v_1), f(a') = p_2(v_2), a = a'\}$ . A condição  $a = a'$  segue da soma de fibrados vetoriais, pois ambos os mapas dos fibrados  $F_1$  e  $F_2$  projetam em  $A$  e na soma esse valor precisa ser igual.

Assim,  $F$  é claramente isomorfo a  $F_1 \oplus F_2$  através do mapa  $g : F_1 \oplus F_2 \rightarrow F$  definido por

$$g(a, v_1, a, v_2) = (a, v_1, v_2) \text{ para todo } (a, v_1, a, v_2) \in F_1 \oplus F_2.$$

4. Dados dois fibrados vetoriais  $p_1 : E_1 \rightarrow B$  e  $p_2 : E_2 \rightarrow B$ , é possível tomar o fibrado vetorial  $E_1 \otimes E_2 = \bigcup_{b \in B} p_1^{-1}(b) \otimes p_2^{-1}(b)$  cujo mapa associado é  $p$ .

Qualquer fibrado na classe de  $f^*(E_1 \otimes E_2)$  é isomorfo ao fibrado  $F = \{(a, v \otimes w) \in A \times E_1 \otimes E_2 \mid f(a) = p(v \otimes w)\}$ .

Enquanto isso, o produto tensorial entre dois fibrados vetoriais nas classes de  $f^*E_1$  e de  $f^*E_2$ , isomorfos respectivamente a  $\{(a, v) \in A \times E_1 \mid f(a) = p_1(v)\}$  com o mapa do fibrado  $p'_1$  que projeta todos os pontos em  $A$  e a  $\{(a, w) \in A \times E_2 \mid f(a) = p_2(w)\}$  com o mapa do fibrado  $p'_2$  que também projeta todos os pontos em  $A$ , é  $G = \bigcup_{a \in A} p'^{-1}_1(a) \otimes p'^{-1}_2(a)$ .

O isomorfismo entre  $F$  e  $G$  é  $\varphi : F \rightarrow G$  definido por

$$\varphi(a, v \otimes w) = (a, v) \otimes (a, w) \text{ para todo } (a, v \otimes w) \in F.$$

□

**Lema 1.3.5.** *Seja  $X$  paracompacto Hausdorff. Dado um fibrado vetorial  $p : E \rightarrow X \times I$ , suas restrições a  $X \times \{0\}$  e a  $X \times \{1\}$  são isomorfas.*

**Demonstração:** Antes de provar este Lema, há duas observações importantes para serem feitas:

1. Um fibrado vetorial  $p : E \rightarrow X \times [a, b]$  é trivial se suas restrições a  $X \times [a, c]$  e a  $X \times [c, b]$

são triviais para algum  $c \in (a, b)$ .

Uma demonstração do fato acima é:

se há dois isomorfismos  $h_1 : p^{-1}(X \times [a, c]) \rightarrow X \times [a, c] \times \mathbb{R}^n$  e  $h_2 : p^{-1}(X \times [c, b]) \rightarrow X \times [c, b] \times \mathbb{R}^n$ , há duas alternativas: ou  $h_1$  e  $h_2$  são iguais na intersecção de seus domínios, isto é, apresentam o mesmo valor em  $p^{-1}(X \times \{c\})$  ou, pode-se substituir a escolha do isomorfismo  $h_2$ .

Tome por  $h'_2 = \varphi \circ h_2$  o nosso novo isomorfismo, onde  $\varphi : X \times [c, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow X \times [c, b] \times \mathbb{R}^n$  é isomorfismo definido por

$$\varphi(x, t, v) = (x, t, h_1 \circ h_2^{-1}(x, c, v)) \text{ para todo } (x, t, v) \in X \times [c, b] \times \mathbb{R}^n$$

Nesse caso, os dois mapas  $h'_2$  e  $h_1$  concordam em  $X \times \{c\}$  e, portanto, determinam um único isomorfismo  $h : p^{-1}(X \times [a, b]) \rightarrow X \times [a, b] \times \mathbb{R}^n$ , que é igual a  $h_1$  em  $p^{-1}(X \times [a, c])$  e igual a  $h'_2$  em  $p^{-1}(X \times [c, b])$ , como queríamos.

2. Dado um fibrado vetorial  $p : E \rightarrow X \times I$ , existe uma cobertura  $\{U_\alpha\}_\alpha$  de  $X$  tal que as restrições dos fibrados a  $p^{-1}(U_\alpha \times I)$  são triviais.

Uma demonstração do fato acima é:

Para todo  $x \in X$  existem vizinhanças  $U_{x,1}, U_{x,2}, \dots, U_{x,k}$  de  $x$  e uma partição de  $[0, 1]$   $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$  tal que o fibrado vetorial é trivial quando restrito a  $U_{x,i} \times [t_{i-1}, t_i]$  para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$  por haver trivializações locais que cobrem o fibrado. Note que a quantidade  $k$  é finita porque o intervalo  $I = [0, 1]$  é compacto, e, portanto, ao cobrir  $\{x\} \times I$  com abertos onde a restrição do fibrado a eles é trivial, é possível tomar subcobertura finita de  $\{x\} \times I$ , também compacto.

Utilizando o fato provado no item anterior, como há  $k$  isomorfismos  $h_i : p^{-1}(U_{x,i} \times [t_{i-1}, t_i]) \rightarrow U_{x,i} \times [t_{i-1}, t_i] \times \mathbb{R}^n$  para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ , pode-se concluir que há um único isomorfismo  $h : p^{-1}(U_\alpha \times I) \rightarrow U_\alpha \times I \times \mathbb{R}^n$  onde  $U_\alpha = \bigcap_{0 < i \leq k} U_{x,i}$ .

Portanto, há abertos  $(U_\alpha)$  que cobrem  $X$  de forma que a restrição do fibrado  $E$  a  $U_\alpha \times I$  é trivial, como queríamos.

Retornando de fato à demonstração da proposição:

Como  $X$  é paracompacto Hausdorff, será utilizado o seguinte fato de topologia geral: Dada uma cobertura aberta  $\{U_\alpha\}$  de  $X$ , existe uma cobertura  $\{V_k\}$  enumerável de abertos onde cada  $V_k$

é uma união disjunta de abertos, cada aberto contido em algum  $U_\alpha$  e ainda existe uma partição da unidade  $\{\varphi_k\}$  subordinada à cobertura  $\{V_k\}$  onde cada  $\varphi_k$  possui suporte contido em  $V_k$ .

Dessa forma, tome uma cobertura de  $X$  ( $U_\alpha$ ) de forma que toda restrição do fibrado  $p : E \rightarrow X \times I$  a  $U_\alpha \times I$  seja trivial. Note que essa cobertura existe pelo segundo item demonstrado antes do início da demonstração dessa proposição. Agora, tome  $\{V_k\}_{k \geq 1}$  cobertura enumerável nas condições do parágrafo anterior.

Assim, o fibrado vetorial  $E$  também deve ser trivial quando restrito a cada  $V_k \times I$ .

Defina  $\psi_k = \varphi_1 + \dots + \varphi_k$ , com  $\psi_0 = 0$ . Se  $X_k = \{(x, \psi_k(x)) \in X \times I\}$ , é possível considerar  $p_k = p|_{p^{-1}(X_k)} : p^{-1}(X_k) \rightarrow X_k$  a restrição do fibrado vetorial  $E$  enunciado ao espaço  $X_k$ , que é gráfico de  $\psi_k$ .

Defina também o isomorfismo de fibrados vetoriais  $h_i : p^{-1}(X_i) \rightarrow p^{-1}(X_{i-1})$  como no diagrama comutativo abaixo:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(X_i) & \xrightarrow{h_i} & p^{-1}(X_{i-1}) \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ X_i & \xrightarrow{f} & X_{i-1} \end{array}$$

$$(x, \psi_i(x)) \longmapsto f(x, \psi_i(x)) = (x, \psi_{i-1}(x))$$

Note que, como  $\psi_i$  pode diferir de  $\psi_{i-1}$  apenas para  $x \in V_i$  (pois o suporte de  $\varphi_i$  está contido em  $V_i$ ), então o isomorfismo de fibrados  $f$  só pode diferir da identidade na restrição do domínio a  $V_i \times I$ .

Assim,  $h_i$  é identidade quando restrito a  $p^{-1}(X_i \setminus (V_i \times I))$ , mas em  $p^{-1}(X_i \cap (V_i \times I))$  temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(X_i \cap (V_i \times I)) & \xrightarrow{h_i} & p^{-1}(X_{i-1} \cap (V_i \times I)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ ((V_i \times I) \cap X_i) \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{g} & ((V_i \times I) \cap X_{i-1}) \times \mathbb{R}^n \end{array}$$

$$(x, \varphi_i(x), v) \longmapsto g(x, \varphi_i(x), v) = (x, \varphi_{i-1}(x), v)$$

onde os mapas verticais são trivializações, já que os abertos  $V_k \times I$  foram escolhidos de forma a haver trivializações dos fibrados restritos a eles.

Construído dessa forma,  $h_i$  é tal que o diagrama inicial comuta e é uma trivialização local.

Assim, temos que a composição infinita  $h = h_1 \circ h_2 \circ \dots \circ h_m \circ \dots$  também é um isomorfismo por ser composição finita de isomorfismos em cada ponto. A composição de fato é finita em cada ponto porque, para cada  $x$ , existe um número finito  $m$  a partir do qual todas as  $\varphi_k$  zeram, isto é,  $\psi_m = 1$  pois, pelo espaço ser paracompacto, cada  $x \in X$  pertence a um número finito de abertos da cobertura  $(V_k)$ . No caso de  $x$ ,  $h = h_1 \circ h_2 \circ \dots \circ h_m$

Por fim, note que  $h$  leva  $p^{-1}(x \times \psi_m(x)) = p^{-1}(x \times \{1\})$  em  $p^{-1}(x \times \psi_0(x)) = p^{-1}(x \times \{0\})$ . Assim,  $h$  é um isomorfismo entre a restrição do fibrado  $E$  a  $X \times \{1\}$  e a restrição de  $E$  em  $X \times \{0\}$ .  $\square$

**Teorema 1.3.6.** *Seja  $A$  um espaço paracompacto Hausdorff. Dado um fibrado vetorial  $p : E \rightarrow B$ , se dois mapas  $f_0, f_1 : A \rightarrow B$  são homotópicos, então os fibrados vetoriais  $f_0^*(E)$  e  $f_1^*(E)$  são isomorfos.*

**Demonstração:** Se  $F : A \times I \rightarrow B$  é homotopia entre  $f_0$  e  $f_1$ , temos o mapa  $F^* : Vect^n(B) \rightarrow Vect^n(A \times I)$  leva uma classe de isomorfismo de fibrados vetoriais na classe do pullback deles conforme definido em 1.3.3.

Qualquer fibrado vetorial na classe de  $F^*(E)$  é isomorfo ao fibrado vetorial  $E' = \{(a, t, v) \in A \times I \times E | F(a, t) = p(v)\}$ , cujo mapa é a projeção em  $A \times I$ , denotada por  $p'$ .

Assim, a restrição desse fibrado a  $A \times \{0\}$  é  $\{(a, 0, v) \in A \times \{0\} \times E | F(a, 0) = p(v)\}$ , onde  $F(a, 0) = f_0(a)$ . Isto é, a restrição  $p' : E' \rightarrow A \times I$  a  $A \times \{0\}$  é o fibrado vetorial  $\{(a, 0, v) \in A \times \{0\} \times E | f_0(a) = p(v)\}$  isomorfo a  $\{(a, v) \in A \times E | f_0(a) = p(v)\} = f_0^*(E)$ .

Da mesma forma, pode-se dizer que a restrição de  $p' : E' \rightarrow A \times I$  a  $A \times \{1\}$  é  $\{(a, 1, v) \in A \times \{1\} \times E | F(a, 1) = p(v)\}$ , onde  $F(a, 1) = f_1(a)$ . Essa restrição, portanto, é o fibrado vetorial  $\{(a, 1, v) \in A \times \{1\} \times E | f_1(a) = p(v)\}$  isomorfo a  $\{(a, v) \in A \times E | f_1(a) = p(v)\} = f_1^*(E)$ .

Assim basta aplicar o Lema 1.3.5 para concluir que  $f_0^*(E) \approx f_1^*(E)$ .  $\square$

**Corolário 1.3.7.** *Sejam  $A$  e  $B$  espaços paracompactos Hausdorff. Toda  $f : A \rightarrow B$  que é uma equivalência de homotopia induz uma bijeção  $f^* : Vect^n(B) \rightarrow Vect^n(A)$ . Em particular, todo fibrado vetorial com base paracompacta Hausdorff contrátil é trivializável.*

**Demonstração:** Se  $f : A \rightarrow B$  é equivalência de homotopia, então existe  $g : B \rightarrow A$  tal que  $g \circ f$  é homotópico a  $Id_A$ , mapa identidade em  $A$ , e tal que  $f \circ g$  é homotópico a  $Id_B$ , mapa identidade em  $B$ .

Assim,  $(f^* \circ g^*)(E) \approx (g \circ f)^*(E)$  por propriedade da Proposição 1.3.4 e  $(g \circ f)^*(E) \approx (Id_A)^*(E)$  pelo Teorema 1.3.6 demonstrado anteriormente. Novamente por propriedade da Proposição 1.3.4, conclui-se  $(Id_A)^*(E) \approx E$ , isto é,  $(f^* \circ g^*)(E) \approx E$

Da mesma forma,  $(g^* \circ f^*)(E) \approx (f \circ g)^*(E) \approx (Id_B)^*(E) \approx E$ .

Concluimos assim que  $f^*$  de fato é bijeção, pois  $g^*$  é seu inverso.

Além disso, dado um fibrado  $p : E \rightarrow B$  com base  $B$  contrátil, isso significa existe uma equivalência de homotopia entre  $B$  e um espaço com um ponto.

Dessa forma, se  $f : B \rightarrow \{x_0\}$  é tal que existe  $g : \{x_0\} \rightarrow B$  com  $f \circ g$  homotópico a  $Id_{\{x_0\}}$  e  $g \circ f$  homotópico a  $Id_B$ .

$g \circ f$  é um mapa constante e, pelo processo anterior,  $(g \circ f)^*(E) \approx E$ . Mas,  $(g \circ f)^*(E) \approx \{(b, v) \in B \times E \mid g \circ f(b) = p(v)\} \approx B \times p^{-1}(g \circ f(b)) \approx B \times \mathbb{R}^n$ . Isto é,  $E$  é trivial, como queríamos □

### 1.3.2 Funções colagem

Considere a esfera  $S^k = \{(a_1, \dots, a_{k+1}), \sqrt{a_1^2 + \dots + a_{k+1}^2} = 1\}$ , com  $D_+^k = \{(a_1, \dots, a_{k+1}) \in S^k \mid a_{k+1} \geq 0\}$  e  $D_-^k = \{(a_1, \dots, a_{k+1}) \in S^k \mid a_{k+1} \leq 0\}$  os hemisférios norte e sul da esfera, respectivamente, de forma que  $D_+^k \cup D_-^k = S^k$  e  $D_+^k \cap D_-^k \cong S^{k-1}$

Dada uma função  $f : S^{k-1} \rightarrow GL_n(\mathbb{K})$ , onde  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  o fibrado vetorial cujo espaço total é o espaço  $E_f = D_+^k \times \mathbb{K}^n \sqcup D_-^k \times \mathbb{K}^n / \sim$ , onde  $(x, v) \sim (x, f(x)(v))$  para todo  $(x, v) \in (D_+^k \cap D_-^k) \times \mathbb{K}^n$  (os pontos onde  $D_+^k \times \mathbb{K}^n$  e  $D_-^k \times \mathbb{K}^n$  se intersectam são identificados).

A função  $f$  é denominada **função colagem** e  $p : E_f \rightarrow S^k$  é um fibrado vetorial que leva elementos de  $D_+^k \times \mathbb{K}^n$  na sua projeção em  $D_+^k$  e leva elementos de  $D_-^k \times \mathbb{K}^n$  na sua projeção em  $D_-^k$ . Em  $D_+^k \cap D_-^k$ , as fibras vão continuar tendo a mesma dimensão por conta da identificação por  $\sim$ , que também permite haver trivializações locais nesse equador de  $S^k$ . De fato, note que se  $x \in D_+^k \cap D_-^k$ , temos que  $p^{-1}(x) \approx (\{x\} \times \mathbb{K}^n)$  por conta da identificação  $\sim$ .

**Observação 1.3.8.** O fato de haver trivializações locais fica mais claro se forem tomadas vizinhanças  $D'_+$  e  $D'_-$  ligeiramente maiores de  $D_+^k$  e  $D_-^k$ , de forma que essas novas vizinhanças se intersectem em um espaço homeomorfo a  $S^{k-1} \times (-\epsilon, \epsilon)$  para  $\frac{1}{2} > \epsilon > 0$ . Assim, ficaria mais claro que a restrição do fibrado vetorial  $E_f$  a cada um desses abertos é trivial, uma vez que eles são contráteis e pode-se aplicar o Corolário 1.3.7.

Com essa nova construção, faria sentido definir a função colagem como  $f' = f \circ pr_{S^{k-1}} \circ \phi$ , onde  $pr_{S^{k-1}} : S^{k-1} \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S^{k-1}$  é a projeção em  $S^{k-1}$ ,  $\phi : D'_+ \cap D'_- \rightarrow S^{k-1} \times (-\epsilon, \epsilon)$  é homeomorfismo e  $f$  é a função colagem apresentada inicialmente.

De toda forma, as duas construções são equivalentes e basta definir  $f$  para a colagem  $f'$  também ser construída. Por isso, consideraremos somente  $S^k = D_+^k \cup D_-^k$  e  $f : S^{k-1} \rightarrow GL_n(\mathbb{K})$ .

**Lema 1.3.9.**  $E_f \approx E_g$  se  $f : S^{k-1} \rightarrow GL_n(\mathbb{K})$  e  $g : S^{k-1} \rightarrow GL_n(\mathbb{K})$  são homotópicos.

**Demonstração:** Se  $f$  e  $g$  são homotópicos, há  $H : S^{k-1} \times I \rightarrow GL_n(\mathbb{K})$  homotopia entre  $f$  e

g. Pela construção apresentada anteriormente de função colagem, é possível construir o fibrado vetorial  $E_H \rightarrow S^k \times I$ .

Explicitamente,  $E_H$  é  $D_+^k \times I \times \mathbb{K}^n \sqcup D_-^k \times I \times \mathbb{K}^n \rightarrow S^k \times I$ , que é uma projeção fora da interseção  $D_+^k \times I \cap D_-^k \times I$ . Na interseção, cada fibra de  $(x, t) \in D_+^k \times I \cap D_-^k \times I$  é o conjunto dos pontos de  $\{x\} \times \{t\} \times \mathbb{K}^n \sqcup \{x\} \times \{t\} \times \mathbb{K}^n$  identificados por  $h_t(x) = H(x, t) : (x, t, v) \sim (x, t, h_t(x)(v))$ .

Pelo Lema 1.3.5, sabemos que a restrição desse fibrado a  $S^k \times \{0\}$  é isomorfa à restrição do fibrado a  $S^k \times \{1\}$ .

De fato, a restrição de  $E_H \rightarrow S^k \times I$  a  $S^k \times \{0\}$  é  $D_+^k \times \{0\} \times \mathbb{K}^n \sqcup D_-^k \times \{0\} \times \mathbb{K}^n \rightarrow S^k \times \{0\}$ , com a identificação por  $H_0 = f$ . Isto é, a restrição é o próprio  $E_f$ . Da mesma forma, a restrição de  $E_H$  a  $S^k \times \{1\}$  é o próprio  $E_g$ . Portanto,  $E_f \approx E_g$ . □

**Proposição 1.3.10.** *O mapa  $\phi : [S^{k-1}, GL_n(\mathbb{C})] \rightarrow Vect_{\mathbb{C}}^n(S^k)$  tal que  $\phi([f]) = [E_f]$  é uma bijeção entre classes de homotopia de funções  $S^{k-1} \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$  e classes de isomorfismo de fibrados.*

**Demonstração:** Considerando o Lema 1.3.9 anterior, sabemos que  $\phi$  é mapa bem definido.

A ideia é construir um mapa  $\psi : Vect_{\mathbb{C}}^n(S^k) \rightarrow [S^{k-1}, GL_n(\mathbb{C})]$  que seja inverso de  $\phi$ .

Dada uma classe de isomorfismo de fibrados vetoriais  $[E]$ , considere o fibrado  $p : E \rightarrow S^k$ , tome suas restrições a  $D_+^k$  e  $D_-^k$ . Essas restrições são trivializáveis pelo Corolário 1.3.7 porque  $D_+^k$  e  $D_-^k$  são contráteis. Assim, chamando  $p^{-1}(D_+^k)$  de  $E_+$  e  $p^{-1}(D_-^k)$  de  $E_-$ , há os mapas de trivialização local  $h_+ : E_+ \rightarrow D_+^k \times \mathbb{C}^n$  e  $h_- : E_- \rightarrow D_-^k \times \mathbb{C}^n$ . Então, o mapa  $h_+ \circ h_-^{-1} : S^{k-1} \times \mathbb{C}^n \rightarrow S^{k-1} \times \mathbb{C}^n$ , é tal que leva todo  $(x, v) \in S^{k-1} \times \mathbb{C}^n$  em  $(x, v')$  linearmente, porque as trivializações locais são isomorfismos lineares em cada fibra. Isto é,  $(x, v') = (x, f_x(v))$  para algum mapa  $f_x \in GL_n(\mathbb{C})$ , que pode ser explicitado por  $f_x = h_+ \circ (h_-)^{-1}|_{\{x\} \times \mathbb{C}^n}$ .

Construímos assim, o mapa  $f : S^{k-1} \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$  definido por

$$f(x) = f_x \text{ para todo } x \in S^{k-1}.$$

Assim, se  $\psi$  leva  $[E]$  para  $[f]$ , se este mapa de fato estiver bem definido, será inverso de  $\phi$  por construção.

Para verificar a boa definição, basta notar o que acontece dadas duas escolhas distintas de trivializações  $h_-$  e de  $h_+$ , tanto no mesmo fibrado vetorial  $E$  como em algum fibrado vetorial  $F$  isomorfo a ele. Observemos com detalhes:

No caso  $h_+$  duas escolhas  $h_+^1 : E_+ \rightarrow D_+^k \times \mathbb{C}^n$  e  $h_+^2 : E_+ \rightarrow D_+^k \times \mathbb{C}^n$  de trivializações são dois mapas que diferem essencialmente por uma função  $h : D_+^k \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$  construída como

antes: leva  $x \in D_+^k$  em  $h_+^1 \circ (h_+^2)^{-1}|_{\{x\} \times \mathbb{C}^n}$ , uma composição de isomorfismos lineares, de fato em  $GL_n(\mathbb{C})$ .

Note que  $h$  tem domínio  $D_+^k$  contrátil e, portanto,  $h$  é homotópico a um mapa constante.

Além disso, note que  $GL_n(\mathbb{C})$  é conexo por caminhos por haver caminho entre quaisquer duas matrizes:

Dada uma matriz  $M \in GL_n(\mathbb{C})$  qualquer, é possível construir caminho entre ela a uma matriz diagonal. Chamando as linhas de  $M$  por  $m_1, \dots, m_n$ , façamos as seguintes operações:

1. Trocar uma linha  $m_i$  por  $m_i + \alpha m_j$  com  $\alpha \in \mathbb{C}$  quando  $i \neq j$ . Note que  $i \neq j$  implica que as duas linhas são distintas, devendo ser linearmente independentes, caso contrário  $\det M = 0$ . Assim, o caminho que troca a linha  $m_i$  de  $M$  por  $m_i + t\alpha m_j$  com  $t \in [0, 1]$  está inteiro contido em  $GL_n(\mathbb{C})$ .
2. A operação de troca de linhas, que também pode formar caminhos tomando a operação anterior como base. Trocar a linha  $m_i$  pela  $m_j$ , com  $i < j$ , é o mesmo que fazer inicialmente um caminho que leva  $m_i$  em  $m_i + m_j$  ao mesmo tempo que leva  $m_j$  em  $m_j + 2m_i$ . Já vimos que pode-se escrever esse caminho como  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$  onde

$$\gamma_1(t) = (m_1, \dots, m_i + tm_j, \dots, m_j + t2m_i, \dots, m_n)$$

que leva a  $i$ -ésima linha a  $m_i + tm_j$  e a  $j$ -ésima a  $m_j + t2m_i$ . Agora, para de fato trocar as posições de  $m_i$  e  $m_j$ , é preciso compor  $\gamma_1$  com  $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$  definido por

$$\gamma_2(t) = (m_1, \dots, m_i + m_j, \dots, m_j + 2m_i - t(m_i + m_j), \dots, m_n)$$

e depois com  $\gamma_3 : [0, 1] \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$  definido por

$$\gamma_3(t) = (m_1, \dots, m_i + m_j - tm_i, \dots, m_i, \dots, m_n).$$

Por fim, obtemos a troca desejada através de caminhos contidos em  $GL_n(\mathbb{C})$ .

Apenas com as duas operações acima, dada  $M \in GL_n(\mathbb{C})$  qualquer, é possível obter uma matriz diagonal e chegar a ela através de um caminho contido em  $GL_n(\mathbb{C})$ . Por fim, basta notar que o espaço de todas as matrizes diagonais invertíveis é conexo por caminhos, pois é homeomorfo a  $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ , conexo por caminhos pois cada  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  é conexo por caminhos.

Finalizado o argumento de que  $GL_n(\mathbb{C})$  é conexo por caminhos, é possível concluir que  $h$ , além de ser homotópico a um mapa constante é homotópico ao mapa que envia na matriz constante identidade.

Isso significa que  $h_+^1 \circ h_-|_{-\times\mathbb{C}}$  é homotópico a  $h_+^2 \circ h_-|_{-\times\mathbb{C}}$  pois  $(h_+^1 \circ h_-|_{-\times\mathbb{C}}) \circ (h_+^2 \circ h_-|_{-\times\mathbb{C}})^{-1}$  é mapa homotópico à identidade.

O processo com  $h_-$  é idêntico.

Note ainda que se tomarmos dois fibrados na mesma classe de isomorfismo, digamos  $F$  na mesma classe de  $E$ , pode-se tomar trivializações  $h_+ : F_+ \rightarrow D_+^k \times \mathbb{C}^n$  e  $h_- : F_- \rightarrow D_-^k \times \mathbb{C}^n$  e então, se  $g : E \rightarrow F$  é isomorfismo, temos que  $h'_+ = h_+ \circ g|_{E_+}$  e  $h'_- = h_- \circ g|_{E_-}$  são trivializações em  $E$  de forma que  $h_+ \circ (h_-^{-1})^{-1}|_{\{x\} \times \mathbb{C}^n} = h'_+ \circ (h'_-)^{-1}|_{\{x\} \times \mathbb{C}^n}$ . Então por isso é preciso só comparar o que ocorre com trivializações distintas sobre um mesmo fibrado vetorial  $E$ , como foi feito anteriormente.

Assim, alcançamos o resultado desejado: a função  $\psi$  está bem definida, pois, não importa quais as trivializações locais tomadas em uma mesma classe de isomorfismo de fibrados vetoriais, elas resultam em funções homotópicas.  $\square$

A propriedade anterior não funciona no caso real, apenas no caso complexo, pois  $GL_n(\mathbb{R})$ , ao contrário de  $GL_n(\mathbb{C})$ , não é conexo por caminhos. A partir da observação da função que recebe matrizes de  $GL_n(\mathbb{R})$  e entrega seus determinantes,  $det : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  sobrejetora e contínua com contradomínio espaço com duas componentes conexas, pode-se concluir que  $GL_n(\mathbb{R})$  também possui pelo menos duas componentes conexas.

**Observação 1.3.11.** De fato, no caso real, é possível construir a bijeção  $\phi : [S^k, GL_n^+(\mathbb{R})] \rightarrow Vect_n^+(S^k)$  onde  $GL_n^+(\mathbb{R})$  é a componente conexa de  $GL_n(\mathbb{R})$  composta pelas matrizes com determinante positivo e  $Vect_n^+(S^k)$  é o conjunto das classes de isomorfismo de fibrados vetoriais reais  $n$ -dimensionais orientados, em que a orientação de um fibrado vetorial  $p : E \rightarrow B$  é uma função que determina uma orientação para cada fibra do fibrado vetorial de forma que, para todo  $b \in B$  existe  $U$  vizinhança de  $b$  tal que  $h : p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$  é uma trivialização local que carrega as orientações de cada fibra para a orientação padrão de  $\mathbb{R}^n$ . De fato, nem todos os fibrados vetoriais são orientáveis, e surge a necessidade da nova notação  $Vect_n^+(S^k)$ .

Esse novo mapa  $\phi$ , como o da proposição anterior, também envia classes de homotopia de funções colagem para o seu fibrado vetorial correspondente

Da mesma forma que o mapa definido na proposição auxilia na demonstração da versão complexa do Teorema da Periodicidade de Bott, o mapa  $\phi$  construído no caso real auxilia na demonstração da versão real do Teorema da Periodicidade de Bott, utilizada na solução de outros problemas não explorados neste trabalho. Por estar fora do alcance deste trabalho, as propriedades da versão real não serão demonstradas nesta seção.

### 1.3.3 Aplicação das funções colagem

**Definição 1.3.12** (Espaço projetivo real). O espaço projetivo real de dimensão  $n$ ,  $\mathbb{R}P^n$ , é o espaço topológico formado pelas linhas que passam pela origem em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . De outra forma,  $\mathbb{R}P^n$  é o espaço quociente de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  pela relação de equivalência  $x \sim y \Leftrightarrow x = ty$  para algum  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e para todo  $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ .

De forma semelhante, é possível definir o espaço projetivo complexo:

**Definição 1.3.13** (Espaço projetivo complexo).  $\mathbb{C}P^n$  é o espaço quociente de  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  pela relação  $x \sim y \Leftrightarrow x = ty$  para algum  $t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  e para todo  $x, y \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ .

**Definição 1.3.14** (O fibrado linha canônico sobre  $\mathbb{R}P^n$  (ou  $\mathbb{C}P^n$ )). O fibrado linha canônico é um fibrado vetorial  $p : E \rightarrow \mathbb{R}P^n$  (ou  $p : E \rightarrow \mathbb{C}P^n$  no caso complexo) onde  $E \subset \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^n$  (ou  $E \subset \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^n$ ) consiste de pares  $(l, v)$  com  $v \in l$  e  $p(l, v) = v$  para todo  $(l, v) \in E$ .

De fato, este é um fibrado vetorial de dimensão 1 pois  $p^{-1}(l)$  é uma reta real (ou um plano complexo no caso complexo) e há trivializações locais pois para todo  $l_0 \in \mathbb{R}P^n$  (ou  $l_0 \in \mathbb{C}P^n$ ) é sempre possível definir uma seção  $s_k$  em uma vizinhança  $U_k$  de  $l_0$  tal que cada  $l \in U_k$  é gerado por algum  $(x_0, \dots, x_n)$  com  $x_k \neq 0$  para algum  $k \in \{0, \dots, n\}$ . Aqui, ser gerado significa que todo  $v \in l$  é igual a  $\lambda(x_0, \dots, x_n)$  para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) e pode-se escrever  $l = [x_0, \dots, x_n]$ . A seção desejada é  $s_k : U_k \rightarrow p^{-1}(U_k)$  definida por

$$s_k[x_0, \dots, x_n] = ([x_0, \dots, x_n], \frac{x_0}{x_k}, \dots, \frac{x_n}{x_k}) \in p^{-1}[x_0, \dots, x_n]$$

que não se anula em  $U_k$ .

Obtemos por fim a trivialização local através da construção  $h^{-1} : U_k \times \mathbb{C} \rightarrow p^{-1}(U_k)$  definida por

$$h^{-1}(x, v) = v \cdot s_k(x)$$

De fato,  $h^{-1}$  é bijeção pois  $s_k(x)$  é não nulo, e então gera a fibra  $p^{-1}(x)$ .  $h^{-1}$  é contínua pois seções são contínuas e sua inversa é  $h : p^{-1}(U_k) \rightarrow U_k \times \mathbb{C}$ , onde todo  $u \in p^{-1}(U_k)$  pode ser escrito como  $v \cdot s_k(x)$  para algum  $x \in U_k$  e algum  $v \in \mathbb{C}$ , então  $h$  é definido por

$$h(v \cdot s_k(x)) = (x, v) \in U_k \times \mathbb{C} \text{ para todo } v \cdot s_k(x) \in p^{-1}(U_k)$$

que é contínua porque  $s_k(x)$  varia continuamente quando  $x$  varia continuamente, por construção.

**Proposição 1.3.15.** O fibrado linha canônico de base  $\mathbb{C}P^1$ , a ser denotado por  $H \rightarrow \mathbb{C}P^1$ , é tal que  $(H \otimes H) \oplus 1 \approx H \oplus H$ , onde  $1$  é o fibrado vetorial trivial de dimensão 1.

**Demonstração:** Isso pode ser feito através das funções colagem.

Primeiro note que faz sentido falar sobre a função colagem sobre o fibrado  $H$  pois o espaço base  $\mathbb{C}P^1$  é homeomorfo a  $S^2$  através do homeomorfismo que é composição dos homeomorfismos  $\mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow S^2$ .

O primeiro homeomorfismo  $\mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  parte da identificação de cada  $l \in \mathbb{C}P^1$  com  $l = [z_0, z_1]$ , isto é, a classe de  $(z_0, z_1)$  sob a identificação  $(x, y) \sim \lambda(x, y)$  com  $\lambda \in \mathbb{C}$ . A partir disso, note que  $z = \frac{z_0}{z_1} \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  é um valor que unicamente determina  $l$ . Assim, o primeiro homeomorfismo leva  $[z_0, z_1]$  em  $\frac{z_0}{z_1}$ . O segundo homeomorfismo vem da projeção estereográfica.

Assim,  $H \rightarrow \mathbb{C}P^1 \rightarrow S^n$ , composição do fibrado linha canônico com o homeomorfismo acima, é o fibrado vetorial sobre o qual tomaremos uma função colagem definida na intersecção de  $D_+^2$  e  $D_-^2$  a partir de trivializações locais.

A partir disso, dados os homeomorfismos acima, cada  $[z_0, z_1] \in \mathbb{C}P^1$  será apenas representado por  $z = z_0/z_1$ , assim como os elementos de  $S$  serão representados assim.

Note que  $D_+^2$  é homeomorfo ao espaço dos elementos  $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  tais que  $|z| \leq 1$  e  $D_-^2$  é homeomorfo ao espaço dos elementos  $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  tais que  $|z^{-1}| \leq 1$ .

Por isso, os elementos serão denotados  $[z, 1]$  se estão em  $D_+^2$  e  $[1, z^{-1}]$  se estão em  $D_-^2$ .

A partir dessa representação, é possível escrever seções

$s_+ : D_+^2 \rightarrow E$  e  $s_- : D_-^2 \rightarrow E$  definidas por

$$s_+[z, 1] = (z, 1) \text{ e } s_-[1, z^{-1}] = (1, z^{-1}) \text{ respectivamente.}$$

Na intersecção, isto é, em  $|z| = |z^{-1}| = 1$ , a função colagem deve ser portanto  $f : S^1 \rightarrow GL_1(\mathbb{C})$  definida por  $f(z) = (z)$ , onde  $(z)$  é a multiplicação por  $z$ .

Sabendo como é a função colagem para  $H$ , as funções colagem para  $H \otimes H \oplus 1$  e para  $H \oplus H$  seguem como consequência.

A primeira função colagem é  $f : S^1 \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$  definida por  $z \mapsto \begin{bmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  porque as seções do produto tensorial de fibrados são o produto das seções dos fibrados e a função colagem para o fibrado trivial de dimensão 1 é apenas a identidade. A segunda é  $g : S^1 \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$  definida por  $z \mapsto \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix}$  porque resulta de dois fibrados  $H$ .

Os dois mapas são homotópicos por conta de  $GL_2(\mathbb{C})$  ser conexo por caminhos.

De fato, é possível construir uma homotopia entre  $f$  e  $g$ :

Explicitamente, defina o caminho  $\gamma : I \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$  por  $\gamma(t) = \gamma_t = \exp\left(\frac{i\pi t}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right)$  com  $\exp$  a exponencial de matrizes. A exponencial de uma matriz é sempre invertível, portanto, o

mapa está bem definido.

Com essa construção,  $\gamma$  é um caminho entre

$$\gamma_0 = \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \gamma_1 = \exp\left(\frac{i\pi}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Defina também as funções  $h_1 : S^1 \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$  por

$$h_1(z) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e  $h_2 : S^1 \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$  por

$$h_2(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix}$$

A partir desse caminho, de  $h_1$  e de  $h_2$  é possível construir a homotopia entre  $g$  e  $f$  como  $F : S^1 \times I \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$  definida por

$$F(z, t) = h_1(z)\gamma_t h_2(z)\gamma_t$$

De fato,  $F$  é contínua, se  $t = 0$  temos que

$$F(x, 0) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} = g(z)$$

e se  $t = 1$  temos

$$\begin{aligned} F(x, 1) &= \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & z^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = f(z) \end{aligned}$$

Dada essa homotopia, basta aplicar a Proposição 1.3.10 para verificar que  $H \otimes H \oplus 1$  e  $H \oplus H$  devem ser isomorfas.

□

## Capítulo 2

# K-Teoria como Teoria de Cohomologia

Neste capítulo, serão introduzidos funtores entre espaços topológicos e classes de equivalência de fibrados vetoriais. Como conclusão, será possível verificar alguns axiomas de Teoria de Cohomologia que a K-Teoria reduzida (vinda do funtor  $\tilde{K}$ ) verifica.

Antes de começar, é importante ressaltar que tipos de fibrado vetorial estarão neste capítulo:

A partir de agora, todos os fibrados vetoriais serão complexos. Note que todos os resultados anteriormente verificados para fibrados vetoriais reais também são válidos para fibrados vetoriais complexos. Além disso, o mapa da Proposição 1.3.10 é um resultado válido apenas no caso complexo e que será importante para que a versão complexa Teorema da Periodicidade de Bott seja válida. A importância dessa proposição nos próximos passos deste trabalho é o motivo pelo qual iremos nos voltar apenas para os fibrados vetoriais complexos a partir deste capítulo.

Vale observar que existe também uma proposição semelhante para fibrados vetoriais reais, conforme informado na Observação 1.3.11. Utilizando essa proposição, é possível concluir a versão real do Teorema da Periodicidade de Bott, que não será explorada neste trabalho por não ser de interesse para os problemas aqui resolvidos.

Neste capítulo, além dos fibrados serem complexos, haverá uma ampliação da definição de fibrado vetorial: agora as fibras poderão ser espaços vetoriais de dimensões distintas. Essa ampliação é importante para a construção da K-Teoria.

Essa ampliação de definição mantém a dimensão localmente, pois ainda há trivializações locais em todo fibrado vetorial. Ou seja, como, para todo  $x \in B$  existe  $U$  vizinhança de  $x$  tal que  $h : p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^n$  é trivialização local para algum  $n$  natural, as dimensões das fibras devem ser localmente constantes. Isto é, se  $X$  é desconexo, as dimensões de cada componente conexa

podem ser diferentes.

Por último, também vale observar algumas notações que serão adotadas: o fibrado  $n$ -dimensional trivial será representado por  $\varepsilon^n$ , onde o fibrado é o mapa  $p : \varepsilon^n \rightarrow X$ , isto é,  $\varepsilon^n = X \times \mathbb{C}^n$ . Também será mais frequente utilizar apenas  $E$  para representar todo fibrado vetorial  $p : E \rightarrow X$ .

**Observação 2.0.1.** Com a nova notação, é possível escrever  $\varepsilon^m \oplus \varepsilon^n \approx \varepsilon^{m+n}$

De fato, a soma direta dos fibrados vetoriais triviais  $p_1 : X \times \mathbb{C}^m \rightarrow X$  e  $p_2 : X \times \mathbb{C}^n \rightarrow X$  é o fibrado vetorial com espaço total  $\{(x_1, w_1), (x_2, w_2) \in \varepsilon^m \times \varepsilon^n \mid p_1(x_1, w_1) = p_2(x_2, w_2)\}$ , isto é, o espaço de todos os pontos  $((x_1, w_1), (x_2, w_2))$  de  $\varepsilon^m \times \varepsilon^n$  tais que  $x_1 = x_2$ . Assim,  $\varepsilon^m \oplus \varepsilon^n \approx \{(x, w_1, w_2) \in X \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \mid \forall x \in X \forall w_1 \in \mathbb{C}^m \forall w_2 \in \mathbb{C}^n\} = X \times \mathbb{C}^{m+n}$  com o mapa do fibrado sendo realmente a projecção em  $X$ .

## 2.1 Os funtores $K$ e $\tilde{K}$

Os funtores  $K$  e  $\tilde{K}$ , que serão definidos nesta sessão, receberão espaços  $X$  que são compactos Hausdorff e os levarão para os grupos abelianos  $K(X)$  e  $\tilde{K}(X)$  respectivamente. Serão definidas as somas que originam essa estrutura de grupo abeliano e, mais que isso, será definido o produto que faz de  $K(X)$  um anel. Depois de apresentadas as estruturas,  $\tilde{K}$  terá papel importante na verificação dos axiomas de teoria de cohomologia generalizada.

**Definição 2.1.1** (Relação de equivalência  $\approx_s$ ). Se  $E_1$  e  $E_2$  são fibrados vetoriais com base  $X$ , definimos a relação

$$E_1 \approx_s E_2 \text{ se } E_1 \oplus \varepsilon^n \approx E_2 \oplus \varepsilon^n \text{ para algum número natural } n.$$

**Definição 2.1.2** (Relação de equivalência  $\sim$ ). Se  $E_1$  e  $E_2$  são fibrados vetoriais com base  $X$ , definimos a relação

$$E_1 \sim E_2 \text{ se } E_1 \oplus \varepsilon^m \approx E_2 \oplus \varepsilon^n \text{ para algum par de naturais } m, n.$$

**Observação 2.1.3.** É possível verificar que, de fato,  $\sim$  e  $\approx_s$  são relações de equivalência.

**Demonstração:** 1.  $E \approx_s E$  e  $E \sim E$

porque  $E$  é isomorfo a si mesmo tomando a identidade como isomorfismo e, segundo a Observação 1.2.16, é possível concluir que  $E \oplus \varepsilon^n \approx E \oplus \varepsilon^n$  para todo natural  $n$ .

2.  $E_1 \sim E_2$  e  $E_2 \sim E_3 \Rightarrow E_1 \sim E_3$  e, uma vez demonstrada a implicação anterior, é possível tirar como consequência que  $E_1 \underset{s}{\approx} E_2$  e  $E_2 \underset{s}{\approx} E_3 \Rightarrow E_1 \underset{s}{\approx} E_3$

A primeira implicação é verdadeira porque se  $E_1 \oplus \varepsilon^{n_1} \approx E_2 \oplus \varepsilon^{n_2}$  e  $E_2 \oplus \varepsilon^{m_2} \approx E_3 \oplus \varepsilon^{m_3}$ , pode-se realizar as seguintes operações que mantêm isomorfismo, conforme verificado da Observação 1.2.16:

Se  $E_1 \oplus \varepsilon^{n_1} \approx E_2 \oplus \varepsilon^{n_2}$ , somando  $\varepsilon^{m_2}$  em ambos os lados, temos  $E_1 \oplus (\varepsilon^{n_1} \oplus \varepsilon^{m_2}) \approx E_2 \oplus \varepsilon^{n_2} \oplus \varepsilon^{m_2} \approx (E_2 \oplus \varepsilon^{m_2}) \oplus \varepsilon^{n_2}$ . Isto é, pela Observação 2.0.1,  $E_1 \oplus \varepsilon^{n_1+m_2} \approx E_3 \oplus \varepsilon^{m_3+n_2}$ , isto é,  $E_1 \sim E_3$ .

Poderíamos concluir o mesmo para a relação  $\underset{s}{\approx}$  porque se  $n_1 = n_2$  e  $m_2 = m_3$ , tiraríamos  $n_1 + m_2 = m_3 + n_2$ .

3.  $E_1 \underset{s}{\approx} E_2 \Rightarrow E_2 \underset{s}{\approx} E_1$  e  $E_1 \sim E_2 \Rightarrow E_2 \sim E_1$

simplesmente porque, em geral, se  $A \underset{s}{\approx} B$ , isto é, se existe homeomorfismo de  $A$  para  $B$  que se restringe a isomorfismos lineares em cada fibra, o inverso deste mapa é isomorfismo de  $B$  para  $A$ , isto é,  $B \underset{s}{\approx} A$ .

□

O nosso objetivo agora é mostrar que um conjunto de classes de equivalência de fibrados vetoriais sobre  $X$  é grupo com a operação  $\oplus$ . Para isso, é interessante verificar algumas propriedades presentes **no conjunto das classes de isomorfismo de fibrados vetoriais**:

**Observação 2.1.4.** Sejam  $A, B$  e  $C$  fibrados vetoriais

1. A soma direta está bem definida, isto é, independe do representante da classe. Foi mostrado na Observação 1.2.16 que se  $A \underset{s}{\approx} B$ , então  $A \oplus C \underset{s}{\approx} B \oplus C$  e  $B \oplus C \underset{s}{\approx} B \oplus C'$  para qualquer outro  $C'$  na mesma classe de isomorfismo de  $C$ .
2. A soma é comutativa. Na mesma Observação 1.2.16, foi visto que  $A \oplus B \underset{s}{\approx} B \oplus A$ .
3. É associativa  $(A \oplus B) \oplus C \underset{s}{\approx} A \oplus (B \oplus C)$  por definição. Se  $p_1$  é o mapa do fibrado  $A$ ,  $p_2$  o mapa do  $B$  e  $p_3$  o mapa do  $C$ , temos  $(A \oplus B) \oplus C = \{((v_1, v_2), v_3) \in (A \times B) \times C \mid p_1(v_1) = p_2(v_2) = p_3(v_3)\} \approx \{(v_1, (v_2, v_3)) \in A \times (B \times C) \mid p_1(v_1) = p_2(v_2) = p_3(v_3)\} = A \oplus (B \oplus C)$
4. Possui como elemento neutro  $\varepsilon^0$ , pois se esse fibrado é  $p : X \times \{0\} \rightarrow X$  tal que  $p(x, 0) = x$  para todo  $(x, 0) \in X \times \{0\}$ , e tomando outro fibrado vetorial qualquer  $p' : A \rightarrow X$ , ocorre  $A \oplus \varepsilon^0 = \{(v, (x, 0)) \in A \times \varepsilon^0 \mid p'(v) = x\} \approx \{v \mid p'(v) = x, x \in X\} = A$

A conclusão é: se estes quatro itens são verdade para classes de isomorfismo, elas também devem vales para as classes de equivalência por  $\approx_s$  e  $\sim$ , pois essas relações são definidas a partir de isomorfismos.

**Proposição 2.1.5.** *Se  $X$  é compacto Hausdorff, então o conjunto das classes de equivalência de fibrados vetoriais sobre  $X$  pela relação  $\sim$  forma um grupo abeliano com respeito a soma direta  $\oplus$ .*

*Este grupo abeliano é denominado  $\tilde{K}(X)$*

**Demonstração:** Já foi listado anteriormente que neste conjunto  $\oplus$  é operação comutativa, associativa, com elemento neutro a classe de  $\varepsilon^0$ . Resta verificar a existência de elemento inverso.

No Teorema 1.2.15, foi visto que para todo fibrado vetorial  $E$  existe outro fibrado  $E'$  tal que  $E \oplus E' \approx \varepsilon^N$  para algum natural  $N$ . Entretanto, este resultado era válido para fibrados vetoriais anteriormente definidos de forma que todas as fibras possuem a mesma dimensão.

De fato, neste caso,  $E \oplus E' \approx \varepsilon^N \Rightarrow E \oplus E' \oplus \varepsilon^0 \approx \varepsilon^N \oplus \varepsilon^0 \approx \varepsilon^0 \oplus \varepsilon^N$ , o que leva à conclusão  $E \oplus E' \sim \varepsilon^0$ , que indica que a classe de  $E'$  é o inverso da classe de  $E$ .

Porém, em geral, agora nem todas as fibras possuem a mesma dimensão. Para resolver este problema, considere o mapa do fibrado  $E$   $\pi : E \rightarrow X$  e seja  $X_i = \{x \in X | \dim \pi^{-1}(x) = i\}$ . O conjunto de todos esses espaços  $\mathcal{X} = \{X_i\}$  é tal que  $\cup \mathcal{X} = X$ ,  $X_i \cap X_j = \emptyset$  se  $i \neq j$  e  $X$  é compacto, existindo assim subcobertura finita de  $\mathcal{X}$  que só pode ser o próprio conjunto  $\mathcal{X}$ , isto é,  $\mathcal{X}$  é cobertura finita de  $X$ .

A partir do que foi feito até o momento, basta adicionar a  $E$  um fibrado  $E'$ , de forma que a soma seja trivializável e de dimensão "ajustável" sobre cada  $X_i$ . Isto é, somar  $E$  a um fibrado tal que a soma se torne um fibrado vetorial com todas as fibras de mesma dimensão. Vejamos porque esse fibrado  $E'$  deve existir e como resolver o problema de forma mais explícita:

Primeiramente, note que  $\pi|_{X_i} : \pi^{-1}(X_i) \rightarrow X_i$  é um fibrado vetorial. Como comentado na introdução deste capítulo, as trivializações locais fazem com que as fibras de um fibrado vetorial tenham, localmente, a mesma dimensão. Portanto, a existência de um aberto em  $X_i$  e de uma trivialização local seguem diretamente da existência de trivializações locais em  $E$ .

Para todo  $x \in X_i$ , existe um aberto  $U$  e um mapa  $h_x : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^i$ .

Seja esse o fibrado  $\pi^{-1}(X_i)$  que, segundo o Teorema 1.2.15, somado com algum outro fibrado vetorial  $E_i$  com espaço base  $X_i$ , é trivializável, de forma que  $\pi^{-1}(X_i) \oplus E_i \approx \varepsilon^{n_i}$  para algum número natural  $n_i$ . De fato, essa dimensão é "ajustável" no seguinte sentido:

Seja  $N = \max \{n_i\}$  e  $E'_i = E_i \oplus \varepsilon^{N-n_i}$ . Assim,  $\pi^{-1}(X_i) \oplus E'_i \approx \varepsilon^{n_i+N-n_i} = \varepsilon^N$  para todo  $i$ . É de nosso interesse encontrar uma mesma dimensão para cada  $i$ .

Considere  $E' = \sqcup E'_i$ .  $p : E' \rightarrow X$  é fibrado vetorial, pois cada restrição  $E'_i \rightarrow X_i$  é fibrado vetorial.

Por fim,  $E \oplus \sqcup E'_i = \sqcup \pi^{-1}(X_i) \oplus \sqcup E'_i$  tem todas as fibras de dimensão  $N$  e pode-se resolver pelo caso inicial.  $\square$

**Observação 2.1.6.** Os elementos do conjunto das classes de equivalência pela relação  $\underset{s}{\approx}$  com a operação  $\oplus$  não possuem inverso em geral.

**Demonstração:** Suponha por absurdo que existe inverso para a classe do fibrado vetorial  $p : E \rightarrow X$ . Assim, existe outro fibrado vetorial  $p' : E' \rightarrow X$  tal que  $E \oplus E' \oplus \varepsilon^n \approx \varepsilon^0 \oplus \varepsilon^n \approx \varepsilon^n$  para algum natural  $n$ . Se o mapa do fibrado vetorial  $\varepsilon^n$  é  $\pi : \varepsilon^n \rightarrow X$ , teríamos que a dimensão de cada fibra de  $E \oplus E' \oplus \varepsilon^n$  seria  $\dim(p_1^{-1}(x) \times p_2^{-1}(x) \times \pi^{-1}(x)) = \dim(p_1^{-1}(x)) + \dim(p_2^{-1}(x)) + \dim(\pi^{-1}(x))$ .

Como  $E \oplus E' \oplus \varepsilon^n$  é isomorfo a  $\varepsilon^n$ , existe isomorfismo linear entre as fibras de cada um desses fibrados, o que significa que a dimensão delas deve ser a mesma, isto é,  $\dim(p_1^{-1}(x)) + \dim(p_2^{-1}(x)) + \dim(\pi^{-1}(x)) = \dim(\pi^{-1}(x))$ . Isso só ocorre se as fibras de  $E$  e  $E'$  possuem todas dimensão 0, ou seja, estão ambos na mesma classe de equivalência de  $\varepsilon^0$ . A conclusão é: somente  $[\varepsilon^0]$  possui inverso no conjunto das classes de equivalência pela relação  $\underset{s}{\approx}$ .  $\square$

**Observação 2.1.7.** Por mais que o espaço das classes de equivalência de fibrados pela relação  $\underset{s}{\approx}$  não tenham inverso, vale a propriedade do cancelamento: Dados fibrados vetoriais  $E_1, E_2$  e  $E_3$ , vale

$$E_1 \oplus E_2 \underset{s}{\approx} E_1 \oplus E_3 \Rightarrow E_2 \underset{s}{\approx} E_3$$

**Demonstração:**  $E_1 \oplus E_2 \underset{s}{\approx} E_1 \oplus E_3$  implica

$$E_1 \oplus E_2 \oplus \varepsilon^n \approx E_1 \oplus E_3 \oplus \varepsilon^n \tag{2.1}$$

para algum natural  $n$ . Pelo Teorema 1.2.15, existe fibrado vetorial  $E'_1$  tal que  $E_1 \oplus E'_1 \approx \varepsilon^m$  para algum natural  $m$ . Portanto, somando  $E'_1$  à esquerda em ambos os lados de 2.1, obtemos

$$\varepsilon^m \oplus E_2 \oplus \varepsilon^n \approx \varepsilon^m \oplus E_3 \oplus \varepsilon^n \tag{2.2}$$

que, por propriedades anteriormente observadas em 1.2.16 e 2.0.1, equivale a dizer

$$E_2 \oplus \varepsilon^{n+m} \approx E_3 \oplus \varepsilon^{n+m} \tag{2.3}$$

Ou seja,  $E_2 \underset{s}{\approx} E_3$ .  $\square$

Outro importante grupo abeliano a ser construído a partir de um espaço compacto Hausdorff  $X$ , é  $K(X)$ , construído utilizando-se a relação de equivalência  $\underset{s}{\approx}$ . Esse grupo ainda pode ser

munido de um produto que o torna anel comutativo com unidade.

Esse espaço é construído de forma semelhante a como é possível construir os números inteiros a partir dos números naturais:

**Definição 2.1.8.** Dado um espaço compacto Hausdorff  $X$ , definimos

$$K(X) = \{E - E' \mid E \text{ e } E' \text{ são fibrados vetoriais sobre } X \text{ com a relação de equivalência } E_1 - E'_1 = E_2 - E'_2 \Leftrightarrow E_1 \oplus E'_2 \underset{s}{\approx} E_2 \oplus E'_1\}$$

**Observação 2.1.9.** Com as propriedades verificadas anteriormente, é possível dizer que o espaço das classes de equivalência de fibrados de base  $X$  pela relação  $\underset{s}{\approx}$  é um **monoide comutativo** com a operação  $[E_1] + [E_2] = [E_1 \oplus E_2]$ . Isto é, um conjunto que verifica as seguintes propriedades para quaisquer fibrados vetoriais  $E_1, E_2$  e  $E_3$  com base  $X$ :

1. Associatividade  $([E_1] + [E_2]) + [E_3] = [E_1] + ([E_2] + [E_3])$
2. Identidade  $[E] + [\varepsilon^0] = [E] = [\varepsilon^0] + [E]$
3. Comutatividade  $[E_1] + [E_2] = [E_2] + [E_1]$

Em que  $[E]$  denota classe pela relação  $\underset{s}{\approx}$  para todo fibrado vetorial  $E$ . Todas essas propriedades de fato seguem diretamente da associatividade, identidade e comutatividade presentes no conjunto das classes de isomorfismo, propriedades verificadas na Observação 2.1.4.

Note que faltam propriedades para que este seja um grupo abeliano e a estrutura construída da definição de  $K(X)$  resolve esse problema, como será mostrado a seguir. Vale observar que existe uma forma geral de construir um grupo abeliano a partir de um monoide comutativo, denotada por **complemento de Grothendieck**, onde o grupo abeliano desejado é construído como diferenças de elementos do monoide comutativo original. Isto é, o espaço  $K(X)$  pode ser visto como uma aplicação deste complemento de Grothendieck, assim como a construção dos números inteiros a partir dos números naturais pode ser vista como outro exemplo.

**Observação 2.1.10.** É possível verificar que a relação denotada por  $=$  de fato é relação de equivalência de forma bem direta:

1.  $E_1 - E'_1 = E_2 - E'_2 \Rightarrow E_2 - E'_2 = E_1 - E'_1$  porque  $E_1 \oplus E'_2 \underset{s}{\approx} E_2 \oplus E'_1 \Rightarrow E_2 \oplus E'_1 \underset{s}{\approx} E_1 \oplus E'_2$  como observado em 2.1.3.
2.  $E_1 - E'_1 = E_1 - E'_1$  porque  $E_1 \oplus E'_1 \underset{s}{\approx} E_1 \oplus E'_1$  como também observado em 2.1.3.
3. Se  $E_1 - E'_1 = E_2 - E'_2$  e  $E_2 - E'_2 = E_3 - E'_3$ , então  $E_1 - E'_1 = E_3 - E'_3$  pois nesse caso temos  $E_1 \oplus E'_2 \underset{s}{\approx} E_2 \oplus E'_1$  e  $E_2 \oplus E'_3 \underset{s}{\approx} E_3 \oplus E'_2$  basta então somar essas duas sentenças anteriores,

e assim obter pelas observações 2.1.4 e 2.1.7  $E_1 \oplus E'_2 \oplus E_2 \oplus E'_3 \underset{s}{\approx} E_2 \oplus E'_1 \oplus E_3 \oplus E'_2 \Rightarrow E_1 \oplus E'_3 \underset{s}{\approx} E'_1 \oplus E_3$ , isto é,  $E_1 - E'_1 = E_3 - E'_3$ .

**Definição 2.1.11.** A soma em  $K(X)$  é definida como

$$(E_1 - E'_1) + (E_2 - E'_2) = (E_1 \oplus E_2) - (E'_1 \oplus E'_2)$$

**Proposição 2.1.12.** Para todo espaço compacto Hausdorff  $X$ ,  $K(X)$  é um grupo abeliano com a operação  $+$ . O elemento neutro é  $E - E$  para  $E$  fibrado vetorial qualquer de base  $X$  e o inverso é  $E' - E$  para todo  $E - E' \in K(X)$ .

**Demonstração:** 1. **Associatividade** Temos que  $[(E_1 - E'_1) + (E_2 - E'_2)] + (E_3 - E'_3) = (E_1 - E'_1) + [(E_2 - E'_2) + (E_3 - E'_3)]$ , porque

$$\begin{aligned} [(E_1 - E'_1) + (E_2 - E'_2)] + (E_3 - E'_3) &= (E_1 \oplus E_2 - E'_1 \oplus E'_2) + (E_3 - E'_3) \\ &= (E_1 \oplus E_2) \oplus E_3 - (E'_1 \oplus E'_2) \oplus E'_3. \end{aligned}$$

Como  $(E_1 \oplus E_2) \oplus E_3 \approx E_1 \oplus (E_2 \oplus E_3)$  e  $(E'_1 \oplus E'_2) \oplus E'_3 \approx E'_1 \oplus (E'_2 \oplus E'_3)$  pela Observação 2.1.4, também pode-se concluir que

$$\begin{aligned} (E_1 \oplus E_2) \oplus E_3 - (E'_1 \oplus E'_2) \oplus E'_3 &= E_1 \oplus (E_2 \oplus E_3) - E'_1 \oplus (E'_2 \oplus E'_3) \\ &= (E_1 - E'_1) + [(E_2 - E'_2) + (E_3 - E'_3)]. \end{aligned}$$

2. **Elemento neutro** Temos que  $(E_1 - E'_1) + (E - E) = E_1 - E'_1$  porque

$$(E_1 - E'_1) + (E - E) = E_1 \oplus E - E'_1 \oplus E \text{ e } E_1 \oplus E \oplus E'_1 \approx E_1 \oplus E'_1 \oplus E$$

pela comutatividade da soma de fibrados vetoriais mostrada em 2.1.4. Em particular,

$$E_1 \oplus E \oplus E'_1 \underset{s}{\approx} E_1 \oplus E'_1 \oplus E,$$

pois basta somar  $\varepsilon^0$  em ambos os lados que o isomorfismo se manterá por  $\varepsilon^0$  ser elemento neutro como mostrado na mesma Observação 2.1.4

3. **Existência de inverso** Temos que  $(E_1 - E'_1) + (E'_1 - E_1) = E - E$  porque

$$(E_1 - E'_1) + (E'_1 - E_1) = E_1 \oplus E'_1 - E'_1 \oplus E_1 \text{ e } E_1 \oplus E'_1 \oplus E \approx E \oplus E'_1 \oplus E_1$$

pela comutatividade da soma direta de fibrados vetoriais. Em particular,  $E_1 \oplus E'_1 \oplus E \underset{s}{\approx}$

$E \oplus E'_1 \oplus E_1$ , como queríamos.

4. **Comutatividade** Temos que  $(E_1 - E'_1) + (E_2 - E'_2) = (E_2 - E'_2) + (E_1 - E'_1)$  porque

$$(E_1 - E'_1) + (E_2 - E'_2) = E_1 \oplus E_2 - E'_1 \oplus E'_2 \text{ e}$$

$$(E_2 - E'_2) + (E_1 - E'_1) = E_2 \oplus E_1 - E'_2 \oplus E'_1.$$

Assim, temos  $(E_1 \oplus E_2) \oplus (E'_2 \oplus E_1) \approx (E_2 \oplus E_1) \oplus (E'_1 \oplus E'_2)$  pela Observação 2.1.4. Em particular, vale

$$(E_1 \oplus E_2) \oplus (E'_2 \oplus E_1) \underset{s}{\approx} (E_2 \oplus E_1) \oplus (E'_1 \oplus E'_2).$$

□

### 2.1.1 Estruturas de anel

Além da estrutura de grupo anteriormente apresentada para  $K(X)$ , também é possível definir produto que faz desta estrutura um anel.

**Definição 2.1.13.** A seguinte operação define um produto em  $K(X)$ :

$$(E_1 - E'_1)(E_2 - E'_2) = E_1 \otimes E_2 - E_1 \otimes E'_2 + E'_1 \otimes E'_2 - E'_1 \otimes E_2$$

Este produto está bem definido, uma vez que se  $E_1 - E'_1 = E_3 - E'_3$ , então  $(E_1 - E'_1)(E_2 - E'_2) = (E_3 - E'_3)(E_2 - E'_2)$ . Aqui serão utilizadas as propriedades 1.2.20, 1.2.22 e 1.2.24 do produto tensorial de fibrados vetoriais para demonstrar este fato.

Inicialmente, utilizando a informação de que  $E_1 \oplus E'_3 \underset{s}{\approx} E'_1 \oplus E_3$  é possível obter  $E_1 \oplus E'_3 - E'_1 \oplus E_3 = \varepsilon^0$ , que também pode ser representado por  $\varepsilon^0 - \varepsilon^0$ . Isso leva a concluir

$(E_1 \oplus E'_3 - E'_1 \oplus E_3)(E_2) = (E_1 \oplus E'_3 - E'_1 \oplus E_3)(E'_2) = \varepsilon^0$ , considerando  $E_2$  e  $E'_2$  como os elementos  $E_2 - \varepsilon^0$  e  $E'_2 - \varepsilon^0$  de  $K(X)$ , respectivamente.

Portanto,  $(E_1 \oplus E'_3) \otimes E_2 - (E'_1 \oplus E_3) \otimes E_2 = (E_1 \oplus E'_3) \otimes E'_2 - (E'_1 \oplus E_3) \otimes E'_2$  implica  $(E_1 \oplus E'_3) \otimes E_2 \oplus (E'_1 \oplus E_3) \otimes E'_2 \underset{s}{\approx} (E_1 \oplus E'_3) \otimes E'_2 \oplus (E'_1 \oplus E_3) \otimes E_2$  e assim,  $[(E_1 \otimes E_2) \oplus (E'_1 \otimes E'_2) \oplus (E_3 \otimes E'_2) \oplus (E'_3 \otimes E_2)] \underset{s}{\approx} [(E_1 \otimes E'_2) \oplus (E'_1 \otimes E_2) \oplus (E_3 \otimes E_2) \oplus (E'_3 \otimes E'_2)]$ , uma informação desejada para concluir que  $(E_1 \otimes E_2) \oplus (E'_1 \otimes E'_2) - (E_1 \otimes E'_2) \oplus (E'_1 \otimes E_2) = (E_3 \otimes E_2) \oplus (E'_3 \otimes E'_2) - (E_3 \otimes E'_2) \oplus (E'_3 \otimes E_2)$ , isto é,  $(E_1 - E'_1)(E_2 - E'_2) = (E_3 - E'_3)(E_2 - E'_2)$ , como queríamos.

**Proposição 2.1.14.** Para todo espaço compacto Hausdorff  $X$ ,  $K(X)$  é anel comutativo com unidade em relação a operação de multiplicação definida em 2.1.13

**Demonstração:** Já foi provado que  $K(X)$  é grupo na Proposição 2.1.12. Agora utilizaremos propriedades do produto entre fibrados vetoriais presentes em 1.2.2 para provar as propriedades restantes que fazem de  $K(X)$  um anel conforme enunciado:

Dados quaisquer  $E_1 - E'_1, E_2 - E'_2$  e  $E_3 - E'_3$  em  $K(X)$

1. **Associatividade** Segue da associatividade para fibrados vetoriais, que é a propriedade 1.2.21, e da distributividade, que é a propriedade 1.2.22:  $[(E_1 - E'_1)(E_2 - E'_2)](E_3 - E'_3) = [E_1 \otimes E_2 \oplus E'_1 \otimes E'_2 - E_1 \otimes E'_2 \oplus E'_1 \otimes E_2](E_3 - E'_3) = (E_1 \otimes E_2 \oplus E'_1 \otimes E'_2) \otimes E_3 \oplus (E_1 \otimes E'_2 \oplus E'_1 \otimes E_2) \otimes E'_3 - (E_1 \otimes E_2 \oplus E'_1 \otimes E'_2) \otimes E'_3 \oplus (E_1 \otimes E'_2 \oplus E'_1 \otimes E_2) \otimes E_3 = [(E_1 \otimes E_2) \otimes E_3] \oplus [(E'_1 \otimes E'_2) \otimes E_3] \oplus [(E_1 \otimes E'_2) \otimes E'_3] \oplus [(E'_1 \otimes E_2) \otimes E_3] - [(E_1 \otimes E_2) \otimes E'_3] \oplus [(E'_1 \otimes E'_2) \otimes E'_3] \oplus [(E_1 \otimes E'_2) \otimes E_3] \oplus [(E'_1 \otimes E_2) \otimes E_3] = [E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3)] \oplus [E'_1 \otimes (E'_2 \otimes E_3)] \oplus [E_1 \otimes (E'_2 \otimes E'_3)] \oplus [E'_1 \otimes (E_2 \otimes E'_3)] - [E_1 \otimes (E_2 \otimes E'_3)] \oplus [E'_1 \otimes (E'_2 \otimes E'_3)] \oplus [E_1 \otimes (E'_2 \otimes E_3)] \oplus [E'_1 \otimes (E_2 \otimes E_3)] = (E_1 - E'_1)[(E_2 - E'_2)(E_3 - E'_3)]$
2. **Distributividade** A distributividade à esquerda e à direita seguem ambos da propriedade 1.2.22. A seguir, é desenvolvido em detalhes o caso à esquerda, enquanto que o outro é análogo:  $(E_1 - E'_1)[(E_2 - E'_2) + (E_3 - E'_3)] = (E_1 - E'_1)(E_2 \oplus E_3 - E'_2 \oplus E'_3) = [E_1 \otimes (E_2 \oplus E_3)] \oplus [E'_1 \otimes (E'_2 \oplus E'_3)] - [E_1 \otimes (E'_2 \oplus E'_3)] \oplus [E'_1 \otimes (E_2 \oplus E_3)] = (E_1 \otimes E_2) \oplus (E_1 \otimes E_3) \oplus (E'_1 \otimes E'_2) \oplus (E'_1 \otimes E'_3) - (E_1 \otimes E'_2) \oplus (E_1 \otimes E'_3) \oplus (E'_1 \otimes E_2) \oplus (E'_1 \otimes E_3) = [(E_1 \otimes E_2) \oplus (E'_1 \otimes E'_2) - (E_1 \otimes E'_2) \oplus (E'_1 \otimes E_2)] + [(E_1 \otimes E_3) \oplus (E'_1 \otimes E'_3) - (E_1 \otimes E'_3) \oplus (E'_1 \otimes E_3)] = (E_1 - E'_1)(E_2 - E'_2) + (E_1 - E'_1)(E_3 - E'_3)$
3. **Comutatividade** Segue da comutatividade para fibrados vetoriais, que é a propriedade 1.2.20:  $(E_1 - E'_1)(E_2 - E'_2) = [(E_1 \otimes E_2) \oplus (E'_1 \otimes E'_2)] - [(E_1 \otimes E'_2) \oplus (E'_1 \otimes E_2)] = [(E_2 \otimes E_1) \oplus (E'_2 \otimes E'_1)] - [(E_2 \otimes E'_1) \oplus (E'_2 \otimes E_1)] = (E_2 - E'_2)(E_1 - E'_1)$
4. **Identidade** A identidade deve ser  $\varepsilon^1$ , isto é,  $\varepsilon^1 - \varepsilon^0$ . Isso segue das propriedades 1.2.23 e 1.2.24:  $(E_1 - E'_1)(\varepsilon^1 - \varepsilon^0) = (E_1 \otimes \varepsilon^1 \oplus E'_1 \otimes \varepsilon^0) - (E_1 \otimes \varepsilon^0 \oplus E'_1 \otimes \varepsilon^1) = (E_1 \oplus \varepsilon^0) - (\varepsilon^0 \oplus E'_1) = E_1 - E - 1'$

□

**Observação 2.1.15.** Antes de prosseguir, uma informação importante sobre notação é que sempre que tomarmos  $E \in K(X)$ , isso é o mesmo que dizer  $E - \varepsilon^0 \in K(X)$ . Da mesma forma, faz sentido denotar por  $-E \in K(X)$  a classe  $\varepsilon^0 - E \in K(X)$ . Assim,  $E + (-E) = E - E$  é o elemento neutro e as classes  $E$  e  $-E$  são de fato opostas, como a notação indica.

**Observação 2.1.16.** Note que de fato  $K$  e  $\tilde{K}$  são funtores (contravariantes) entre a categoria dos espaços Hausdorff compactos e a categoria dos anéis:

$K$  e  $\tilde{K}$  realmente levam os objetos  $X$  que são espaços Hausdorff compactos nos anéis  $K(X)$  e  $\tilde{K}(X)$ .

Agora considere que  $K$  leva mapas  $f : X \rightarrow Y$  em  $f^* : K(Y) \rightarrow K(X)$  definida por

$$f^*(E - E') = f^*(E) - f^*(E') \text{ para todo } E - E' \in K(X)$$

relembrando aqui que  $f^*$  de um fibrado vetorial é o fibrado pullback conforme denominado na Observação 1.3.3.

De forma semelhante,  $\tilde{K}(X)$  leva funções  $f : X \rightarrow Y$  em  $f^* : \tilde{K}(Y) \rightarrow \tilde{K}(X)$  definida por

$$f^*([E]) = [f^*E] \text{ para toda classe de equivalência de } E \text{ por } \sim, [E] \in \tilde{K}(X)$$

Por fim, resta verificar as 5 seguintes afirmações nos dois funtores:

1.  $f^*$  está bem definido

Primeiramente, note que dada  $f : A \rightarrow B$  contínua, temos  $f^*(\varepsilon^n)$  também é fibrado vetorial trivializável para qualquer  $\varepsilon^n$ . De fato,  $f^*(\varepsilon^n) \approx \{(x, v) \in A \times \varepsilon^n \mid f(x) = p(v)\}$  e, dada uma trivialização  $h : \varepsilon^n \rightarrow B \times \mathbb{R}^n$ , é possível tomar o mapa  $g : f^*(\varepsilon^n) \rightarrow A \times \mathbb{R}^n$  como  $g(x, v) = (x, pr_2 \circ h(v))$  onde  $pr_2 : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a projeção em  $\mathbb{R}^n$ . Dessa forma,  $g$  também será trivialização. Por simplificação de notação, também será denotado por  $\varepsilon^n$  o fibrado vetorial  $f^*(\varepsilon^n)$ .

Gostaríamos de verificar agora que, se  $E_1 - E_2 = F_1 - F_2$ , então  $f^*(E_1 - E_2) = f^*(F_1 - F_2)$ .

Assim, é dada a informação de que  $E_1 \oplus F_2 \underset{s}{\approx} F_1 \oplus E_2$ , isto é, existe um número natural  $n$  tal que  $E_1 \oplus F_2 \oplus \varepsilon^n \approx F_1 \oplus E_2 \oplus \varepsilon^n$ .

Portanto,  $f^*(E_1 \oplus F_2 \oplus \varepsilon^n) \approx f^*(F_1 \oplus E_2 \oplus \varepsilon^n)$ . Conforme demonstrado na Proposição 1.3.4, temos que  $f^*(E_1) \oplus f^*(F_2) \oplus f^*(\varepsilon^n) \approx f^*(F_1) \oplus f^*(E_2) \oplus f^*(\varepsilon^n)$ . Assim, como observado no início deste item,  $f^*(E_1) \oplus f^*(F_2) \oplus \varepsilon^n \approx f^*(F_1) \oplus f^*(E_2) \oplus \varepsilon^n$ , isto é,  $f^*(E_1) \oplus f^*(F_2) \underset{s}{\approx} f^*(F_1) \oplus f^*(E_2)$  e, portanto,  $f^*(E_1) - f^*(F_2) = f^*(F_1) - f^*(E_2)$ , como queríamos.

Se  $E \sim F$ , temos que  $f^*E \sim f^*F$  de forma semelhante:  $E \oplus \varepsilon^n \approx F \oplus \varepsilon^n \Rightarrow f^*(E) \oplus \varepsilon^n \approx f^*(F) \oplus \varepsilon^n$ .

2.  $f^*$  é homomorfismo de anel

Na soma, temos:

Em  $K(X)$ ,  $f^*(E_1 - E_2 + F_1 - F_2) = f^*(E_1 \oplus F_1 - E_2 \oplus F_2) = f^*(E_1 \oplus F_1) - f^*(E_2 \oplus F_2)$ .

Como  $f^*(E_1 \oplus F_1) \approx f^*(E_1) \oplus f^*(F_1)$  e  $f^*(E_2 \oplus F_2) \approx f^*(E_2) \oplus f^*(F_2)$  pela Proposição 1.3.4,

conclui-se que  $f^*(E_1 - E_2 + F_1 - F_2) = f^*(E_1) \oplus f^*(F_2) - f^*(E_2) \oplus f^*(F_1) = (f^*(E_1) - f^*(E_2)) + (f^*(F_1) - f^*(F_2)) = f^*(E_1 - E_2) + f^*(F_1 - F_2)$ , como desejado.

Em  $\tilde{K}(X)$ ,  $f^*([E_1] + [E_2]) = f^*([E_1 \oplus E_2]) = [f^*(E_1 \oplus E_2)] = [f^*(E_1) \oplus f^*(E_2)]$  pelo pull-back da soma ser isomorfo à soma dos pullbacks. Assim,  $[f^*(E_1) \oplus f^*(E_2)] = [f^*(E_1)] + [f^*(E_2)] = f^*[E_1] \oplus f^*[E_2]$ , como queríamos.

No produto, temos:

Em  $K(X)$ ,  $f^*((E_1 - E'_1)(E_2 - E'_2)) = f^*((E_1 \otimes E_2) \oplus (E'_1 \otimes E'_2)) - ((E_1 \otimes E'_2) \oplus (E'_1 \otimes E_2)) = f^*((E_1 \otimes E_2) \oplus (E'_1 \otimes E'_2)) - f^*((E_1 \otimes E'_2) \oplus (E'_1 \otimes E_2))$ . Pelas propriedades do produto e da soma da Proposição 1.3.4, temos  $f^*((E_1 \otimes E_2) \oplus (E'_1 \otimes E'_2)) \approx (f^*E_1 \otimes f^*E_2) \oplus (f^*E'_1 \otimes f^*E'_2)$  e  $f^*((E_1 \otimes E'_2) \oplus (E'_1 \otimes E_2)) = (f^*E_1 \otimes f^*E'_2) \oplus (f^*E'_1 \otimes f^*E_2)$ . Portanto,  $f^*((E_1 - E'_1)(E_2 - E'_2)) = (f^*E_1 \otimes f^*E_2) \oplus (f^*E'_1 \otimes f^*E'_2) - (f^*E_1 \otimes f^*E'_2) \oplus (f^*E'_1 \otimes f^*E_2) = (f^*E_1 - f^*E'_1)(f^*E_2 - f^*E'_2) = f^*(E_1 - E'_1)f^*(E_2 - E'_2)$ , como queríamos.

Em  $\tilde{K}(X)$ , a estrutura de produto ainda não foi apresentada. Portanto, até o momento, considere o funtor  $\tilde{K}$  como funtor entre a categoria dos espaços Hausdorff compactos e a categoria dos grupos abelianos. Isto é,  $f^*$  é apenas homomorfismo de grupo. Essa informação não afetará os próximos resultados porque, para os resultados seguintes acerca de uma teoria de cohomologia, o fato importante é que  $\tilde{K}$  seja funtor que vá para a categoria de grupos abelianos.

3.  $1^* = 1$  Note que  $1^*(E) \approx E$ , onde  $1$  representa a identidade. De fato, dado um fibrado vetorial  $p : E \rightarrow X$ , temos que  $1^*(E) \approx \{(x, v) \in X \times E \mid x = p(v)\} \approx E$

Portanto, em  $K(X)$ ,  $1^*(E - F) = 1^*E - 1^*F = E - F$  e, em  $\tilde{K}(X)$ ,  $1^*([E]) = [1^*(E)] = [E]$

4.  $(fg)^* = g^*f^*$

Segue diretamente do primeiro item da Proposição 1.3.4:

Em  $K(X)$ ,  $(fg)^*(E - E') = (fg)^*(E) - (fg)^*(E') = g^*f^*(E) - g^*f^*(E') = g^*(f^*E - f^*E') = g^*(f^*(E - E'))$ . Em  $\tilde{K}(X)$ ,  $(fg)^*[E] = [(fg)^*E] = [g^*(f^*E)] = g^*[f^*E] = g^*(f^*[E])$ .

5. se  $f$  e  $g$  são homotópicos, então  $f^* = g^*$

Por aplicação do Teorema 1.3.6, temos que  $f^*E \approx g^*E$  para todo fibrado vetorial  $E$ . Assim, em  $K(X)$  temos  $f^*(E - E') = f^*(E) - f^*(E') = g^*(E) - g^*(E') = g^*(E - E')$  e em  $\tilde{K}(X)$  temos  $f^*[E] = [f^*E] = [g^*E] = g^*[E]$ , como queríamos.

### 2.1.2 Homomorfismos importantes

O objetivo desta subseção é apresentar alguns homomorfismos e isomorfismos que contribuirão para a percepção de  $\tilde{K}(X)$  como anel. Além disso, ao final  $K(S^2)$  e  $\tilde{K}(S^2)$  serão relacionados de forma que  $\tilde{K}(S^2)$  será visto como núcleo de homomorfismo de anel com domínio  $K(S^2)$ . Através dessa relação será possível explicitar quais os seu geradores, informação que será importante para o Teorema da Periodicidade de Bott.

**Proposição 2.1.17.** *Todo elemento de  $K(X)$  pode ser representado como  $\hat{E} - \varepsilon^n$  para algum número natural  $n$  e algum fibrado vetorial  $\hat{E}$ .*

**Demonstração:** Se  $E - E' \in K(X)$ , existe fibrado vetorial  $E''$  tal que  $E' \oplus E'' \approx \varepsilon^n$  pelo Teorema 1.2.15. Isso significa que  $E - E' = (E - E') + (E'' - E'') = (E \oplus E'') - (E' \oplus E'') = (E \oplus E'') - \varepsilon^n$ , como queríamos.  $\square$

**Proposição 2.1.18.** *Existe um homomorfismo natural de grupos  $\varphi : K(X) \rightarrow \tilde{K}(X)$  definido por*

$$\varphi(E - \varepsilon^n) = [E], \text{ onde } [E] \text{ é a classe do fibrado vetorial } E \text{ para todo } E - \varepsilon^n \in K(X)$$

**Demonstração:** A função está bem definida porque se  $E - \varepsilon^n = F - \varepsilon^m$ , então  $E \oplus \varepsilon^m \approx_s F \oplus \varepsilon^n \Rightarrow E \oplus \varepsilon^m \oplus \varepsilon^l \approx F \oplus \varepsilon^n \oplus \varepsilon^l$  para algum número natural  $l$ . Dessa forma,  $E \oplus \varepsilon^{m+l} \approx F \oplus \varepsilon^{n+l}$  e, portanto,  $E \sim F$ . Isto é,  $\varphi(E - \varepsilon^n) = [E] = [F] = \varphi(F - \varepsilon^m)$ , como queríamos.

$\varphi$  de fato é homomorfismo porque  $\varphi(E_1 - \varepsilon^n + E_2 - \varepsilon^m) = [E_1 \oplus E_2] = [E_1] \oplus [E_2] = \varphi(E_1 - \varepsilon^n) \oplus \varphi(E_2 - \varepsilon^m)$ .  $\square$

**Corolário 2.1.19.** *Temos que  $\text{Ker}(\varphi) \approx \mathbb{Z}$ .*

**Demonstração:**  $\text{Ker}(\varphi)$  é composto por todo  $E - \varepsilon^n$  tal que  $E \sim \varepsilon^0$ . Isso significa que  $E \oplus \varepsilon^j \approx \varepsilon^k$  para um certo par de números naturais  $k$  e  $j$ . Como a dimensão de  $\varepsilon^k$  é maior que a dimensão de  $\varepsilon^j$ , esse isomorfismo é o mesmo que dizer que  $E \approx_s \varepsilon^m$  para  $m = k - j$ . Portanto,  $E = \varepsilon^m$  e  $\text{Ker}(\varphi) = \{\varepsilon^m - \varepsilon^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ .

Note que  $\{\varepsilon^m - \varepsilon^n \mid m, n \in \mathbb{N}\} \approx \mathbb{Z}$ , pois  $\varepsilon^m - \varepsilon^n = \varepsilon^{m'} - \varepsilon^{n'}$  se e somente se  $m - n = m' - n'$ . De fato,  $\varepsilon^{m+m'} \approx \varepsilon^m + \varepsilon^{m'} \approx_s \varepsilon^n + \varepsilon^{n'} \approx \varepsilon^{n+n'}$  se e somente se as dimensões de  $\varepsilon^{m+m'}$  e  $\varepsilon^{n+n'}$  forem iguais, isto é, se  $m + m' = n + n'$ . Assim, ao somar  $\varepsilon^l$  para qualquer  $l$  natural, temos  $k = m + m' + l = n + n' + l$  e  $\varepsilon^k \approx \varepsilon^m + \varepsilon^{m'} + \varepsilon^l \approx \varepsilon^n + \varepsilon^{n'} + \varepsilon^l \approx \varepsilon^k$ .

Portanto, o mapa  $f : \text{Ker}(\varphi) \rightarrow \mathbb{Z}$  definido por

$$f(\varepsilon^m - \varepsilon^n) = m - n \text{ para todo } \varepsilon^m - \varepsilon^n \in \text{Ker}(\varphi)$$

é um isomorfismo de grupos. □

**Corolário 2.1.20.** *Temos que  $\tilde{K}(X)$  é isomorfo a  $K(X)/Ker \varphi$*

**Demonstração:** Pode-se notar que  $\varphi$  é sobrejetora pois todo  $[E] \in \tilde{K}(X)$  pode ser escrito como  $\varphi(E - \varepsilon^n)$  para qualquer natural  $n$

Assim, pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, é possível concluir que  $\tilde{K}(X)$  isomorfo a  $K(X)/Ker \varphi$ . □

**Proposição 2.1.21.** *Temos que  $\psi : K(X) \rightarrow K(x_0)$ , com  $x_0 \in X$  definido por*

$$\psi(E_1 - E_2) = E_1|_{x_0} - E_2|_{x_0} \text{ para todo } E_1 - E_2 \in K(X)$$

*é homomorfismo de grupos.*

*Aqui  $E_x$  é a restrição de um fibrado vetorial  $E$  à fibra de  $x$ , isto é, dado o fibrado vetorial  $p : E \rightarrow X$ ,  $E_x = E|_{p^{-1}(x)}$ .*

**Demonstração:** Este mapa está bem definido pois, se  $E_1 - E'_1 = E_2 - E'_2$ , temos  $E_1 \oplus E'_2 \approx_s E_2 \oplus E'_1 \Rightarrow E_1 \oplus E'_2 \oplus \varepsilon^n \approx E_2 \oplus E'_1 \oplus \varepsilon^n$  para algum número natural  $n$ . Como o isomorfismo se restringe a isomorfismos vetoriais em cada fibra, temos ainda  $E_1|_{x_0} \oplus E'_2|_{x_0} \oplus \varepsilon^n|_{x_0} \approx (E_1 \oplus E'_2 \oplus \varepsilon^n)|_{x_0} \approx (E_2 \oplus E'_1 \oplus \varepsilon^n)|_{x_0} \approx E_2|_{x_0} \oplus E'_1|_{x_0} \oplus \varepsilon^n|_{x_0}$ . Portanto,  $E_1|_{x_0} \oplus E'_2|_{x_0} \approx_s E_2|_{x_0} \oplus E'_1|_{x_0} \Rightarrow E_1|_{x_0} - E'_1|_{x_0} = E_2|_{x_0} - E'_2|_{x_0}$ , como queríamos.

Além disso,  $\psi$  é homomorfismo pois  $\psi(E_1 - E'_1 + E_2 - E'_2) = \psi(E_1 \oplus E_2 - E'_1 \oplus E'_2) = (E_1 \oplus E_2)|_{x_0} - (E'_1 \oplus E'_2)|_{x_0}$ . Além disso,  $(E_1 \oplus E_2)|_{x_0} - (E'_1 \oplus E'_2)|_{x_0} = E_1|_{x_0} \oplus E_2|_{x_0} - E'_1|_{x_0} \oplus E'_2|_{x_0}$  porque a restrição da soma de fibrados é isomorfa à soma da restrição deles por definição. Por fim, como  $E_1|_{x_0} \oplus E_2|_{x_0} - E'_1|_{x_0} \oplus E'_2|_{x_0} = E_1|_{x_0} - E'_1|_{x_0} + E_2|_{x_0} - E'_2|_{x_0} = \psi(E_1 - E'_1) + \psi(E_2 - E'_2)$ , conclui-se que o mapa é homomorfismo. □

**Corolário 2.1.22.** *Temos que  $\psi : K(X) \rightarrow K(x_0)$  é isomorfismo quando restrito a  $\{\varepsilon^m - \varepsilon^n | m, n \in \mathbb{N}\} = Ker(\varphi) \approx \mathbb{Z}$ , isto é,  $K(x_0)$  é isomorfo a  $\mathbb{Z}$ . Denotemos  $\psi|_{Ker \varphi}$  como  $\psi'$*

**Demonstração:** Qualquer fibrado vetorial de dimensão  $m$  no ponto  $x$ , quando restrito a esse ponto, possui como espaço total um espaço vetorial de dimensão  $m$ . Agora, o fibrado vetorial  $\varepsilon^m$  restrito à base  $x$  também possui um espaço vetorial de mesma dimensão. Assim, há um isomorfismo óbvio entre  $E|x$  e  $\varepsilon^m$  que leva base em base dos espaços vetoriais que são espaços totais para cada um deles.

Assim, a restrição a  $Ker \varphi$  é sobrejetora pois, pelo parágrafo anterior, qualquer  $E - F \in K(x_0)$  é tal que  $E - F = \varepsilon^m - \varepsilon^n$  se  $E$  e  $F$  possuem dimensões  $m$  e  $n$  respectivamente. Além disso, é injetora porque se  $\varepsilon^m - \varepsilon^{m'} \neq \varepsilon^n - \varepsilon^{n'}$ , isto é,  $m + n' \neq n + m'$ , então as restrições a  $x_0$  também não

têm como ser iguais pela diferença da dimensão de  $\varepsilon^m|_{x_0} \oplus \varepsilon^{m'}|_{x_0}$  e de  $\varepsilon^n|_{x_0} \oplus \varepsilon^{m'}|_{x_0}$ . Se não possuem a mesma dimensão, não é possível serem equivalentes por  $\cong$  e, portanto,  $\varepsilon^m|_{x_0} - \varepsilon^{m'}|_{x_0} \neq \varepsilon^n|_{x_0} - \varepsilon^{m'}|_{x_0}$ , como queríamos.  $\square$

**Proposição 2.1.23.** *O homomorfismo  $\psi$  apresentado em 2.1.21 é de fato um homomorfismo de anel.*

**Demonstração:** Uma parte já foi provada na Proposição 2.1.21. De forma bem direta, temos que  $\psi(\varepsilon^0) = \varepsilon^0$  e resta mostrar que  $\psi$  mantém a estrutura do produto.

$\psi((E_1 - E_2)(F_1 - F_2)) = \psi(E_1 \times F_1 \oplus E_2 \otimes F_2 - E_2 \otimes F_1 \oplus E_1 \otimes F_2) = (E_1 \times F_1 \oplus E_2 \otimes F_2)|_{x_0} - (E_2 \otimes F_1 \oplus E_1 \otimes F_2)|_{x_0}$ . De forma semelhante com o procedimento da Proposição 2.1.21, sabemos que  $(E_1 \times F_1 \oplus E_2 \otimes F_2)|_{x_0} - (E_2 \otimes F_1 \oplus E_1 \otimes F_2)|_{x_0} = (E_1 \times F_1)|_{x_0} \oplus (E_2 \otimes F_2)|_{x_0} - (E_2 \otimes F_1)|_{x_0} \oplus (E_1 \otimes F_2)|_{x_0}$ .

Resta verificar que, para quaisquer fibrados vetoriais  $p_1 : E \rightarrow X$  e  $p_2 : F \rightarrow X$ , temos que  $(E \otimes F)|_{x_0} \cong E|_{x_0} \otimes F|_{x_0}$ . Como a restrição a um ponto  $x$  do fibrado vetorial  $E \otimes F$  é  $p_1^{-1}(x) \otimes p_2^{-1}(x)$ , esse isomorfismo também segue facilmente da definição de produto tensorial.

Assim,  $(E_1 \times F_1)|_{x_0} \oplus (E_2 \otimes F_2)|_{x_0} - (E_2 \otimes F_1)|_{x_0} \oplus (E_1 \otimes F_2)|_{x_0} = (E_1|_{x_0} \otimes F_1|_{x_0}) \oplus (E_2|_{x_0} \otimes F_2|_{x_0}) - (E_2|_{x_0} \otimes F_1|_{x_0}) \oplus (E_1|_{x_0} \otimes F_2|_{x_0}) = (E_1|_{x_0} - E_2|_{x_0})(F_1|_{x_0} - F_2|_{x_0}) = \psi(E_1 - E_2)\psi(F_1 - F_2)$ , como queríamos.  $\square$

**Observação 2.1.24.** A proposição anterior implica que  $\ker(\psi)$  é um ideal.

**Lema 2.1.25.** [Lema da decomposição] *Dada uma sequência curta exata  $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \rightarrow 0$  de grupos abelianos, temos que, se existir um homomorfismo  $p : B \rightarrow A \oplus C$  tal que  $p \circ i = \text{Id}_A : A \rightarrow A$  identidade, então existe um isomorfismo  $B \cong A \oplus C$  que faz o diagrama abaixo comutar:*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & B & & & \\
 & & i \nearrow & & \searrow j & & \\
 0 & \longrightarrow & A & & & C & \longrightarrow 0 \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \\
 & & & A \oplus C & & & 
 \end{array}$$

Aqui, o mapa  $A \rightarrow A \oplus C$  leva todo  $a \in A$  em  $(a, 0_C)$  e o mapa  $A \oplus C \rightarrow A$  leva todo  $(a, c) \in A \oplus C$  em  $a$ .

**Demonstração:** Defina o mapa  $\rho : B \rightarrow A \oplus C$  por  $\rho(b) = (p(b), j(b))$ .

Dado esse mapa, o diagrama realmente comuta. Basta verificar que ele de fato é um isomorfismo de grupos.

Ele é homomorfismo porque  $p$  e  $j$  são ambos homomorfismos. Resta verificar que  $\rho$  é mapa bijetor.

Primeiramente, note que  $B = \text{Ker } p \oplus \text{Im } i$ :

Temos que  $\text{Ker } p \cap \text{Im } i = \{0\}$  porque  $p \circ i$  é mapa identidade e, portanto, só zera em 0. Assim, faz sentido escrever a soma direta entre esses grupos. Obviamente,  $\text{Ker } p \oplus \text{Im } i \subset B$  por ser espaço composto de soma de elementos do grupo  $B$ . Resta mostrar que  $B \subset \text{Ker } p \oplus \text{Im } i$ . De fato, para todo  $b \in B$ ,  $b = (b - i \circ p(b)) + i \circ p(b)$ . onde  $i(p(b)) \in \text{Im } i$  e  $b - i \circ p(b) \in \text{Ker } p$  porque  $p(b - i \circ p(b)) = p(b) - (p \circ i)(p(b)) = p(b) - p(b) = 0$ .

Assim, todo  $b \in B$  é tal que existe único  $a \in A$  e existe único  $k \in \text{Ker } p$  de forma que  $b = k + i(a)$

Dessa forma,  $\rho(b) = \rho(k + i(a)) = (p(k + i(a)), j(k + i(a))) = (p(k) + p(i(a)), j(k) + j(i(a)))$ , onde  $p(k) = 0$ ,  $p \circ i = \text{Id}_A$  conforme enunciado e  $j \circ i = 0$  pela sequência  $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C$  ser exata, isto é,  $\text{Im } i = \text{Ker } j$ . Ou seja,  $\rho(b) = (a, j(k))$ .

Basta notar que todo  $c \in C$  pode ser escrito como  $j(k)$  para algum  $k \in \text{Ker } p$ : como  $j$  é sobrejetor, para todo  $c \in C$  existe  $b = k + i(a)$  para algum  $k \in \text{Ker } p$  e para algum  $a \in A$  tal que  $c = j(b) = j(k + i(a)) = j(k) + j(i(a)) = j(k)$  pois  $j \circ i = 0$ .

Dessa forma,  $\rho$  é claramente sobrejetor. Para que seja injetor resta que a intersecção de  $j$  a  $\text{Ker } p$  seja um mapa injetor. De fato, se  $j(k) = 0$  para algum ponto  $k$ , temos que  $k \in \text{Ker } j = \text{Im } i$ . Como  $\text{Im } i \cap \text{Ker } p = 0$ , o homomorfismo que vem da restrição de  $j$  a  $\text{Ker } p$  só zera em 0 e, portanto, é injetor como queríamos. conclui-se assim o resultado desejado.  $\square$

**Lema 2.1.26.** *Temos que  $K(X)$  é isomorfo a  $\tilde{K}(X) \oplus K(x_0)$ , que por sua vez é isomorfo a  $\tilde{K}(X) \oplus \mathbb{Z}$ .*

**Demonstração:** Primeiramente, note que a sequência  $0 \rightarrow K(x_0) \xrightarrow{(\psi')^{-1}} K(X) \xrightarrow{\varphi} \tilde{K}(X) \rightarrow 0$  é exata. Relembre que  $\psi'$  é isomorfismo, conforme demonstrado no Corolário 2.1.22, isto é, a imagem de  $(\psi')^{-1}$  é exatamente o núcleo de  $\varphi$ . Além disso, já vimos que  $\varphi$  é sobrejetor.

Note ainda que existe o mapa  $\psi : K(X) \rightarrow K(x_0)$  tal que  $\psi \circ (\psi')^{-1} = \psi \circ (\psi|_{\text{Ker } \varphi})^{-1} : K(x_0) \rightarrow K(x_0)$  é mapa identidade

De fato, estamos nas hipóteses do Lema 2.1.25 e, com isso, obtemos um isomorfismo conforme demonstrado no diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & K(X) & & & \\
 & & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & (\psi')^{-1} & & \varphi & & \\
 0 & \longrightarrow & K(x_0) & & & \tilde{K}(X) & \longrightarrow 0 \\
 & & \swarrow \psi & & \searrow & & \\
 & & & K(x_0) \oplus \tilde{K}(X) & & & \\
 & & & \downarrow \simeq & & & \\
 & & & & & & 
 \end{array}$$

Assim, segundo a demonstração do Lema anterior, obtemos um isomorfismo  $g : K(X) \rightarrow K(x_0) \oplus \tilde{K}(X)$  definido por  $g(E - E') = (\psi(E - E'), \varphi(E - E'))$  para todo  $E - E' \in K(X)$ .

□

**Corolário 2.1.27.** *Temos que  $\tilde{K}(X)$  é um grupo isomorfo ao ideal  $\text{Ker } \psi$ .*

**Demonstração:** O isomorfismo  $g : K(X) \rightarrow K(x_0) \oplus \tilde{K}(X)$  do Lema 2.1.26 anterior, definido por  $g(E - E') = (\psi(E - E'), \varphi(E - E'))$ , quando restrito a  $\text{Ker } \psi$ , possui como imagem o produto de um ponto (o elemento neutro de  $K(x_0)$ ) com  $\tilde{K}(X)$ .

Note que, de fato, o mapa  $g|_{\text{Ker } \psi} : \text{Ker } \psi \rightarrow \{\varepsilon^0|_{\{x_0\}}\} \oplus \tilde{K}(X)$  é sobrejetor porque todo  $E - E' \in \text{Ker } \psi$  é simplesmente composto por dois fibrados vetoriais  $E$  e  $E'$  que possuem a mesma dimensão na fibra sobre  $x_0$  e, assim, dado qualquer  $[E] \in \tilde{K}(X)$ , se a dimensão da fibra de  $E$  em  $x_0$  for  $n$ , basta fazer a imagem de  $E - \varepsilon^n$  por  $g|_{\text{Ker } \psi}$  que chegaremos em qualquer ponto da imagem desejado.

Finalmente, concluímos que essa restrição é isomorfismo entre  $\text{Ker } \psi$  e  $\tilde{K}(X)$ . □

Assim, também é possível concluir que  $\tilde{K}(X)$  é anel. É possível tirar estrutura de anel a partir do isomorfismo:

**Observação 2.1.28.** Dado o isomorfismo  $g|_{\text{Ker } \psi} : \text{Ker } \psi \rightarrow \{0\} \times \tilde{K}(X)$ , quando ele é composto com a projeção em  $\tilde{K}(X)$ , isto é, o isomorfismo  $h : \{0\} \times \tilde{K}(X) \rightarrow \tilde{K}(X)$ , pode-se definir o isomorfismo  $\bar{g} = h \circ g|_{\text{Ker } \psi} : \text{Ker } \psi \rightarrow \tilde{K}(X)$ . Note ainda que, pela definição de  $g$  como  $\psi \times \varphi$ , temos que  $\bar{g} = \varphi$ , como anteriormente definido em 2.1.18.

Assim, define-se um produto em  $\tilde{K}(X)$  a partir do produto existente no anel  $\text{Ker } \psi$ :

Dados  $[E]$  e  $[E']$  classes quaisquer em  $\tilde{K}(X)$ , defina o produto entre elas como  $[E][E'] = \varphi(\varphi^{-1}[E]\varphi^{-1}[E'])$ .

As propriedades de anel de  $\text{Ker } \psi$  são assim passadas para  $\tilde{K}(X)$ .

## 2.2 Os axiomas

Neste momento, uma teoria de cohomologia será definida a partir dos axiomas, sem maior aprofundamento.

### Complexo CW

**Definição 2.2.1** (Células de dimensão  $n$ ). Uma **n-célula aberta** ou uma **célula de dimensão  $n$  aberta** é qualquer espaço topológico homeomorfo à bola unitária de dimensão  $n$ , que é  $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ .

Uma **n-célula fechada** ou uma **célula de dimensão  $n$  fechada** é qualquer espaço topológico homeomorfo ao fecho da bola unitária de dimensão  $n$ , que é  $\overline{B^n}$ .

**Definição 2.2.2** (Complexo CW).  $X$  é um complexo CW se é construído da seguinte maneira:

1. Inicialmente, seja  $X^0$  um conjunto discreto, cujos pontos são 0-células.
2. Indutivamente, forme o **n-esqueleto**  $X^n$ , em que  $X^n$  é construído a partir de  $X^{n-1}$  através da colagem de n-células  $e_\alpha^n$  via mapas  $\varphi_\alpha : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ . Isto é,  $X^n$  é o espaço quociente da união disjunta  $X^{n-1} \sqcup_{\alpha} e_\alpha^n$ , em que  $e_\alpha^n$  é uma n-célula aberta, sob a identificação  $x \sim \varphi_\alpha(x)$  para todo  $x \in \partial e_\alpha^n$ , em que esse bordo é homeomorfo a  $S^{n-1}$ .
3. Esse processo indutivo pode parar em algum inteiro positivo  $n$ , de forma que  $X = X^n$  para este inteiro, ou o processo pode continuar indefinidamente, de forma que  $X = \bigcup_n X^n$ . Nesse último caso, a topologia de  $X$  é a topologia fraca, isto é: todo  $A \subset X$  é aberto se e somente se  $A \cap X^n$  é aberto para todo inteiro positivo  $n$ .

**Exemplo:** um 1-esqueleto  $X^1$  é um grafo, em que é permitido haver alguns pontos não conectados por retas. Em  $X^1$ , cada  $e_\alpha^1$  é homeomorfo a uma linha e o mapa  $\varphi_\alpha$  leva suas pontas em algum dos pontos do anterior  $X^0$ .

**Definição 2.2.3** (Par CW). Dado um complexo CW  $X$ , se  $A \subset X$  é um subespaço fechado e união de células de  $X$ , então  $(X, A)$  é um **par CW**.

**Definição 2.2.4** (Axiomas para Cohomologia). Uma **teoria de cohomologia generalizada** é uma sequência de funtores contravariantes  $F^n$  que partem de complexos CW para grupos abelianos junto com uma transformação natural  $\delta : F^n(A) \rightarrow F^{n+1}(X/A)$  para pares CW  $(X, A)$  que satisfazem os seguintes axiomas:

1. Se  $f, g : X \rightarrow Y$  são homotópicos, então  $f^* = g^* : F^n(Y) \rightarrow F^n(X)$
2. Para todo par CW  $(X, A)$ , existe uma sequência longa exata

$$\dots \xrightarrow{\delta} F^n(X/A) \xrightarrow{q^*} F^n(X) \xrightarrow{i^*} F^n(A) \xrightarrow{\delta} F^{n+1}(X/A) \xrightarrow{q^*} \dots$$

com  $i$  inclusão e  $q$  mapa quociente.

3. Para toda soma wedge  $X = \vee_\alpha X_\alpha$  com as inclusões  $i_\alpha : X_\alpha \rightarrow X$ , o mapa produto  $\prod_\alpha i_\alpha^* : F^n(X) \rightarrow \prod_\alpha F^n(X_\alpha)$  é um isomorfismo para cada inteiro  $n$

A soma wedge será definida na Seção 2.2.3. Por hora, focaremos em como definir os funtores  $\tilde{K}^n$ , com  $n \in \mathbb{Z}$  e  $\tilde{K}^0 = \tilde{K}$  que satisfazem o segundo axioma descrito acima.

### 2.2.1 Sequência exata induzida por cones iterados

A seguir iremos definir uma sequência de funtores que satisfaz esses axiomas. De início, pensemos em alguns resultados que conduzem a funtores que irão satisfazer a sequência exata que uma Teoria de Cohomologia possui.

Ao final desta subseção teremos verificado a validade do segundo axioma listado na Definição 2.2.4 para essa sequência de funtores.

**Lema 2.2.5.** [Teorema da Extensão de Tietze] *Se  $X$  é espaço normal,  $Y \subset X$  é subespaço fechado e  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  é mapa contínuo, então existe um mapa contínuo  $g : X \rightarrow \mathbb{C}^n$  tal que  $g|_Y = f$ .*

**Demonstração:** Mostremos para o caso em que  $n = 1$ :

O mapa  $g$  pode ser construído a partir de uma sequência de funções que se aproxima de  $f$ .

Sejam  $s_0 = \sup\{|f(y)| : y \in Y\}$ ,  $G_0 = \{y \in Y | f(y) \geq \frac{s_0}{3}\}$ ,  $L_0 = \{y \in Y | f(y) \leq -\frac{s_0}{3}\}$ .

$G_0$  e  $L_0$  são fechados, uma vez que são pré imagem por fechado de função contínua, e são disjuntos. Como  $X$  é espaço normal, isso nos permite aplicar o Lema de Urysohn, que diz que existe uma função  $h_0 : X \rightarrow [-\frac{s_0}{3}, \frac{s_0}{3}]$  contínua tal que  $h_0 = \frac{s_0}{3}$  em  $G_0$ ,  $h_0 = -\frac{s_0}{3}$  em  $L_0$ .

Isto é, para todo  $x \in X$  e todo  $y \in Y$  vale que  $|h_0(x)| \leq \frac{s_0}{3}$  e que  $|f(y) - h_0(y)| \leq 2\frac{s_0}{3} = \frac{2s_0}{3} = s_1$  pois fora de  $L_0$  e de  $G_0$  as normas máximas que  $f$  e de  $h_0$  podem atingir são  $\frac{s_0}{3}$  nos dois casos e, em  $G_0$  e em  $L_0$ ,  $f(y) \in [-s_0, \frac{s_0}{3}]$  com  $h_0(y) = \frac{s_0}{3}$  no primeiro caso ou  $f(y) \in [-\frac{s_0}{3}, s_0]$  e  $h_0(y) = -\frac{s_0}{3}$  no segundo caso. Assim, tanto em  $G_0$  como em  $L_0$ , a norma máxima de  $f(y) - h_0(y)$  é  $\frac{s_0}{3}$  também.

Agora, é possível tomar  $s_1$  para construir uma função  $h_1$  da mesma forma. Se  $G_1 = \{y \in Y | f(y) - h_0(y) \geq \frac{s_1}{3}\}$ ,  $L_1 = \{y \in Y | f(y) - h_0(y) \leq -\frac{s_1}{3}\}$  Construímos  $h_1$  pelo Lema de Urysohn, com valor  $\frac{s_1}{3}$  em  $G_1$  e  $-\frac{s_1}{3}$  em  $L_1$ . Tomamos  $s_2$  como valor tal que  $|f(y) - h_0(y) - h_1(y)| \leq s_2$ . Isto é, como  $|f(y) - h_0(y) - h_1(y)| \leq 2\frac{s_1}{3}$  pela mesma análise feita anteriormente quando encontramos  $s_1$ , temos que  $s_2 = \frac{2s_1}{3}$ . De forma sucessiva, é possível construir  $s_n = 2\frac{s_{n-1}}{3} = (\frac{2}{3})^n s_0$

A partir deste momento, é possível proceder de forma indutiva construindo funções  $h_n$  a partir de  $s_n$  tais  $G_n = \{y \in Y | f(y) - h_0(y) - \dots - h_{n-1}(y) \geq \frac{s_n}{3}\}$ ,  $L_n = \{y \in Y | f(y) - h_0(y) - \dots - h_{n-1}(y) \leq -\frac{s_n}{3}\}$  e  $h_n$  pode ser construída por aplicação do Lema de Urysohn, de forma que  $h_n : X \rightarrow [-\frac{s_n}{3}, \frac{s_n}{3}]$  é função contínua tal que  $h_n = \frac{s_n}{3}$  em  $G_n$  e  $h_n = -\frac{s_n}{3}$  em  $L_n$ .

De fato,  $|f(y) - h_0(y) - \dots - h_n(y)| \leq 2\frac{s_{n-1}}{3} = s_n$  e  $|h_n| \leq \frac{s_n}{3}$ .

Indutivamente, definindo as funções  $g_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  como  $g_n = h_0 + h_1 + \dots + h_n$ , temos que a sequência  $(F_n)_n$  é sequência de Cauchy pois supondo  $n \geq m$ , temos

$|g_n - g_m| = |h_{m+1} + \dots + h_n| \leq |h_{m+1}| + \dots + |h_n| \leq \frac{s_{m+1}}{3} + \dots + \frac{s_n}{3} = (\frac{2}{3})^{m+1} \frac{s_0}{3} + \dots + (\frac{2}{3})^n \frac{s_0}{3} \leq ((\frac{2}{3})^{m+1}) \frac{s_0}{3}$ , que tende à zero quando  $m \rightarrow \infty$  ou, em outras palavras, para todo número real  $\varepsilon > 0$ , existe um inteiro positivo  $N$  tal que, se  $m > N$  (e conseqüentemente  $n > N$  também), temos que  $|g_n - g_m| < \varepsilon$ , como queríamos.

Como o espaço das funções contínuas em  $X$  é um espaço métrico completo com a norma do supremo, essas funções convergem uniformemente para uma função  $g$ . Em especial, essa função  $g$  é igual a  $f$  em  $Y$ , porque vimos que  $|f(y) - g_n(y)| \leq (\frac{2}{3})^n s_0$ , cujo limite é zero quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto,  $g$  é uma extensão de  $f$ , como queríamos encontrar.

Caso  $n > 1$ , basta escrever a função como  $f = (f_1, \dots, f_n)$  onde  $f_1, \dots, f_n : Y \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas e podem ser estendidas para  $X$  pelo argumento anterior. Se  $g_i$  estende  $f_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , então  $(g_1, \dots, g_n)$  estende  $f$ . □

**Observação 2.2.6** (Caso complexo). No enunciado acima, se é dada uma função  $f$  com contra-domínio  $\mathbb{C}^n$ , basta considerar  $\phi$  o isomorfismo natural entre  $\mathbb{C}^n$  e  $\mathbb{R}^{2n}$ , estender  $\phi \circ f$  e depois tomar a imagem inversa por  $\phi$  da extensão encontrada. Esta será a extensão de  $f$ .

**Proposição 2.2.7.** *Se  $X$  é um compacto Hausdorff e  $A \subset X$  é um subespaço fechado, então os mapas inclusão  $i$  e quociente  $q$*

$$A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{q} X/A$$

*induzem os homomorfismos  $q^*$  e  $i^*$  conforme definidos na Observação 2.1.16 e estes mapas são tais que o núcleo de  $i^*$  é igual à imagem que  $q^*$*

$$\tilde{K}(X/A) \xrightarrow{q^*} \tilde{K}(X) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}(A)$$

*Isto é, tal sequência de homomorfismos acima é exata.*

**Demonstração:** Mostremos inicialmente que  $Im\ q^* \subset Ker\ i^*$ . Isso é equivalente a provar que  $i^* \circ q^* = 0$ , função nula.

Note que, definindo os mapas  $p : A \rightarrow A/A$  que leva todo  $a \in A$  para o único ponto pertencente a  $A/A$  e  $j : A/A \rightarrow X/A$  que é uma inclusão, o quadrado a seguir comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i} & X \\
 p \downarrow & & \downarrow q \\
 A/A & \xrightarrow{j} & X/A
 \end{array}$$

Isto é, temos que  $q \circ i = j \circ p$ , pois  $i(A) = A$  e  $q(A) \in A/A$ .

Assim, também é possível concluir que o diagrama com os mapas induzidos por  $\tilde{K}$  comuta, pois se  $q \circ i = j \circ p$ , então  $(q \circ i)^* = (j \circ p)^*$  e temos que  $(q \circ i)^* = i^* \circ q^*$  e que  $(j \circ p)^* = p^* \circ j^*$ . Isto é,

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{K}(A) & \xleftarrow{i^*} & \tilde{K}(X) \\
 p^* \uparrow & & \uparrow q^* \\
 \tilde{K}(A/A) & \xleftarrow{j^*} & \tilde{K}(X/A)
 \end{array}$$

comuta. E assim, mudamos o problema para mostrar que  $p^* \circ j^* = 0$ .

Considerando que  $\tilde{K}(A/A)$  é formado por fibrados vetoriais que possuem como base apenas um ponto, todos os fibrados nessas condições devem ser isomorfos a  $\varepsilon^n$  para algum  $n$  natural e, portanto, na mesma classe de equivalência pela relação  $\sim$ . Isso significa que  $\tilde{K}(A/A)$  possui apenas um ponto, que pode ser denominado por  $[\varepsilon^0]$ , classe de  $\varepsilon^0$  trivial com base  $A/A$ .

Como  $p^*$  é homomorfismo e, portanto, leva o elemento neutro do domínio no elemento neutro do contradomínio, conclui-se que a imagem de  $p^*$  e, conseqüentemente, de  $p^* \circ j^*$  é o elemento neutro em  $\tilde{K}(A)$ , isto é, a classe por  $\sim$  do fibrado trivial de grau 0 e base  $A$ . Assim, esta também é a imagem de  $i^* \circ q^*$ , como queríamos.

Agora resta mostrar a inclusão  $\text{Ker } i^* \subset \text{Im } q^*$

Primeiramente, tome  $E \in \text{Ker } i^*$ . Isso significa que  $i^*(E) = [\varepsilon^0]$  e então  $i^*(E) = \{(e, a) \in E \times A \mid p(e) = i(a) = a\} \approx E|_A \sim \varepsilon^0$ , o que significa que a restrição sobre  $A$  do fibrado vetorial  $p : E \rightarrow X$  é estavelmente trivial. Aqui, lembre que um fibrado vetorial é estavelmente trivial quando se torna trivializável após ser somado com algum fibrado trivial, como o foi denotado na Observação 1.2.5. Assim,  $p' = p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \rightarrow A$  é estavelmente trivial.

Nesta situação, é dito que  $E \oplus \varepsilon^n$  é trivializável sobre  $A$  para algum natural  $n$ . Isto é, um fibrado vetorial trivializável sobre um subespaço da base é tal que, quando restrito a esse subespaço, se torna trivializável. Como  $E \oplus \varepsilon^n \sim E$  e como trabalharemos sobre classes pela relação  $\sim$ , então pode-se dizer sem perda de generalidade que  $E$  é trivial sobre  $A$ .

Assim, considere uma trivialização de  $E$  restrito a  $A$

$$h : p^{-1}(A) \rightarrow A \times \mathbb{C}^m$$

e considere o espaço  $E/h$  como o espaço quociente de  $E$  sob as identificações dos pontos  $h^{-1}(x, v)$  e  $h^{-1}(y, v)$  para todos  $x, y \in A$  e todo  $v \in \mathbb{C}^m$ .

Com isso, existe uma projeção  $\pi : E/h \rightarrow X/A$  definida por

$$\pi([e]) = [p(e)] \text{ para todo } [e] \in E/h \text{ que é classe de } e \in E \text{ qualquer em } E/h$$

que é um fibrado vetorial. Verifiquemos a seguir que  $\pi : E/h \rightarrow X/A$  de fato é fibrado vetorial.

Fica claro nos dois casos possíveis descritos a seguir, que  $\pi^{-1}[b]$  é espaço vetorial para todo  $[b] \in X/A$ :

**Caso 1:** Se  $b \in X \setminus A$ , no mapa  $X \rightarrow X/A$  ele é o único ponto que é levado a  $[b] \in X/A$ . Isso implica que  $\pi^{-1}[b] = \{[v] : v \in p^{-1}(b)\}$  isomorfo a  $p^{-1}(b)$  pois  $[v_1] \neq [v_2]$  para todos  $[v_1], [v_2] \in \pi^{-1}[b]$  com  $v_1 \neq v_2$  na fibra  $p^{-1}(b)$ . Pode-se verificar este fato uma vez que  $h$  restrito a fibras é isomorfismo linear, o que implica  $h(v_1) = (b, w_1)$  e  $h(v_2) = (b, w_2)$ , com  $w_1 \neq w_2$  pois  $v_1 \neq v_2$ .

**Caso 2:** Se  $b \in A$ , todo  $a \in A$  é levado para  $[b] \in X/A$  através do mapa  $X \rightarrow X/A$ . Assim,  $\pi^{-1}[b] = \{[v] : v \in p^{-1}(a'), a' \in A\}$  e vimos no caso anterior que só pode ocorrer  $[v_1] = [v_2]$  se  $v_1, v_2$  estão em fibras diferentes. De fato, como  $h$  é isomorfismo quando restrito a cada fibra, para cada  $v_1$  em uma fibra qualquer, em qualquer outra fibra há  $v_2$  tal que  $[v_1] = [v_2]$ . Como continua valendo que  $[v_1] \neq [v_2]$  se  $v_1 \neq v_2$  na mesma fibra  $p^{-1}(b)$ , então pode-se afirmar que  $\pi^{-1}[b]$  é isomorfo a  $p^{-1}(b)$ .

Para mostrar que  $E/h$  possui trivializações locais só resta mostrar que existe uma vizinhança de  $A$  sobre a qual  $E$  é trivial.

Note que fora de  $A$ , a projeção  $\pi$  possui trivializações locais vindas diretamente das trivializações locais do fibrado vetorial  $E$ :

Para todo  $x \in X \setminus A$ , existe vizinhança  $U$  de  $x$  (contida em  $X/A$ ) tal que

$$h_U : p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^m$$

é trivialização local. Como  $E/h$  só identifica pontos cujas imagens por  $p$  pertencem a  $A$  e como  $X/A$  só identifica pontos que estão em  $A$ , o mesmo mapa  $h_U$  é uma trivialização local no fibrado

vetorial  $E/h$ .

Encontrar uma trivialização local de  $E$  em uma vizinhança de  $A$  não é tão direto.

Sabemos que a trivialização de  $E$  sobre  $A$  determina seções  $s_i : A \rightarrow E$ ,  $i = 1, \dots, m$  que formam uma base em cada fibra sobre  $A$ . Explicitamente, se  $h : p^{-1}(A) \rightarrow A \times \mathbb{C}^m$  é trivialização local em  $A$  poderia-se tomar essas seções como  $s_i(x) = h^{-1}(x, e_i)$  onde  $\{e_1, \dots, e_m\}$  é uma base de  $\mathbb{C}^m$  qualquer.

Além disso, dada uma cobertura de  $A$  por abertos  $(U_j)_{j \in \Lambda}$  em  $X$  sobre os quais  $E$  é trivial, é possível escrever as trivializações locais  $h_j : p^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times \mathbb{C}^m$ ,  $j \in \Lambda$ .

Observemos agora de que forma é possível estender as seções para uma vizinhança de  $A$ . A ideia é utilizar o Teorema da Extensão de Tietze.

Para isto, note que para todo  $x \in A$  existe um aberto  $U_j$  vizinhança de  $x$  para algum  $j \in \Lambda$  sobre o qual o fibrado  $E$  é trivial e, para cada  $U_j$  é possível escolher uma vizinhança  $x \in V_x \subset U_j$  tal que  $\overline{V_x} \subset U_j$ . Temos assim a cobertura  $(V_x)_{x \in A}$  de  $A$  que permite aplicar o Teorema de Tietze:

Como, para todo  $x \in A$ ,  $\overline{V_x}$  da forma que definimos anteriormente é subespaço fechado de  $X$  normal, então  $\overline{V_x}$  também é espaço normal.

Gostaríamos de estender todo  $s_i|_{\overline{V_x} \cap A} : \overline{V_x} \cap A \rightarrow E$  com  $i = 1, \dots, m$  para o espaço  $\overline{V_x}$ .

Um problema a ser considerado é que, para entrar nas hipóteses do Teorema de Tietze, é preciso que o contradomínio da função a ser estendida seja o próprio  $\mathbb{C}^m$ .

Para isso ser resolvido, considere o mapa da trivialização local em  $V_x$ , isto é,  $h_x : p^{-1}(V_x) \rightarrow V_x \times \mathbb{C}^m$ . Com esse mapa, é possível construir a composição  $h_x \circ s_i|_{\overline{V_x} \cap A} : \overline{V_x} \cap A \rightarrow \overline{V_x} \times \mathbb{C}^m$ .

Para finalmente ter o contradomínio  $\mathbb{C}^m$ , é suficiente compor com a projeção em  $\mathbb{C}^m$ , que é  $pi_2 : V_x \times \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$  e apenas projeta em  $\mathbb{C}^m$ . Assim,  $p_2 \circ h_x \circ s_i|_{\overline{V_x} \cap A} : \overline{V_x} \cap A \rightarrow \mathbb{C}^m$  tem o contradomínio desejado.

Agora, aplicando Tietze ao mapa  $p_2 \circ h_x \circ s_i|_{\overline{V_x} \cap A} : \overline{V_x} \cap A \rightarrow \mathbb{C}^m$ , obtemos uma extensão dele, que será chamada de  $f : \overline{V_x} \rightarrow \mathbb{C}^m$ .

Por fim, é possível encontrar uma extensão da seção  $s_i|_{\overline{V_x} \cap A}$  definindo  $s_{ix} : \overline{V_x} \rightarrow \overline{V_x} \times \mathbb{C}^m$  como

$$s_{ix}(v) = h_x^{-1}(v, f(v)).$$

Em particular, pode-se tomar a restrição de  $s_{ix}|_{V_x}$  como uma forma de estender  $s_i|_{V_x \cap A}$ .

Aplicado o Teorema de Tietze, podemos prosseguir com a demonstração.

Como os  $V_x$  cobrem  $A$ , que é compacto por ser subconjunto fechado de compacto, é possível tomar uma subcobertura finita de  $\{V_x\}_{x \in X}$ . Denotemos ela por  $\{V_k\}_{k \in F}$ , onde  $F$  conjunto finito.

Também denotemos  $s_{ix}|_{V_x}$  por  $s_{ik}$  se  $V_x = V_k$  para algum  $k \in F$ . Assim, para todo  $x \in A$ , existe vizinhança  $V_k$  tal que toda seção  $s_i|_{A \cap V_k} : A \cap V_k \rightarrow E, i \in 1, \dots, m$ , pode ser estendida a  $s_{ik} : V_k \rightarrow E$ .

Por fim, é possível para todo  $i \in 1, \dots, m$  construir um mapa  $s'_i : \bigcup_{k \in F} V_k \rightarrow E$  que estende  $s_i$  a  $\bigcup_{k \in F} V_k$  vizinhança aberta de  $A$ . Esse mapa é definido da seguinte forma:

Se  $\{\varphi_k, k \in K\} \cup \{\varphi\}$  é uma partição da unidade subordinada à cobertura  $\{V_k, k \in F\} \cup \{X \setminus A\}$ , é possível definir  $s'_i$  como  $\sum_{j \in J} \varphi_k s_{ik}$ .

Observe que, como cada  $s_{ik}(b)$  é igual a  $s_i(b)$  se  $b \in A$ , de fato,  $s'_i(b)$  é igual a  $s_i(b)$  para todo  $b \in A$ . Portanto,  $\{s'_1(b), \dots, s'_m(b)\}$  forma uma base na fibra  $p^{-1}(b)$  para todo  $b \in A$ .

Pela continuidade das seções e dos mapas da partição da unidade, é possível concluir que esse mesmo conjunto também forma uma base para  $b$  próximo de  $A$ . Isto é, se  $V = \bigcup_{k \in F} V_k$ , existe  $V' \subset V$  subvizinhança aberta de  $A$  tal que  $\{s'_1(b), \dots, s'_m(b)\}$  é base para todo  $b \in V'$ .

Para ver que  $V'$  de fato existe, note que é possível definir uma função contínua  $g : V \rightarrow M_{m \times m}(\mathbb{C})$  que leva  $v \in V$  em uma matriz onde cada  $i$ -ésima linha corresponde às coordenadas de  $s'_i(v)$  em no espaço vetorial  $p^{-1}(v)$  para  $i = 1, \dots, m$ .  $g$  é contínua pois todas as seções são contínuas. Sabemos que  $\det(g(v)) \neq 0$  se  $v \in A$ , porque as linhas são linearmente independentes nesse caso. Podemos, portanto, definir o aberto  $V'$  como a pré-imagem  $(\det g)^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ , que de fato é aberto em consequência da continuidade de  $g$  e do mapa determinante. Assim,  $A \subset V'$  e as linhas da matriz  $g(v)$  são linearmente independentes para todo  $v \in V'$ , pois o determinante dessa matriz é não nulo.

Assim,  $\{s'_1(v), \dots, s'_m(v)\}$  é base para todo  $v$  em  $V'$  vizinhança de  $A$  e encontramos uma trivialização local de  $E$  em uma vizinhança aberta de  $A$  como queríamos.

Provado que  $E/h$  de fato é fibrado vetorial, a ideia agora é mostrar que  $E \sim q^*(E/h)$ . Isso de fato leva à conclusão de que  $\text{Ker } i^* \subset \text{Im } q^*$ .

De fato,  $p : E \rightarrow X$  é um fibrado vetorial que satisfaz as condições da Proposição 1.3.1 junto com o mapa  $E \rightarrow E/h$  que leva cada  $e \in E$  à sua classe de  $E/h$ . De fato, o mapa  $E \rightarrow E/h$  leva fibra em fibra através de isomorfismo vetorial.

Portanto, como  $q^*(E/h)$  é único a menos de isomorfismo, concluímos  $E \approx q^*(E/h)$  como queríamos.

$$\begin{array}{ccc}
 E & \longrightarrow & E/h \\
 p \downarrow & & \downarrow \pi \\
 X & \xrightarrow{q} & X/A
 \end{array}$$

□

Existe uma maneira de estender a sequência exata acima para a esquerda através dos mapas inclusão

$$A \hookrightarrow X \hookrightarrow X \cup CA \hookrightarrow (X \cup CA) \cup CX \hookrightarrow ((X \cup CA) \cup CX) \cup C(X \cup CA) \hookrightarrow \dots$$

onde  $CX$  é o cone de  $X$  espaço topológico, definido por  $(X \times [0, 1]) / \sim$  com  $(x, 1) \sim (y, 1)$  para todos  $x, y \in X$ , além de  $(x, t) \sim (y, s)$  sempre que  $(x, t) = (y, s)$ .

Basta então notar que existe um mapa quociente entre os espaços  $X \cup CA$  e  $X/A$ , que segue do fato de  $CA$  ser contrátil, isto é, possuir o mesmo tipo de homotopia de um ponto. Note que, de fato,  $X \cup CA/CA$  é homeomorfo a  $X/A$ .

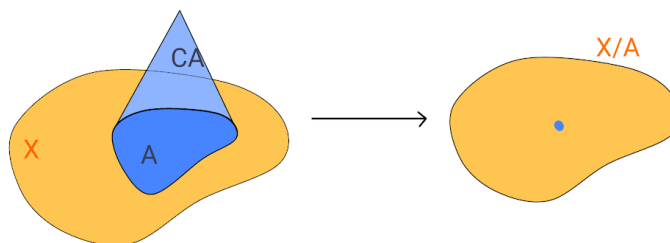


Figura 2.1: Quociente entre  $X \cup CA$  e  $X/A$

O mapa acima representado pode ser visto como o mapa que envia todos os pontos de  $CA$  em um único ponto, representado por  $A/A$  e mantém todos os pontos de  $X \setminus A$  no mesmo lugar.

Considere também  $SX$  a suspensão de um espaço topológico  $X$ , definida por  $(X \times [-1, 1]) / \sim$  com  $(x, -1) \sim (y, -1)$  e  $(x, 1) \sim (y, 1)$  para todos  $x, y \in X$ . Pode-se pensar na suspensão de um espaço topológico como um cone duplo.

Utilizaremos a notação  $S^2(X)$  para denotar  $S(SX)$ , isto é, a suspensão da suspensão de  $X$ , também conhecida como suspensão dupla de  $X$ . De forma mais geral,  $S^n(X)$  irá denotar a  $n$ -ésima suspensão  $n$  de  $X$  para qualquer inteiro positivo  $n$ .

Da mesma forma, existe um mapa quociente entre os espaços  $(X \cup CA) \cup CX$  e  $SA$ , que surge a partir da contração de  $CX$ . De fato,  $((X \cup CA) \cup CX) / CX$  é homeomorfo a  $SA$ .

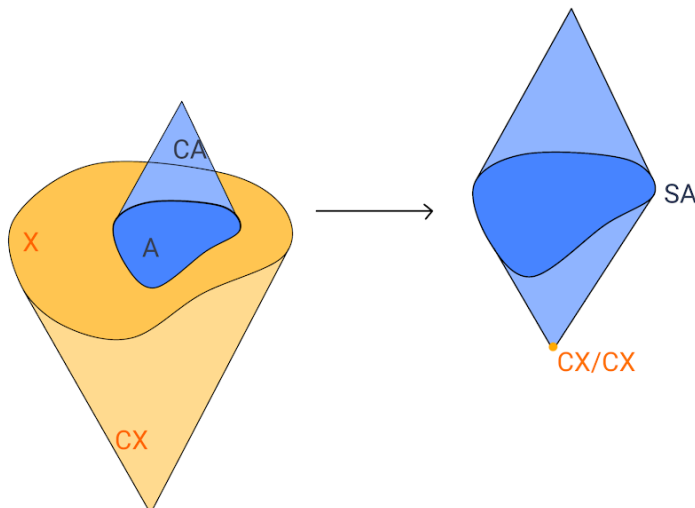


Figura 2.2: Quociente entre  $(X \cup CA) \cup CX$  e  $SA$

O mapa acima pode ser visto como o mapa que envia todo o cone  $CX$  em um ponto só. Em particular, leva a base de  $CA$ , isto é, o próprio  $A$  para esse ponto. Explicitamente, esse mapa entre  $CA$  e  $SA$  é da forma  $\overline{(a, t)} \mapsto \overline{(a, 2t)}$ , onde  $\overline{(a, t)}$  são as classes de  $CA = A \times [0, 1] / \sim$  com a relação  $(x, 1) \sim (y, 1)$  e  $\overline{(a, 2t)}$  são as classes de  $SA = A \times [0, 2] / \sim$  com a relação  $(x, 0) \sim (y, 0)$  e  $(x, 2) \sim (y, 2)$

É possível, generalizando, retirar um mapa quociente ao contrair o último cone acrescentado na sequência acima ao cone anterior. As inclusões e quocientes são importantes para que seja possível aplicar a última proposição aqui apresentada.

Teremos então a sequência de mapas

$$\begin{array}{ccccccc}
 A \hookrightarrow X \hookrightarrow X \cup CA \hookrightarrow (X \cup CA) \cup CX \hookrightarrow ((X \cup CA) \cup CX) \cup C(X \cup CA) \hookrightarrow \dots & & & & & & (2.4) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 X/A & & SA & & SX & & 
 \end{array}$$

O Lema a seguir será importante para mostrar que os mapas na vertical na verdade levam a um isomorfismo quando aplicado  $\tilde{K}$  a eles:

**Lema 2.2.8.** *Se  $A$  é contrátil, o mapa quociente  $q : X \rightarrow X/A$  induz uma bijeção  $q^* : Vect^n(X/A) \rightarrow Vect^n(X)$  para todo número natural  $n$ .*

**Demonstração:** Pelo Corolário 1.3.7, pode-se dizer que todo fibrado vetorial  $E \rightarrow X$  é trivial sobre  $A$ .

Como visto na demonstração da Proposição 2.2.7, uma trivialização  $h$  sobre  $A$  gera o fibrado vetorial  $E/h \rightarrow X/A$ .

Busquemos provar que o mapa  $\varphi : Vect^n(X) \rightarrow Vect^n(X/A)$  definido por

$$\varphi(E) = [E/h] \text{ para todo } E \in Vect^n(X)$$

está bem definido e é mapa inverso de  $q^*$ .

Para isto, é necessário verificar que:

1. a classe de isomorfismo do fibrado vetorial  $E/h$  não depende da escolha da trivialização  $h$ ;
2. se  $E \approx F$ , então  $E/h \approx F/h'$  para quaisquer fibrados vetoriais  $E$  e  $F$  de base  $X$  com trivializações  $h$  e  $h'$  sobre  $A$ , respectivamente. Isto é,  $\varphi$  está bem definido

Verificação do item 1.:

Dadas duas trivializações  $h_0$  e  $h_1$  de  $E$  sobre  $A$ , a ideia é construir um fibrado vetorial cuja base é  $(X/A) \times I$  cuja restrição a  $(X/A) \times \{0\}$  seja  $E/h_0$  e cuja restrição a  $(X/A) \times \{1\}$  seja  $E/h_1$ . Isso leva à conclusão de que os dois fibrados são isomorfos.

$$h_0 : p^{-1}(A) \rightarrow A \times \mathbb{C}^m$$

$$h_1 : p^{-1}(A) \rightarrow A \times \mathbb{C}^m$$

Temos que  $h_1 = (h_1 h_0^{-1}) h_0$ .

Como as trivializações são isomorfismos lineares em cada fibra, o mapa  $g_x := h_1 h_0^{-1}|_{\{x\} \times \mathbb{C}^m}$  pertence a  $GL_m(\mathbb{C})$  para cada  $x \in A$ .

O mapa  $g : A \rightarrow GL_m(\mathbb{C})$  definido por

$$g(x) = g_x \text{ para todo } x \in A$$

é homotópico a um mapa constante, pois  $A$  é contrátil.

Considere que  $g$  é homotópico a um mapa  $\alpha$  que envia todo  $x \in A$  no mesmo  $\alpha \in GL_m(\mathbb{C})$ .

Mostremos que essa homotopia entre  $g$  e  $\alpha$  nos dá uma homotopia entre  $h_0$  e  $h_1$ .

Seja  $H_1 : A \times I \rightarrow GL_m(\mathbb{C})$  a homotopia entre  $g$  e  $\alpha$ .

Supondo que  $\alpha$  é o mapa identidade, é possível construir o mapa  $H_2 : A \times I \rightarrow Triv(p^{-1}(A), A \times \mathbb{C}^m)$  definido por  $H_2(x, t) = H_1(x, t) \circ h_0|_{p^{-1}(x)}$  é homotopia entre  $h_0$  e  $h_1$ . Aqui,  $Triv(p^{-1}(A), A \times \mathbb{C}^m)$

$\mathbb{C}^m$ ) é o conjunto de mapas  $p^{-1}(A) \rightarrow A \times \mathbb{C}^m$  que são trivializações locais em  $A$ .  $H_2$  está bem definido porque, como  $H_1(x, t)$  é isomorfismo linear e como  $h_0$  é trivialização local, o mapa composição é isomorfismo linear em cada fibra, isto é, a restrição  $H_1(x, t) \circ h_0|_{p^{-1}(x)} : p^{-1}(x) \rightarrow \{x\} \times \mathbb{C}^m$  é isomorfismo linear para todo  $x \in A$ , o que significa que há isomorfismo de fibrados vetoriais entre  $p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \rightarrow A$  restrição do fibrado vetorial inicial e  $\pi_1 : A \times \mathbb{C}^m \rightarrow A$  fibrado vetorial trivial por conta do Lema 1.1.8. Isso confirma que as imagens do mapa  $H_2$  são trivializações locais, pois se são isomorfismos, são homeomorfismos que se restringem a isomorfismos vetoriais em cada fibra, como queríamos.

Observação: Se  $\alpha$  não é identidade,  $H_2$  seria homotopia entre  $\alpha \circ h_0$  e  $h_1$ . Neste caso, mostraríamos que  $E/(\alpha \circ h_0) \approx E/h_1$ . Porém,  $E/(\alpha \circ h_0) = E/h_0$  pois o mapa  $\alpha : X \times \mathbb{C}^m \rightarrow X \times \mathbb{C}^m$ , que é simplesmente  $Id \times \alpha$ , por  $\alpha$  ser isomorfismo vetorial, nada altera os pontos identificados apenas pelo mapa  $h_0$ :

de fato,  $h_0(u) = (x, v)$  e  $h_0(u') = (y, v)$  se e somente se  $\alpha \circ h_0(u) = (x, v')$  e  $\alpha \circ h_0(u') = (y, v')$  para certos  $v$  e  $v'$  em  $\mathbb{C}^m$ , o que leva à conclusão que  $u \sim u'$  nos dois casos.

Então, podemos supor que  $\alpha$  é o mapa identidade, já que mostrar que  $E/(\alpha \circ h_0) \approx E/h_1$  gera o mesmo resultado que mostrar que  $E/h_0 \approx E/h_1$ .

Seguindo com a suposição de que  $\alpha$  é mapa identidade, considere o fibrado vetorial  $E \times I \rightarrow X \times I$  determinado por  $p \times Id$ .

Vamos construir um mapa  $\overline{H}_2$  segundo o qual  $(E \times I)/\overline{H}_2$  é o fibrado vetorial que gostaríamos de obter.  $\overline{H}_2$  precisa ser uma trivialização local da forma  $(p \times Id)^{-1}(A \times I) \rightarrow (A \times I) \times \mathbb{C}^m$ . Note que  $(p \times Id)^{-1}(A \times I) = p^{-1}(A) \times I$  e também podemos reescrever  $(A \times I) \times \mathbb{C}^m$  como  $A \times \mathbb{C}^m \times I$  sem perda de informação, pois é somente uma troca de coordenadas. Dessa forma, pode-se definir  $\overline{H}_2 : p^{-1}(A) \times I \rightarrow A \times \mathbb{C}^m \times I$  como

$$\overline{H}_2(v, t) = (H_2(x, t)(x), t) \text{ para todos } (v, t) \in p^{-1}(x) \times I \text{ e para todo } x \in A.$$

Basta apenas verificar que  $\overline{H}_2$  de fato é uma trivialização local. De fato,  $\overline{H}_2|_{(p \times Id)^{-1}(x, t)} = \overline{H}_2|_{p^{-1}(x) \times \{t\}} = (H_2(x, t)(-), t)$ , que é isomorfismo linear pois  $H_2(x, t)$  é isomorfismo linear restrito a  $p^{-1}(x)$ . Novamente, como  $\overline{H}_2$  é um isomorfismo linear em cada fibra, ele deve ser isomorfismo entre um fibrado que é restrição de  $p \times Id$  e um fibrado vetorial trivial. Portanto, pelo mesmo argumento anterior, é trivialização local.

Agora, defina o fibrado vetorial  $(E \times I)/\overline{H}_2 \rightarrow (X/A) \times I$  da mesma forma que foi definido  $E/h$ .

Pode-se notar que  $(E \times \{0\})/\overline{H}_2$  possui as identificações  $\overline{H}_2^{-1}(x, w, 0) = (h_0^{-1}(x, w), 0) \sim (h_0^{-1}(y, w), 0) = \overline{H}_2^{-1}(y, w, 0)$ . Ainda temos que  $(E \times \{1\})/H_2$  possui as identificações  $\overline{H}_2^{-1}(x, w, 1) = (h_1^{-1}(x, w), 1) \sim (h_1^{-1}(y, w), 1) = \overline{H}_2^{-1}(y, w, 1)$ . Isto significa que é possível restringir o fibrado vetorial  $(E \times I)/H_2 \rightarrow (X/A) \times I$  a  $E/h_0 \times \{0\}$ , a partir da restrição à base  $(X/A) \times \{0\}$  e também é possível restringir o fibrado a  $E/h_1 \times \{1\}$ , com a restrição à base  $(X/A) \times \{1\}$ .

Pelo Teorema 1.3.5, é possível concluir que a restrição do fibrado às bases  $(X/A) \times \{0\}$  e  $(X/A) \times \{1\}$  resulta em fibrados vetoriais isomorfos. Portanto,  $E/h_0 \approx E/h_1$ , como queríamos.

Verificação do item 2:

Se há isomorfismo entre os fibrados vetoriais  $E$  e  $F$ , é possível definir um isomorfismo entre  $E/h$  e  $F/h$ . Considere  $p_1, p_2, \pi_1$  e  $\pi_2$  os mapas dos fibrados  $E, F, E/h$  e  $F/h'$ , respectivamente. Na demonstração da proposição anterior vimos que há isomorfismo vetorial entre  $\pi_1^{-1}([b])$  e  $p_1^{-1}(b)$  e que também há entre  $\pi_2^{-1}([b])$  e  $p_2^{-1}(b)$ . Portanto, há isomorfismo vetorial entre  $\pi_1^{-1}([b])$  e  $\pi_2^{-1}([b])$  ao compor estes isomorfismos com o isomorfismo entre  $E$  e  $F$  para todo  $b \in B$ . Segue do Lema 1.1.8 que  $E/h \approx F/h'$ .

Por fim, com os dois itens verificados, é possível concluir que  $\varphi$  de fato é mapa inverso a  $q^*$ , uma vez que, na demonstração da proposição anterior, foi mostrado que  $q^*(E/h) \approx E$  e acabamos de mostrar que escolhas diferentes de trivializações  $h$  em nada interferem as classes de isomorfismo de  $E/h$ . conclui-se assim que  $q^*$  é bijeção.  $\square$

**Corolário 2.2.9.** *Se  $A$  é contrátil,  $q^* : \tilde{K}(X/A) \rightarrow \tilde{K}(X)$  é uma bijeção:*

**Demonstração:** Da sobrejetividade de  $q^* : \text{Vect}^n(X/A) \rightarrow \text{Vect}^n(X)$ , segue a sobrejetividade de  $q^* : \tilde{K}(X/A) \rightarrow \tilde{K}(X)$ . A injetividade segue do fato de que  $q^*(E) \sim \varepsilon^0$  apenas se  $E \sim \varepsilon^0$ :

$q^*(E) \sim \varepsilon^0 \Rightarrow q^*(E) \oplus \varepsilon^n \approx \varepsilon^0 \oplus \varepsilon^n \approx \varepsilon^n$ . Note que  $\varepsilon^n \approx q^*(\varepsilon^n)$  e, portanto,  $q^*(E) \oplus \varepsilon^n \approx \varepsilon^n \Rightarrow q^*(E) \oplus q^*(\varepsilon^n) \approx q^*(\varepsilon^n) \Rightarrow q^*(E \oplus \varepsilon^n) \approx q^*(\varepsilon^n)$ . Pelo Lema anterior, como  $q^*$  é bijeção entre grupos de isomorfismo de fibrados vetoriais, conclui-se que  $E \oplus \varepsilon^n \approx \varepsilon^n$ , isto é,  $E \sim \varepsilon^0$ .  $\square$

Aplicando o Corolário 2.2.9 para os cones na cadeia (2.4), obtemos os seguintes isomorfismos desejados para se estender a sequência para a esquerda:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & \tilde{K}[(X \cup CA) \cup CX] & \cup & (C(X \cup CA)) & \rightarrow & \tilde{K}[(X \cup CA) \cup CX] & \rightarrow & \tilde{K}(X \cup CA) & \rightarrow & \tilde{K}(X) & \rightarrow & \tilde{K}(A) \\ & & \downarrow \cong & & & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & & & & \\ & & \tilde{K}(SX) & & & & \tilde{K}(SA) & & \tilde{K}(X/A) & & & & & \end{array}$$

$$\dots \longrightarrow \tilde{K}(SX) \longrightarrow \tilde{K}(SA) \longrightarrow \tilde{K}(X/A) \longrightarrow \tilde{K}(X) \longrightarrow \tilde{K}(A)$$

Verifiquemos que esta sequência de fato é exata em detalhes. Já vimos que  $\tilde{K}(X/A) \rightarrow \tilde{K}(X) \rightarrow \tilde{K}(A)$  é exata. Mas e  $\tilde{K}(SA) \rightarrow \tilde{K}(X/A) \rightarrow \tilde{K}(X)$ ? Verifiquemos que de fato a imagem do mapa à esquerda é igual ao núcleo do outro mapa nesse trecho com  $\tilde{K}(X/A)$  no meio:

As funções

$$\begin{array}{ccccc} (X \cup CA)/X & \xleftarrow{q} & X \cup CA & \xleftarrow{i} & X \\ \downarrow \text{homeomorfismo } h_1 & & \downarrow q' & & \swarrow q'' \\ SA & & X \cup CA/CA & & \\ \downarrow \text{homeomorfismo } h_2 & & \downarrow & & \\ X/A & & & & \end{array}$$

são tais que o triângulo à direita comuta, isto é,  $q'' = h_2 \circ q' \circ i$  e induzem os homomorfismos

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{K}(X \cup CA)/X & \xrightarrow{q^*} & \tilde{K}(X \cup CA) & \xrightarrow{i^*} & \tilde{K}(X) \\ \uparrow h_1^* & & \uparrow q'^* & & \swarrow q''^* \\ \tilde{K}(SA) & \xrightarrow{(h_2^*)^{-1} \circ (q'^*)^{-1} \circ q^* \circ h_1^*} & \tilde{K}(X \cup CA/CA) & & \\ \uparrow h_2^* & & \uparrow & & \\ \tilde{K}(X/A) & & & & \end{array}$$

que também comutam em consequência do diagrama anterior comutar.

Note que, no diagrama acima, os mapas verticais são todos isomorfismos. Isso ocorre ou por consequência do Corolário 2.2.9 ou porque são induzidos por homeomorfismo entre espaços topológicos.

**Observação 2.2.10.** De fato, se  $h : X \rightarrow Y$  é homeomorfismo entre  $X$  e  $Y$  compactos Hausdorff, então o homomorfismo  $h^* : \tilde{K}(Y) \rightarrow \tilde{K}(X)$  é uma bijeção e, portanto, um isomorfismo de grupos.

**Demonstração:** Verifiquemos que esse homomorfismo é sobrejetor e injetor:

Sobrejetividade:

Dada  $[E]$  classe qualquer do fibrado vetorial  $E$  por  $\sim$  em  $\tilde{K}(X)$ , gostaríamos de encontrar  $[F] \in \tilde{K}(Y)$  tal que  $h^*[F] = E$ .

Se o mapa do fibrado vetorial  $E$  é  $p : E \rightarrow X$ , considere  $F$  como o fibrado vetorial  $h \circ p : E \rightarrow Y$ . Ele é de fato um fibrado vetorial. Como  $h$  é homeomorfismo, em particular bijeção, para todo

$y \in Y$  existe único  $x \in X$  tal que  $y = h(x)$  e, portanto,  $(h \circ p)^{-1}(y) = p^{-1} \circ h^{-1}(y) = p^{-1}(x)$  é fibrado vetorial. Além disso, as trivializações locais de  $F$  seguem das trivializações locais de  $E$ :  $seg : p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^m$  é trivialização local para o fibrado vetorial  $E$ , então  $(h \times Id) \circ g : (h \circ p)^{-1}(h(U)) \rightarrow h(U) \times \mathbb{C}^m$  é trivialização local para o fibrado  $F$  pois é isomorfismo linear em cada fibra:  $h \times Id \circ g|_{(h \circ p)^{-1}(y)} = h \times Id \circ g|_{p^{-1} \circ h^{-1}(y)} = h \times Id \circ g|_{p^{-1}(x)} : p^{-1}(x) \rightarrow \{y\} \times \mathbb{C}^m$  onde  $g$  é isomorfismo linear em cada fibra e  $h$  não altera a função em  $\mathbb{C}^m$ , o que faz ela continuar sendo isomorfismo linear após a composição.

Note que, conforme foi construído o fibrado pullback em 1.3.1,  $h^*(F)$  é a classe por isomorfismo do fibrado  $\{(x, v) \in X \times E | h(x) = h \circ p(v)\}$ . Como  $h$  é homeomorfismo, em particular bijeção, esse fibrado vetorial é  $\{(x, v) \in X \times E | x = p(v)\}$ , isomorfo a  $E$ . Portanto,  $h^*(F) \approx E$  e isso acontece para qualquer representante  $E' \in [E]$  tomando  $F$  como o fibrado vetorial com base  $E'$  e cuja projeção é  $h$  composto com o mapa do fibrado  $E'$ .

Só resta verificar que se  $p : E \rightarrow X$  e  $p' : E' \rightarrow X$  são fibrados vetoriais tais que  $E \sim E'$ , então os fibrados vetoriais  $F$  e  $F'$ , que são  $h \circ p : E \rightarrow Y$  e  $h \circ p' : E' \rightarrow Y$  respectivamente, também são equivalentes pela relação  $\sim$ .

Se  $E \sim E'$ , então  $E \oplus \varepsilon^n \approx E' \oplus \varepsilon^m$ , onde  $\varepsilon^n$  e  $\varepsilon^m$  são os fibrados triviais com base  $X$ . Chamemos explicitamente o isomorfismo por  $\phi : E \oplus \varepsilon^n \rightarrow E' \oplus \varepsilon^m$ .

Note que se  $\pi_n : \varepsilon^n \rightarrow X$  e  $\pi_m : \varepsilon_m \rightarrow X$  são os fibrados triviais de dimensões  $n$  e  $m$  respectivamente com base  $X$ , então  $h \circ \pi_n : \varepsilon^n \rightarrow Y$  e  $h \circ \pi_m : \varepsilon^m \rightarrow Y$  são fibrados vetoriais isomorfos aos fibrados vetoriais triviais com base  $Y$  de dimensões  $n$  e  $m$ , respectivamente. Um isomorfismo que leva  $\varepsilon_n = X \times \mathbb{C}^n$  a  $Y \times \mathbb{C}$  é  $h \times Id$ , isto é, leva todo  $(x, v) \in X \times \mathbb{C}^n$  em  $(h(x), v) \in Y \times \mathbb{C}$ , que obviamente é isomorfismo vetorial quando restrito a cada fibra por ser simplesmente a identidade em  $\mathbb{C}^n$  nessas restrições. Chamemos o fibrado  $h \circ \pi_n : \varepsilon_n \rightarrow Y$  por  $\varepsilon_{n_2}$  e, procedendo da mesma forma com o fibrado vetorial de dimensão  $m$ , chamemos o fibrado  $h \circ \pi^m : \varepsilon_m \rightarrow Y$  de  $\varepsilon_{m_2}$ .

Agora, resta apenas notar que  $F \oplus \varepsilon_{n_2}$  é isomorfo a  $F' \oplus \varepsilon_{m_2}$  pelo mesmo isomorfismo  $\phi$ . De fato,  $F \oplus \varepsilon_{n_2} = \{(u, v) \in F \times \varepsilon_{n_2} | h \circ p(u) = h \circ \pi_n(v)\}$  mas, como os espaços totais de  $F$  e de  $\varepsilon_{n_2}$  são respectivamente  $E$  e  $\varepsilon_n$  e como  $h$  é homeomorfismo,  $F \oplus \varepsilon_{n_2}$  é exatamente  $\{(u, v) \in E \times \varepsilon_n | p(u) = \pi_n(v)\}$ . Da mesma forma,  $F' \oplus \varepsilon_{m_2} = \{(u, v) \in E' \times \varepsilon_m | p'(u) = \pi_m(v)\}$ . Isto é, os espaços totais de  $F \oplus \varepsilon_{n_2}$  e  $F' \oplus \varepsilon_{m_2}$  são os mesmos de  $E \oplus \varepsilon^n \approx E' \oplus \varepsilon^m$ .

Desta forma, segue diretamente de  $h$  ser homeomorfismo, que  $\phi$  funciona como isomorfismo e  $F \sim F'$ , como queríamos.

Injetividade:

Se  $h^*[E_1] = h^*[E_2]$ , por definição,  $[h^*E_1] = [h^*E_2]$ . Assim,  $h^*E_1 \sim h^*E_2$ . Assim,  $[E_1]$  e  $[E_2]$  estão em  $\tilde{K}(Y)$ ,  $[h^*E_1] = [h^*E_2]$  está em  $\tilde{K}(X)$  e ainda é possível, como  $\tilde{K}$  é funtor, utilizar as propriedades 3 e 4 dos mapas  $h^*$  e  $(h^{-1})^*$  presentes na Observação 2.1.16 para concluir que  $E_1 = 1^*[E_1] = (h^*(h^{-1})^*)[E_1] = (h^{-1})^*(h^*[E_1]) = (h^{-1})^*([h^*E_1]) = (h^{-1})^*([h^*E_2]) = (h^{-1})^*(h^*[E_2]) = (h^*(h^{-1})^*)[E_2] = 1^*[E_2] = [E_2]$ . Portanto,  $E_1 \sim E_2$  como queríamos.  $\square$

De volta aos diagramas, note ainda que, em  $\tilde{K}((X \cup CA)/X \rightarrow \tilde{K}(X \cup CA) \rightarrow \tilde{K}(X))$  é possível aplicar a Proposição 2.2.7 pois  $X$  é fechado em  $X \cup CA$ . Assim, os mapas horizontais da primeira linha do diagrama acima formam uma sequência exata.

Dessas informações é possível verificar que  $\tilde{K}(SA) \rightarrow \tilde{K}(X/A) \rightarrow \tilde{K}(X)$  é exata, como queríamos. Para isso, utilizaremos o Lema a seguir, que trata de um caso mais geral do que o que temos para analisar:

**Lema 2.2.11.** *Dados grupos  $A, B, C, D, E$  e  $F$  e homomorfismos  $f, g, h, i, j, k$  e  $l$  tais que o diagrama a seguir comuta, isto é,  $j \circ g = l \circ i$  e também  $i \circ f = k \circ h$  e tais que os mapas verticais  $h, i$  e  $j$  são isomorfismos.*

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\
 \downarrow h & & \downarrow i & & \downarrow j \\
 D & \xrightarrow{k} & E & \xrightarrow{l} & F
 \end{array}$$

Se a sequência  $A \rightarrow B \rightarrow C$  é exata, isto é, o núcleo de  $g$  é igual à imagem de  $f$ , então a sequência  $D \rightarrow E \rightarrow F$  também é exata.

**Demonstração:** Mostremos que o núcleo de  $l$  é igual à imagem de  $k$ .

Primeiramente, verifiquemos que  $\text{Ker } l \subset \text{Im } k$ :

Gostaríamos de verificar que para todo  $x \in \text{Ker } l$ , existe  $y \in D$  tal que  $k(y) = x$ . Se  $x \in \text{Ker } l$ , então  $i^{-1}(x) \in \text{Ker } g$ . Isso ocorre porque, se  $l(x) = 0_F$ , como  $j$  é isomorfismo e leva elemento neutro em elemento neutro, então  $j^{-1}(l(x)) = 0_C$ . Pela comutatividade do diagrama, temos que  $j^{-1} \circ l = g \circ i^{-1}(x)$ , o que leva à conclusão de que  $i^{-1}(x) \in \text{Ker } g$ .

Como  $\text{Ker } g = \text{Im } f$ , temos que existe  $z \in A$  tal que  $f(z) = i^{-1}(x)$ . Daqui, pode-se concluir que  $i(f(z)) = i(i^{-1}(x)) \Rightarrow k(h(z)) = x$ . Isto é, o  $y$  que procurávamos era  $y = h(z)$ . Dessa forma, encontramos o ponto  $y$  tal que  $k(y) = x$ .

Agora, verifiquemos que  $Im\ k \subset Ker\ l$ :

Isto é o mesmo que verificar que  $l \circ k(x) = 0_F$  para todo  $x \in D$ . Como  $h$  é isomorfismo, para todo  $x \in D$ , temos que  $x = h(y)$  para algum  $y \in A$ . Portanto,  $l \circ k(x) = l \circ k(h(y)) = l \circ (k \circ h)(y) = l \circ (i \circ f)(y) = (l \circ i) \circ f(y) = j \circ g \circ f(y)$ . Assim,  $g \circ f(y) = 0_C$  pela sequência  $A \rightarrow B \rightarrow C$  ser exata e, portanto,  $l \circ k(x) = j(0_C) = 0_F$ , como queríamos. □

Note, portanto, que a sequência  $\tilde{K}(SA) \rightarrow \tilde{K}(X/A) \rightarrow \tilde{K}(X)$ , com os mapas do diagrama, é exata. Aqui, pode-se verificar que o mapa à esquerda é uma transformação natural e o mapa à direita é induzido pelo quociente  $X \rightarrow X/A$ , como a comutatividade do diagrama aponta.

Nos trechos seguintes que estão mais à esquerda, uma análise idêntica é feita para concluir a exatidão da sequência.

### A definição dos funtores

A partir desta sequência, é possível definir a sequência de funtores da K-Teoria reduzida para todo espaço compacto Hausdorff  $X$ :  $\tilde{K}^0(X) = \tilde{K}(X)$ ,  $\tilde{K}^{-1}(X) = \tilde{K}(SX)$ ,  $\tilde{K}^{-2}(X) = \tilde{K}(S^2X)$ , e assim por diante, de forma que a sequência acima pode ser reescrita como

$$\dots \rightarrow \tilde{K}^{-2}(X) \rightarrow \tilde{K}^{-2}(A) \rightarrow \tilde{K}^{-1}(X/A) \rightarrow \tilde{K}^{-1}(X) \rightarrow \tilde{K}^{-1}(A) \rightarrow \tilde{K}^0(X/A) \rightarrow \tilde{K}^0(X) \rightarrow \tilde{K}^0(A)$$

Resta definir quais devem ser os funtores  $\tilde{K}^n$  para  $n$  positivo que estendem para a direita da sequência exata apresentada. Tal extensão é uma consequência direta do Teorema da Periodicidade de Bott (Teorema 3.3.1) que será demonstrado no Capítulo 3.

Neste momento, apenas considere o seguinte enunciado:

**Teorema da Periodicidade de Bott - versão complexa:** Há um isomorfismo  $\beta : \tilde{K}(X) \rightarrow \tilde{K}(S^2X)$

Aplicaremos este enunciado para responder nosso problema atual: como devemos definir os próximos funtores?

A definição  $\tilde{K}^{2i} = \tilde{K}^0$  e  $\tilde{K}^{2i+1} = \tilde{K}^{-1}$  para  $i = 1, 2, \dots$  faz sentido com o Teorema da Periodicidade. Deve haver uma correspondência entre funtores de grau par e de grau ímpar.

Resta apenas verificar que, ao estender para a direita, a parte  $\tilde{K}^0(X) \rightarrow \tilde{K}^0(A) \rightarrow \tilde{K}^{-1}(X/A) \rightarrow \tilde{K}^{-1}(X)$  da sequência é exata. Esta verificação é simples devido ao Teorema da Periodicidade. Note que  $\tilde{K}^{-2}$  pode ser identificado com  $\tilde{K}^0$  através do isomorfismo  $\beta$  e já sabemos que  $\tilde{K}^{-2}(X) \rightarrow$

$\tilde{K}^{-2}(A) \rightarrow \tilde{K}^{-1}(X/A) \rightarrow \tilde{K}^{-1}(X)$  é sequência exata:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \rightarrow & \tilde{K}^{-2}(X) & \rightarrow & \tilde{K}^{-2}(A) & \rightarrow & \tilde{K}^{-1}(X/A) & \rightarrow & \tilde{K}^{-1}(X) & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \tilde{K}^0(A) \\ & & \beta \uparrow \cong & & \beta \uparrow \cong & & & & & & & & \\ & & \tilde{K}^0(X) & \rightarrow & \tilde{K}^0(A) & & & & & & & & \end{array}$$

De fato, por  $\beta$  ser isomorfismo,  $\tilde{K}^0(X) \rightarrow \tilde{K}^0(A) \rightarrow \tilde{K}^{-1}(X/A) \rightarrow \tilde{K}^{-1}(X)$  será exato em consequência do Lema 2.2.11.

Por fim, temos a seguinte sequência exata para todo  $X$  compacto Hausdorff e todo  $A$  fechado em  $X$ :

$$\dots \rightarrow \tilde{K}^{-1}(A) \rightarrow \tilde{K}^0(X/A) \rightarrow \tilde{K}^0(X) \rightarrow \tilde{K}^0(A) \rightarrow \tilde{K}^1(X/A) \rightarrow \tilde{K}^1(X) \rightarrow \tilde{K}^1(A) \rightarrow \tilde{K}^2(A) \rightarrow \dots \tag{2.5}$$

Concluimos assim a demonstração do segundo axioma para essa sequência de funtores.

**Observação 2.2.12.** Cada funtor  $\tilde{K}^{-n}$  realiza operação entre objetos e entre morfismos para todo número natural  $n$ . Entre objetos,  $\tilde{K}^{-n}$  envia todo espaço topológico  $X$  no grupo abeliano com estrutura de anel  $\tilde{K}(S^n X)$ . Entre morfismos, temos que  $\tilde{K}^{-n}$  leva toda função contínua  $f : X \rightarrow Y$  entre espaços topológicos  $X$  e  $Y$  em  $f^* : \tilde{K}(S^n Y) \rightarrow \tilde{K}(S^n X)$  definida como a função induzida pelo funtor  $\tilde{K}$  do mapa  $f' : S^n X \rightarrow S^n Y$  que é extensão de  $f$ .

Observe ainda que, se  $n = 1$ , explicitamente,  $f' : X \times I / \sim \rightarrow Y \times I / \sim$  é definida como

$$f'[(x, t)] = [(f(x), t)] \text{ para todo } (x, t) \in X \times I$$

e é possível, repetindo o mesmo processo, dada essa  $f'$ , construir  $f'' : S^2 X \rightarrow S^2 Y$  extensão de  $f'$ . É dessa forma, iteradamente, que estendemos  $f$  a um mapa entre as  $n$ -ésimas extensões de  $X$  e de  $Y$ .

### 2.2.2 O primeiro axioma

Após a construção dos funtores ser feita, é possível demonstrar os outros axiomas de uma Teoria de Cohomologia Generalizada.

Gostaríamos de mostrar que, para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , vale o seguinte:

Se  $f, g : X \rightarrow Y$  são homotópicos, então  $f^* = g^* : \tilde{K}^n(Y) \rightarrow \tilde{K}^n(X)$ .

Para  $n = 0$ , esse resultado já foi mostrado quando foi verificado que  $\tilde{K}$  é funtor entre a categoria dos espaços compacto Hausdorff e a categoria dos grupos abelianos na Observação

2.1.16. Para  $n = -1$ , note que se  $f, g : X \rightarrow Y$  são homotópicos, os mapas induzidos por  $f$  e  $g$ ,  $f', g' : SX \rightarrow SY$  também são homotópicos:

Primeiramente, defina  $f'$  e  $g'$  por

$$f'(x, t) = (f(x), t) \text{ e } g'(x, t) = (g(x), t) \text{ para todo } (x, t) \in SX$$

Se  $H : X \times I \rightarrow Y$  é homotopia entre  $f$  e  $g$ , é possível definir  $H' : SX \times I \rightarrow SY$  por

$$H'((x, t), s) = ((H(x, s), t)) \text{ para todo } ((x, t), s) \in SX \times I,$$

como homotopia entre  $f'(x, t) = (f(x), t)$  e  $g'(x, t) = (g(x), t)$

Nesse caso,  $f^* : \tilde{K}^{-1}(Y) \rightarrow \tilde{K}^{-1}(X)$  é igual ao mapa  $(f')^* : \tilde{K}(SY) \rightarrow \tilde{K}(SX)$ . A mesma coisa vale com  $g$  e, portanto,  $f^* = g^*$  pois  $(f')^* = (g')^*$  pelo que foi demonstrado no caso  $n = 0$ .

Assim, o axioma 2 é demonstrado indutivamente.

### 2.2.3 O terceiro axioma

**Definição 2.2.13.** A soma wedge  $X \vee Y$  é definida por

$$X \vee Y = X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$$

onde  $y_0 \in Y$  e  $x_0 \in X$  são pontos base escolhidos.

**Observação 2.2.14.**  $(X \vee Y)/X$  é homeomorfo a  $Y$  e  $(X \vee Y)/Y$  é homeomorfo a  $X$ .

Considere que  $X \times \{y_0\} \subset X \vee Y$  e  $\{x_0\} \times Y \subset X \vee Y$  são subespaços fechados e, pode-se então escrever as seguintes sequências de mapas:

$$\begin{array}{ccccc} X \times \{y_0\} & \xrightarrow{i_X} & X \vee Y & \xrightarrow{q_Y} & (X \vee Y)/Y \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ X & & & & X \end{array}$$

onde os dois mapas verticais são homeomorfismos.

Se considerarmos os mapas que as composições de  $i_X$  com o homeomorfismo entre  $X$  e  $X \times \{y_0\}$  e de  $q_Y$  com o homeomorfismo entre  $(X \vee Y)/Y$  e  $X$  são

$$X \xrightarrow{i_X} X \vee Y \xrightarrow{q_Y} X$$

elas induzem os mapas

$$\tilde{K}(X) \xrightarrow{q_Y^*} \tilde{K}(X \vee Y) \xrightarrow{i_X^*} \tilde{K}(X)$$

Note que  $i_X$  e  $q_Y$  foram nomeados assim para simplificar a notação, mas na verdade são a composição do  $i_X$  construído inicialmente com um homeomorfismo, assim como aqui  $q_Y$  não é igual ao  $q_Y$  construído inicialmente.

Pelo mesmo argumento, é possível construir mapas

$$Y \xrightarrow{i_Y} X \vee Y \xrightarrow{q_X} Y$$

a partir dos quais,  $\tilde{K}$  induz os seguintes mapas

$$\tilde{K}(Y) \xrightarrow{q_X^*} \tilde{K}(X \vee Y) \xrightarrow{i_Y^*} \tilde{K}(Y)$$

É importante, neste momento, notar que  $q_Y \circ i_X = id_X$  e que  $q_X \circ i_Y = Id_Y$ , as identidades em  $X$  e em  $Y$ , respectivamente.

Portanto,  $i_X^* \circ q_Y^* = (q_Y \circ i_X)^* = (Id_X)^* = Id_{\tilde{K}(X)}$ , a assim é possível concluir que  $q_Y^*$  é injetor e que  $i_X^*$  é sobrejetor.

Da mesma forma,  $i_Y^* \circ q_X^* = (q_X \circ i_Y)^* = (Id_Y)^* = Id_{\tilde{K}(Y)}$ , e assim  $q_X^*$  é injetor e que  $i_Y^*$  é sobrejetor.

Agora, tome essa nova sequência com uma inclusão e um quociente:

$$X \xrightarrow{i_X} X \vee Y \xrightarrow{q_X} Y$$

Pela Proposição 2.2.7, ela induz a sequência exata

$$\tilde{K}(Y) \xrightarrow{q_X^*} \tilde{K}(X \vee Y) \xrightarrow{i_X^*} \tilde{K}(X)$$

Mais que isso, agora temos a informação de que  $q_X^*$  é injetor,  $i_X^*$  é sobrejetor e existe um mapa  $i_Y^* : \tilde{K}(X \vee Y) \rightarrow \tilde{K}(Y)$  tal que  $i_Y^* \circ q_X^* = Id_{\tilde{K}(Y)}$ .

Assim, estamos na situação do Lema 2.1.25:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \tilde{K}(X \vee Y) & & & \\
 & & \nearrow^{q_X^*} & \downarrow \simeq & \searrow^{i_X^*} & & \\
 0 & \longrightarrow & \tilde{K}(Y) & & \tilde{K}(X) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \\
 & & & \tilde{K}(Y) \oplus \tilde{K}(X) & & & 
 \end{array}$$

temos que  $\tilde{K}(X \vee Y) \simeq \tilde{K}(X) \oplus \tilde{K}(Y)$  e, mais que isso, segundo a construção da demonstração desse Lema, o isomorfismo é  $\rho = i_Y^* \times i_X^*$ .

Assim, concluímos a demonstração de que o terceiro axioma é válido para a construção dos funtores da K-Teoria reduzida. Para mais de dois elementos somados, a soma segue indutivamente.

## Capítulo 3

# Teorema da Periodicidade de Bott

Para a demonstração da versão complexa do Teorema da Periodicidade de Bott, o roteiro será:

1. Mostrar de que forma  $\tilde{K}(S^2)$  pode ser visto como um anel gerado por  $H - 1$  conforme definido em 1.3.15.
2. Mostrar que o produto externo definido na Seção 3.1 em  $\tilde{K}(S^2)$  é um isomorfismo.

### 3.1 Parte 1

Como mostrado na Proposição 1.3.15, sabemos que o fibrado linha canônico  $H \rightarrow S_2$ , conforme apresentado nessa seção, é tal que  $(H \otimes H) \oplus 1 \approx H \otimes H$ .

Com essas relações, é possível afirmar em  $K(S^2)$  que  $H \otimes H = H \oplus H - 1$ . Se denotarmos  $H \otimes H$  por  $H^2$  e  $H \oplus H$  por  $2H$ , ainda é possível afirmar  $H^2 = 2H - 1$  ou  $(H - 1)^2 = 0$ .

Assim, sabemos que vale a relação  $(H - 1)^2 = 0$  em  $\tilde{K}(S^2)$ , mas na verdade vale uma relação muito mais forte do que essa. Essa seção trata de explorar qual é essa relação antes de chegar à conclusão desejada no roteiro.

**Observação 3.1.1.** O produto tensorial de anéis, quando ambos os anéis multiplicados são grupos abelianos, é um anel com multiplicação  $(a \otimes b)(c \otimes d) = ac \otimes bd$  e soma  $(a \otimes b) + (c \otimes b) = (a + c) \otimes b$  e  $(a \otimes b) + (a \otimes d) = a \otimes (b + d)$ . No produto tensorial de anéis  $A \otimes B$ , os pontos  $(na, b)$  e  $(a, nb)$  são identificados, com  $n \in \mathbb{Z}$ . Também é possível denotar este produto tensorial de anéis como  $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$

**Definição 3.1.2.** [Produto externo] É uma função  $\mu : K(X) \otimes K(Y) \rightarrow K(X \times Y)$  definida por

$$\mu(a \otimes b) = p_1^*(a)p_2^*(b)$$

onde  $K(X) \otimes K(Y)$  é o produto tensorial dos anéis,  $p_1 : X \times Y \rightarrow X$  é a projeção em  $X$  e  $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$  é a projeção em  $Y$ .

O produto externo também é denotado por  $a * b = \mu(a \otimes b)$

**Proposição 3.1.3.** *O produto externo é um homomorfismo de anéis.*

**Demonstração:** Verifiquemos que o produto externo da multiplicação é a multiplicação dos produtos externos:

Basta utilizar a definição e o fato de que o pullback é homomorfismo de anel, como apontado em 2.1.16.

$$\begin{aligned} \mu((a \otimes b)(c \otimes d)) &= \mu(ac \otimes bd) = p_1^*(ac)p_2^*(bd) = p_1^*(a)p_1^*(c)p_2^*(b)p_2^*(d) = \\ &= p_1^*(a)p_2^*(b)p_1^*(c)p_2^*(d) = \mu(a \otimes b)\mu(c \otimes d) \end{aligned}$$

Além disso, o produto externo da soma é a soma dos produtos externos:

$$\begin{aligned} \mu((a \otimes b) + (c \otimes b)) &= \mu((a + c) \otimes b) = p_1^*(a + c)p_2^*(b) = (p_1^*(a) + p_1^*(c))p_2^*(b) = \\ &= p_1^*(a)p_2^*(b) + p_1^*(c)p_2^*(b) = \mu(a \otimes b) + \mu(c \otimes b), \end{aligned}$$

onde o processo é idêntico se manter a primeira coordenada fixa ao invés da segunda. □

**Teorema 3.1.4.** *Existe um isomorfismo de anéis  $K(X) \otimes \mathbb{Z}[H]/(H - 1)^2 \rightarrow K(X \times S^2)$  que é composição de dois mapas, um deles o produto externo, conforme definição anterior 3.1.2.*

$$K(X) \otimes \mathbb{Z}[H]/(H - 1)^2 \xrightarrow{h} K(X) \otimes K(S^2) \xrightarrow{\mu} K(X \times S^2)$$

A demonstração deste teorema não será explorada neste trabalho, mas pode ser vista em detalhes em [3, p.41-p.51].

**Lema 3.1.5.**  $\sigma : A \rightarrow \mathbb{Z} \otimes A$  definido por

$$\sigma(a) = (1, a) \text{ para todo } a \in A$$

é isomorfismo para todo anel  $A$ , onde  $\otimes$  é produto tensorial de anéis como explicado na Observação 3.1.1.

**Demonstração:** De fato, esse é um homomorfismo de anéis pois  $\sigma(a + b) = (1, a + b) = (1, a) + (1, b) = \sigma(a) + \sigma(b)$  e  $\sigma(ab) = (1, ab) = (1 \cdot 1, ab) = (1, a)(1, b) = \sigma(a)\sigma(b)$ .

Verifica-se a sobrejetividade notando que todo  $a \in A$  é igual a  $\sigma(1, a) = a$ . A injetividade segue de que se  $a \neq b$ , então  $(1, a) \neq (1, b)$ .

□

**Corolário 3.1.6.** Há um isomorfismo de anéis  $\mathbb{Z}[H]/(H - 1)^2 \rightarrow K(S^2)$

**Demonstração:** Basta tomar o isomorfismo do Teorema 3.1.4 e tomar o espaço  $X$  como um único ponto.

Nesse caso,  $K(X) = K(x_0)$  para algum ponto  $x_0$ . Note que  $K(x_0) \approx \mathbb{Z}$  segundo o Corolário 2.1.22 e além disso, segundo o Lema 3.1.5, temos que  $K(X) \otimes \mathbb{Z}[H]/(H - 1)^2 \simeq \mathbb{Z}[H]/(H - 1)^2$ , isto é, os dois anéis são isomorfos. Além disso,  $K(X \times S^2) \simeq K(S^2)$  de forma direta neste caso em que  $X$  é um único ponto.

Assim, o isomorfismo do Teorema 3.1.4 determina também um isomorfismo entre  $\mathbb{Z}[H]/(H - 1)^2$  e  $K(S^2)$

□

**Observação 3.1.7.** Através do resultado do Corolário 3.1.6, é possível dizer que  $K(S^2)$  é isomorfo ao espaço gerado por  $\{1, H\}$  como grupo abeliano.

De fato, todo elemento de  $\mathbb{Z}[H]/(H - 1)^2$  deve ser da forma  $a + bH$  com  $a, b \in \mathbb{Z}$  pois já observamos no início desta seção que  $H^2 = 2H - 1$ , isto é, graus maiores que um não aparecem em  $\mathbb{Z}[H]/(H - 1)^2$ .

**Corolário 3.1.8.** O grupo  $\tilde{K}(S^2)$  é gerado por  $H - 1$ .

**Demonstração:** Segundo o Corolário 2.1.27,  $\tilde{K}(S^2)$  é isomorfo enquanto grupo a  $\text{Ker } \psi \subset K(X)$ , com  $\psi$  conforme definida em 2.1.21.

Assim,  $\text{Ker } \psi$  e, portanto,  $\tilde{K}(S^2)$  é isomorfo a um subgrupo do grupo gerado por  $\{1, H\}$  como observado anteriormente em 3.1.7.

Note que  $\text{Ker } \psi$  é composto exatamente os elementos  $E - E'$  de  $K(S^2)$  tais que  $\dim(E) - \dim(E') = 0$ . Isto é,  $E$  e  $E'$  possuem as mesmas dimensões.

Neste caso, primeiramente observe que falar da dimensão de um fibrado, isto é, dimensão de suas fibras, é algo bem definido porque  $S^2$  é conexo por caminhos, então não há componentes conexas distintas onde um fibrado vetorial poderia possivelmente possuir fibras de componentes distintas com dimensões.

Assim, núcleo de  $\psi$  é composto exatamente por elementos  $E - E' \in K(X)$  tais que, suas fibras no mesmo ponto  $x_0$  possuem a mesma dimensão, pois  $E|_{x_0} - E'|_{x_0} = \varepsilon^0|_{x_0}$  se e somente se  $E|_{x_0} \simeq E'|_{x_0} \Leftrightarrow E|_{x_0} \approx E'|_{x_0}$ . Então, no caso  $X = S^2$ ,  $\text{Ker } \psi$  de fato deve ser composto pelos elementos  $E - E'$  de  $K(S^2)$  tais que  $\dim(E) - \dim(E') = 0$ , como queríamos.

Como  $H$  é um fibrado vetorial de dimensão um, os elementos dessa forma de  $K(S^2)$ , que já vimos que é gerado por  $\{1, H\}$  enquanto grupo abeliano, são  $\alpha H - \beta 1$  com  $\beta, \alpha \in \mathbb{Z}$  e  $\dim \alpha H = \dim \beta 1$  isto é,  $\alpha = \beta$ . Isto é, concluímos que  $\text{Ker } \psi$  é isomorfo ao grupo gerado por  $\{H - 1\}$ .

**Observação 3.1.9.** Assim,  $\tilde{K}(S^2)$  é gerado por  $H - 1$  e vale  $(H - 1)^2 = 0$ . Isso significa que, de fato, a multiplicação em  $\tilde{K}(S^2)$  é tal que o produto de dois números quaisquer é sempre zero.

□

## 3.2 Parte 2

No Teorema da Periodicidade, é necessária definição de produto externo reduzido.

**Observação 3.2.1.** O fato de que o produto externo de 3.1.2 é um isomorfismo de anéis se  $Y = S^2$  segue do Teorema 3.1.4. Como  $h$  é isomorfismo por conta do Corolário 3.1.6, e o teorema afirma que  $\mu \circ h$  é isomorfismo, necessariamente  $\mu$  também deve ser isomorfismo.

Entretanto, ainda nos resta concluir o que é o produto externo reduzido e que ele também é um isomorfismo de anel quando um dos espaços é  $S^2$ . De fato, vamos definir o produto externo reduzido só nesse caso, ou seja, um mapa  $\tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(S^2) \rightarrow \tilde{K}(S^2 X)$ .

**Observação 3.2.2.** [Lema da decomposição para anéis que são grupos abelianos] O mapa  $\rho : B \rightarrow A \oplus C$ , conforme definido na demonstração do Lema 2.1.25 pode ser visto como um isomorfismo de anéis caso, além das informações do enunciado, tenhamos que  $A, B$  e  $C$  são anéis e  $i, j$  e  $p$  sejam homomorfismos de anel. Nessas condições, consideramos que  $A \oplus C$  é um anel com o produto  $(a, c)(a', c') = (aa', cc')$  e, para o produto  $bb' \in B$ , temos

$$\rho(bb') = (p(bb'), j(bb')) = (p(b)p(b'), j(b)j(b')) = (p(b), j(b))(p(b'), j(b')) = \rho(b)\rho(b').$$

Isso confirma que, nesse caso,  $\rho$  é um isomorfismo de anéis. Em particular, o mapa definido no Lema 2.1.26 também é um isomorfismo de anéis

**Definição 3.2.3** (Produto smash). Dados dois espaços topológicos, o **produto smash** é definido por

$$X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y$$

Temos que  $X \vee Y \subset X \times Y$  é subespaço fechado e dessa forma, pela construção de sequência exata realizada na Proposição 2.2.7 temos a seguinte sequência curta exata para o par  $(X, A) = (X \times Y, X \wedge Y)$ :

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{K}(X \wedge Y) & \longrightarrow & \tilde{K}(X \times Y) & \longrightarrow & \tilde{K}(X \vee Y) \\
 & & & & \downarrow \simeq \\
 & & & & \tilde{K}(X) \oplus \tilde{K}(Y)
 \end{array}$$

Neste diagrama, o mapa vertical é o isomorfismo consequência do terceiro axioma para uma teoria de cohomologia generalizada, presente na seção 2.2.3. Além disso, o mapa à esquerda é injetor e o mapa à direita é sobrejetor porque o o segundo possui inverso à direita  $\alpha : \tilde{K}(X) \oplus \tilde{K}(Y) \rightarrow \tilde{K}(X \times Y)$  definido por

$$\alpha(a, b) = p_1^*(a) + p_2^*(b) \text{ para todo } (a, b) \in \tilde{K}(X) \oplus \tilde{K}(Y)$$

onde  $p_1$  e  $p_2$  são as projeções  $X \times Y \rightarrow X$  e  $X \times Y \rightarrow Y$  respectivamente. Para verificar a injetividade do mapa à esquerda note que temos o diagrama a seguir:

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{K}(SX) \oplus \tilde{K}(SY) \oplus \tilde{K}(X \wedge Y) & \xrightarrow{\text{sobrejetor}} & \tilde{K}(SX) \oplus \tilde{K}(SY) \\
 \uparrow \simeq & & \simeq \uparrow \\
 \tilde{K}(\Sigma X) \oplus \tilde{K}(\Sigma Y) \oplus \tilde{K}(\Sigma(X \wedge Y)) & & \tilde{K}(\Sigma X) \oplus \tilde{K}(\Sigma Y) \\
 \uparrow \simeq & & \simeq \uparrow \\
 \tilde{K}(\Sigma X \vee \Sigma Y \vee \Sigma(X \wedge Y)) & & \tilde{K}(\Sigma X \vee \Sigma Y) \\
 \uparrow \simeq & & \simeq \uparrow \\
 \tilde{K}(\Sigma(X \times Y)) & & \tilde{K}(\Sigma(X \vee Y)) \\
 \uparrow \simeq & & \simeq \uparrow \\
 \tilde{K}(S(X \times Y)) & \xrightarrow{\text{sobrejetor}} & \tilde{K}(S(X \vee Y)) \xrightarrow{0} \tilde{K}(X \wedge Y) \rightarrow \tilde{K}(X \times Y) \rightarrow \tilde{K}(X \vee Y)
 \end{array}$$

onde resta apenas observar que de fato os mapas verticais são todos isomorfismos. Aqui, a suspensão reduzida  $\Sigma Z$  é definida por  $SZ/(\{z_0\} \times I)$  para qualquer espaço topológico  $Z$ . Como  $\{z_0\} \times I$  é contrátil, pelo Lema 2.2.8 é possível concluir que  $\tilde{K}(\Sigma Z) \simeq \tilde{K}(SZ)$ , o que mostra alguns dos isomorfismos do diagrama acima. O isomorfismo  $\tilde{K}(\Sigma X \vee \Sigma Y) \rightarrow \tilde{K}(\Sigma X) \oplus \tilde{K}(\Sigma Y)$  e o isomorfismo  $\tilde{K}(\Sigma X \vee \Sigma Y \vee \Sigma(X \wedge Y)) \rightarrow \tilde{K}(\Sigma X) \oplus \tilde{K}(\Sigma Y) \oplus \tilde{K}(\Sigma(X \wedge Y))$  são novamente consequência de uma aplicação do terceiro axioma para uma teoria de cohomologia generalizada. Além disso, temos que  $\Sigma(X \vee Y)$  é homeomorfo a  $\Sigma X \vee \Sigma Y$  o que, pela Observação 2.2.10, conclui que o mapa induzido por esse homeomorfismo é isomorfismo e, por fim, note que há equivalência de homotopia entre  $\Sigma(X \times Y)$  e  $\Sigma X \vee \Sigma Y \vee \Sigma(X \wedge Y)$ . Assim, se  $f : \Sigma(X \times Y) \rightarrow \Sigma X \vee \Sigma Y \vee \Sigma(X \wedge Y)$  é tal que existe  $g : \Sigma X \vee \Sigma Y \vee \Sigma(X \wedge Y) \rightarrow \Sigma(X \times Y)$  tal que  $g \circ f$  é homotópico a  $Id_{\Sigma(X \times Y)}$  e  $f \circ g$  é homotópico a  $Id_{\Sigma X \vee \Sigma Y \vee \Sigma(X \wedge Y)}$ , temos que, pela funtorialidade

de  $\tilde{K}$  descrita em 2.1.16, mapas homotópicos são tais que  $f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = Id_{\Sigma(X \times Y)}^* = Id_{\tilde{K}(\Sigma(X \times Y))}$  e  $g^* \circ f^* = Id_{\tilde{K}(\Sigma X \vee \Sigma Y \vee \Sigma(X \wedge Y))}$ . Assim,  $f^*$  é isomorfismo entre  $\tilde{K}(\Sigma(X \times Y))$  e  $\tilde{K}(\Sigma X \vee \Sigma Y \vee \Sigma(X \wedge Y))$ .

Assim, como o núcleo de  $\tilde{K}(SX) \oplus \tilde{K}(SY) \rightarrow \tilde{K}(X \wedge Y)$  é a imagem do mapa anterior pela sequência ser exata, temos que esse mapa envia todo ponto em 0, e o núcleo do homomorfismo  $\tilde{K}(X \wedge Y) \rightarrow \tilde{K}(X \times Y)$  é a imagem do mapa anterior, que é 0. Isto confirma que o mapa à esquerda é injetor.

Dessa forma, temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \tilde{K}(X \wedge Y) \longrightarrow \tilde{K}(X \times Y) \longrightarrow \tilde{K}(X) \oplus \tilde{K}(Y) \longrightarrow 0$$

De fato, aplicando o Lema 2.2.11 para dizer que  $\tilde{K}(X \wedge Y) \rightarrow \tilde{K}(X \times Y) \rightarrow \tilde{K}(X) \oplus \tilde{K}(Y)$  é sequência exata e, após isso, aplicando o Lema da decomposição 2.1.25, obtemos que  $\tilde{K}(X \times Y) \approx \tilde{K}(X \wedge Y) \oplus \tilde{K}(X) \oplus \tilde{K}(Y)$ . Se concluirmos que, para toda  $f : X \rightarrow Y$  o pullback  $f^* : \tilde{K}(Y) \rightarrow \tilde{K}(X)$  é homomorfismo de anéis, também pode-se dizer que esse é um isomorfismo de anéis, bastando aplicar a Observação 3.2.2.

De fato, utilizando o produto definido em 2.1.28, temos que:

$f^*([E][F]) = f^*(\varphi(\varphi^{-1}[E]\varphi^{-1}[F]))$ , onde  $\varphi^{-1}[E] = E - \varepsilon^n$  se a dimensão de  $E$  na fibra de  $x_0$  é  $n$  e  $\varphi^{-1}[F] = F - \varepsilon^m$  se a dimensão de  $F$  na fibra de  $x_0$  é  $m$ . Assim,  $f^*(\varphi((E - \varepsilon^n)(F - \varepsilon^m))) = f^*(\varphi((E \otimes F \oplus \varepsilon^m \otimes \varepsilon^n) - (E \otimes \varepsilon^m \oplus F \otimes \varepsilon^n)))$ . Se  $E'$  é o fibrado vetorial tal que somado com  $E \otimes \varepsilon^m \oplus F \otimes \varepsilon^n$  resulta em  $\varepsilon^k$  para algum  $k$  positivo como no Teorema 1.2.15, temos ainda que  $(E \otimes F \oplus \varepsilon^m \otimes \varepsilon^n) - (E \otimes \varepsilon^m \oplus F \otimes \varepsilon^n) = E \otimes F \oplus \varepsilon^m \otimes \varepsilon^n \oplus E' - \varepsilon^k$  e, portanto,  $\varphi((E \otimes F \oplus \varepsilon^m \otimes \varepsilon^n) - (E \otimes \varepsilon^m \oplus F \otimes \varepsilon^n)) = \varphi((E \otimes F \oplus \varepsilon^m \otimes \varepsilon^n \oplus E') - (\varepsilon^k)) = E \otimes F \oplus \varepsilon^m \otimes \varepsilon^n \oplus E'$ . Assim,  $f^*([E][F]) = f^*[E \otimes F \oplus \varepsilon^m \otimes \varepsilon^n \oplus E'] = \varphi(f^*(\varphi^{-1}([E \otimes F \oplus \varepsilon^m \otimes \varepsilon^n] \oplus E')))$  porque  $\varphi^{-1}([E \otimes F \oplus \varepsilon^m \otimes \varepsilon^n \oplus E']) = (E - \varepsilon^n)(F - \varepsilon^m) \oplus (E' - \varepsilon^k) = (E - \varepsilon^n)(F - \varepsilon^m)$ . Assim,  $f^*([E][F]) = \varphi(f^*((E - \varepsilon^n)(F - \varepsilon^m))) = \varphi(f^*(E - \varepsilon^n)f^*(F - \varepsilon^m)) = \varphi((f^*E - f^*\varepsilon^n)(f^*F - f^*\varepsilon^m)) = \varphi((f^*E - \varepsilon^n)(f^*F - \varepsilon^m)) = \varphi(\varphi^{-1}(f^*[E])\varphi^{-1}(f^*[F])) = f^*[E]f^*[F]$ , como queríamos.

Assim, temos os seguintes isomorfismos de anel:

Sabemos que  $\tilde{K}(X \wedge Y) \oplus \tilde{K}(X) \oplus \tilde{K}(Y) \simeq \tilde{K}(X \times Y)$  pelo Lema da decomposição

e, pelo Lema 2.1.26, temos que  $K(X \times Y) \simeq \tilde{K}(X \times Y) \oplus \mathbb{Z}$ .

$$\text{Portanto, } K(X \times Y) \simeq \tilde{K}(X \wedge Y) \oplus \tilde{K}(X) \oplus \tilde{K}(Y) \oplus \mathbb{Z}$$

Note que o Lema 2.1.26 é uma aplicação do Lema da decomposição em espaços que são anéis e mapas que são homomorfismos de anel. Mesmo  $\varphi$  é tal que restrito a  $\text{Ker } \psi$ , é homomorfismo de anel:  $\varphi(E - \varepsilon^n)\varphi(F - \varepsilon^m) = [E][F] = \varphi(\varphi^{-1}[E]\varphi^{-1}[F]) = \varphi((E - \varepsilon^n)(F - \varepsilon^m))$ . Portanto, também pode-se aplicar a Observação 3.2.2 e concluir o isomorfismo determinado por esse Lema também é um isomorfismo de anel,

Além disso, como  $K(X) \simeq \tilde{K}(X) \oplus \mathbb{Z}$  e  $K(Y) \simeq \tilde{K}(Y) \oplus \mathbb{Z}$ , então

$$K(X) \otimes K(Y) \simeq (\tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y)) \oplus (\tilde{K}(X) \otimes \mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z} \otimes \tilde{K}(Y)) \oplus (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z})$$

e, finalmente, pelo Lema 3.1.5, temos que  $K(X) \otimes K(Y) \simeq (\tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y)) \oplus \tilde{K}(X) \oplus \tilde{K}(Y) \oplus \mathbb{Z}$

Assim, é possível definir parte do produto externo reduzido como a componente  $\mu' : \tilde{K}(X) \times \tilde{K}(Y) \rightarrow \tilde{K}(X \wedge Y)$  da função  $f$  que faz o seguinte digrama comutar:

$$\begin{array}{ccc} K(X) \oplus K(Y) & \xrightarrow{\simeq} & (\tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y)) \oplus \tilde{K}(X) \oplus \tilde{K}(Y) \oplus \mathbb{Z} \\ \mu \downarrow & & \downarrow f \\ K(X \times Y) & \xrightarrow{\simeq} & \tilde{K}(X \wedge Y) \oplus \tilde{K}(X) \oplus \tilde{K}(Y) \oplus \mathbb{Z} \end{array}$$

Como o produto externo  $\mu$  é isomorfismo quando  $Y = S^2$  e os mapas horizontais também, conclui-se que  $\mu'$  é isomorfismo nesse espaço também.

Por fim, apenas note que  $S^n \wedge X$  é homeomorfo a  $\Sigma^n X$  e, portanto, pela Observação 2.2.10 e pelo Lema 2.2.8, o mapa  $\phi : \tilde{K}(S^n \wedge X) \rightarrow \tilde{K}(S^n X)$  do diagrama abaixo é composição de isomorfismos:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}(S^n \wedge X) & \longrightarrow & \tilde{K}(S^n X) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \tilde{K}(\Sigma^n X) & \xlongequal{\quad} & \tilde{K}(\Sigma^n X) \end{array}$$

Com essa informação, o produto externo reduzido pode ser definido exatamente por

**Definição 3.2.4.** O **produto externo reduzido** é a composição dos isomorfismos

$$\tilde{K}(S^2) \times \tilde{K}(X) \xrightarrow{\mu'} \tilde{K}(S^2 \wedge X) \xrightarrow{\phi} \tilde{K}(S^2 X)$$

definidos durante esta seção. Concluimos, portanto, que o produto externo é um isomorfismo de grupos.

**Observação 3.2.5.** No produto interno reduzido, também utilizaremos como notação  $a * b = \phi \circ \mu'(a, b)$  para todo  $(a, b) \in \tilde{K}(S^2) \times \tilde{K}(X)$

### 3.3 O Teorema

Seção dedicada à demonstração do Teorema da Periodicidade de Bott no caso complexo.

**Teorema 3.3.1.** O homomorfismo  $\beta : \tilde{K}(X) \rightarrow \tilde{K}(S^2 X)$ , definido por

$$\beta(a) = (H - 1) * a \text{ para todo } a \in K(X)$$

é um isomorfismo de anel para qualquer  $X$  Hausdorff compacto.

**Demonstração:** O homomorfismo  $\beta$  é simplesmente a composição dos seguintes homomorfismos

$$\begin{aligned} \tilde{K}(X) &\xrightarrow{\sigma} \tilde{K}(S^2) \otimes \tilde{K}(X) \xrightarrow{\mu} \tilde{K}(S^2 X) \\ a &\longmapsto (H - 1) \otimes a \longmapsto (H - 1) * a \end{aligned}$$

Como vimos na seção 3.1,  $\tilde{K}(S^2)$  é isomorfo a anel gerado por  $H - 1$ , isto é, é isomorfo a  $\mathbb{Z}$  por ser um grupo infinito gerado por um único elemento.

Assim, o mapa  $\sigma$  representado acima é um isomorfismo em consequência do Lema 3.1.5

O mapa  $\mu$  é um produto externo reduzido, que verificamos que é isomorfismo na seção 3.2.

Portanto,  $\beta$  é um isomorfismo por ser composição de isomorfismos.  $\square$

**Corolário 3.3.2.**  $\tilde{K}(S^{2n+1}) = 0$  e  $\tilde{K}(S^{2n}) \simeq \mathbb{Z}$

**Demonstração:** Segundo a versão complexa do Teorema da Periodicidade de Bott, substituindo  $X$  por  $S^{2n}$  no isomorfismo  $\beta$  para todo número natural  $n$ , obtêm-se que todos os anéis  $\tilde{K}(S^k)$  são isomorfos se  $k$  for par. Da mesma forma, substituindo  $X$  por  $S^{2n+1}$  para todo natural  $n$ , obtêm-se que todos os anéis  $\tilde{K}(S^k)$  são isomorfos para  $k$  ímpar.

Portanto,  $\tilde{K}(S^{2n+1}) \simeq \tilde{K}(S^1) \simeq \{0\}$  porque todo fibrado vetorial complexo sobre  $S^1$  é trivia-  
lizável. Isto pode ser notado através da bijeção  $\phi$  definida em 1.3.10, uma vez que, para  $S^1$ , temos  
a correspondência

$$\phi : [S^0, GL_n(\mathbb{C})] \rightarrow Vect_{\mathbb{C}}^n(S^1)$$

e é simples mostrar o conjunto de classes de homotopia é constituído por uma única classe. Para  
isso, tome uma função  $f : S^0 \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$  qualquer. Considerando  $S_0 = \{-1, 1\}$ , essa função é  
definida por

$$f(x) = \begin{cases} f(x) = A \text{ se } x = -1 \\ f(x) = B \text{ se } x = 1 \end{cases} \quad \text{para certas matrizes } A, B \in GL_n(\mathbb{C}).$$

Note que, como  $GL_n(\mathbb{C})$  é conexo por caminhos, é possível construir caminhos  $\gamma_1 : I \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$   
e  $\gamma_2 : I \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$  de forma que  $\gamma_1(0) = A$ ,  $\gamma_2(0) = B$  e  $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = Id$ , a matriz iden-  
tidade. Utilizando esses caminhos, é possível construir uma homotopia  $H : S^0 \times I \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$   
definida por

$$H(x, t) = \begin{cases} \gamma_1(t) \text{ se } x = -1 \\ \gamma_2(t) \text{ se } x = 1 \end{cases} \quad \text{para todo } (x, t) \in S^0 \times I.$$

A função  $H$  é contínua por conta dos caminhos serem contínuos e  $S^0$  ser um conjunto discreto.  
Portanto, é homotopia entre  $H(x, 0) = f(x)$  e  $H(x, 1) = Id$  para todo  $x \in S^0$ .

Assim, concluímos que toda função entre  $S^0$  e  $GL_n(\mathbb{C})$  é homotópica à mesma função constan-  
te igual a  $Id \in GL_n(\mathbb{C})$  em todos os pontos e, portanto, o conjunto  $[S^0, GL_n(\mathbb{C})]$  é formado  
por uma só classe de homotopia para todo  $n$  natural.

Como  $\phi$  é bijeção entre  $[S^0, GL_n(\mathbb{C})]$  e  $Vect_{\mathbb{C}}^n(S^1)$ , conclui-se que existe única classe de isomor-  
fismo de fibrados vetoriais complexos com base  $S^1$  e dimensão  $n$  para qualquer  $n$  natural fixado.  
Isto é, todo fibrado vetorial complexo sobre  $S^1$  é isomorfo a  $\varepsilon^n$  para algum número natural  $n$  e,  
portanto, são todos equivalentes pela relação  $\sim$  e de fato confirmamos que  $\tilde{K}(S^1) \simeq \{0\}$ .

Além disso,  $\tilde{K}(S^{2n}) \simeq \tilde{K}(S^2) \simeq \mathbb{Z}$ , como notado anteriormente na demonstração do Teorema  
da Periodicidade. □

**Corolário 3.3.3.**  $K(S^{2n+1}) = \mathbb{Z}$  e  $K(S^{2n}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

**Demonstração:** Aplicação direta do isomorfismo  $K(x) \simeq \tilde{K}(X) \oplus \mathbb{Z}$ , presente no Corolário 2.1.26  
juntamente com o Corolário 3.3.2 apresentado anteriormente. □

## 3.4 Aplicações

### 3.4.1 Esferas Paralelizáveis

Nesta seção, será demonstrado que as únicas esferas paralelizáveis são  $S^0$ ,  $S^1$ ,  $S^3$  e  $S^7$ . Será necessária a utilização de alguns lemas que não serão demonstrados neste trabalho por não estarem dentro do alcance dele, mas todos os resultados utilizados estão referenciados para consulta.

**Definição 3.4.1** (Esfera paralelizável). Uma esfera  $S^n$  é dita paralelizável se o fibrado vetorial tangente à ela  $TS^n$  for trivializável.

Já vimos nas Observações 1.1.10, 1.1.11 e 1.1.12 que as esferas de dimensões 1, 3 e 7 são paralelizáveis. Além disso,  $S^0$  também é paralelizável por ser discreto, como já comentado ao final da seção 1.1.

**Observação 3.4.2.** Mais geral, podemos definir uma variedade como **paralelizável** quando o seu fibrado tangente é trivial.

**Definição 3.4.3** (Álgebra de divisão em  $\mathbb{R}^n$ ). Uma álgebra de divisão é uma álgebra (não necessariamente comutativa e associativa) em que a operação de multiplicação  $\mu : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é tal que, os mapas  $\mu(-, a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\mu(a, -) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  são lineares e invertíveis fixando  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  qualquer.

**Exemplos:**  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}, \mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H}$  e  $\mathbb{R}^8 \simeq \mathbb{O}$  são álgebras de divisão segundo a definição acima.

O objetivo desta seção é verificar que as únicas esferas paralelizáveis são as citadas acima e que as únicas álgebras de divisão  $\mathbb{R}^n$  são as citadas no exemplo anterior.

**Definição 3.4.4.** [H-espço] Uma esfera  $S^n$  é um H-espço se existe um mapa de multiplicação contínuo  $m : S^n \times S^n \rightarrow S^n$  que possui uma identidade  $e \in S^n$  em ambos os lados, isto é,  $m(e, x) = x$  e  $m(x, e) = x$  para todo  $x \in S^n$ .

**Definição 3.4.5** (Grau de um mapa contínuo entre esferas). Dado um mapa contínuo  $f : S^n \rightarrow S^n$ , temos o homomorfismo de anel induzido por  $f$  da forma  $f^* : \tilde{K}^n(S^n) \rightarrow \tilde{K}^n(S^n)$  onde  $\tilde{K}^n(S^n) = \tilde{K}(S^n(S^n)) \simeq \tilde{K}(S^{2n}) \simeq \mathbb{Z}$ . Se  $f^*(x) = \lambda x$ , temos que  $\lambda$  é o **grau** de  $f$ .

**Lema 3.4.6.**  $S^{2k}$  não é H-espço para todo  $k \geq 0$ .

**Demonstração:** Caso  $S^{2k}$  seja um H-espço, teríamos um produto  $m : S^{2k} \times S^{2k} \rightarrow S^{2k}$  nos termos da definição 3.4.4.

Os mapas  $m(-, x_0)$  e  $m(x_0, -)$  possuem ambos grau 1, fixado  $x_0 \in X$  qualquer. De fato, os mapas  $x \mapsto m(x, x_0)$  e  $x \mapsto m(x_0, x)$  são ambos homotópicos à identidade, pois é possível fazer um caminho entre  $e$  e  $x_0$  na esfera  $S^{2n}$  e, a partir dele, formar um caminho entre  $m(x, e) = x$  e  $m(x, x_0)$  ou entre  $m(e, x) = x$  e  $m(x_0, x)$ . Essa homotopia implica que os mapas induzidos por  $\tilde{K}^{2k} = \tilde{K}^0 = \tilde{K}$  são isomorfismos de anel e, portanto, precisa ter grau 1, já que em um isomorfismo de anel  $f$  vale  $f(1) = 1$ .

Dessa forma, temos o mapa induzido de  $m$  pelo functor  $K$ ,  $m^* : K(S^{2k}) \rightarrow K(S^{2k} \times S^{2k})$ . Note que  $K(S^{2k} \times S^{2k}) \simeq K(S^{2k}) \otimes K(S^{2k})$ ,  $K(X) \simeq \tilde{K}(X) \oplus \mathbb{Z}$  pelo Lema 2.1.26, e, se  $X$  é esfera de dimensão par, ainda temos que  $\tilde{K}(S^{2k}) \simeq \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha)^2$ , uma vez que  $\tilde{K}(S^{2k})$  é isomorfo a  $\tilde{K}(S^2)$  que é isomorfo ao anel gerado por  $H - 1$  enquanto grupo, mas onde  $(H - 1)^2 = 0$ .

Assim,  $m^*$  deve ter o seguinte formato

$$m^* : \frac{\mathbb{Z}[\alpha]}{\alpha^2} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \left( \frac{\mathbb{Z}[\beta]}{\beta^2} \oplus \mathbb{Z} \right) \otimes \left( \frac{\mathbb{Z}[\gamma]}{\gamma^2} \oplus \mathbb{Z} \right) = \left( \frac{\mathbb{Z}[\beta]}{\beta^2} \otimes \mathbb{Z} \right) \oplus \left( \mathbb{Z} \otimes \frac{\mathbb{Z}[\gamma]}{\gamma^2} \right) \oplus \left( \frac{\mathbb{Z}[\beta]}{\beta^2} \otimes \frac{\mathbb{Z}[\gamma]}{\gamma^2} \right),$$

lembrando que o produto com  $\mathbb{Z}$  é trivial pelo Lema 3.1.5.

Portanto, em uma parte  $m^*$  leva  $\mathbb{Z}[\alpha]/\alpha^2 \simeq \tilde{K}(S^{2k})$  em  $\mathbb{Z}[\beta]/\beta^2 \simeq \tilde{K}(S^{2k})$ . Essa parte é somada com outra em que  $m^*$  leva  $\mathbb{Z}[\alpha]/\alpha^2 \simeq \tilde{K}(S^{2k})$  em  $\mathbb{Z}[\gamma]/\gamma^2 \simeq \tilde{K}(S^{2k})$  e, de fato, essas duas parcelas dependem do grau dos mapas  $m(-, x_0)$  e  $m(x_0, -)$  nos termos da Definição 3.4.5.

Isto é, explicitamente, se os graus dos mapas  $m(-, x_0)$  e  $m(x_0, -)$  forem  $p$  e  $q$  respectivamente, então o mapa  $m^*$  induzido por  $K$  deve ser definido por

$$m^*(\alpha) = (p\beta) \otimes 1 + 1 \otimes (q\gamma) + z(\beta \otimes \gamma)$$

para algum  $z \in \mathbb{Z}$ .

Dessa forma,  $m^*(\alpha^2) = (m^*(\alpha))^2 = pq(\beta \otimes \gamma)$ , pois  $\beta^2 = 0$  e  $\gamma^2 = 0$ . Mas, como  $\alpha^2 = 0$  e  $m^*$  é homomorfismo, temos também que  $m^*(\alpha^2) = 0$ . Isso significa que  $pq(\beta \otimes \gamma) = 0$ , o que implica  $p = 0$  ou  $q = 0$ . Esse é um absurdo, pois tínhamos que os graus desses mapas, neste caso, são  $p = q = 1$ . Portanto, é impossível existir tal produto  $m$  para esferas de dimensão par. □

**Lema 3.4.7.** *Se  $\mathbb{R}^n$  é uma álgebra de divisão ou se  $S^{n-1}$  é paralelizável, então  $S^{n-1}$  é H-espço.*

O lema anterior é demonstrado no Lema 2.17 de [3, p.59-p.60]

**Definição 3.4.8** (Invariante de Hopf). Dado um mapa  $f : S^{4n-1} \rightarrow S^{2n}$ , seja  $C_f$  o espaço formado

pela colagem de  $S^{2n}$  com um  $4n$ -disco, via  $f$  em  $\partial D^{4n} \simeq S^{4n-1}$

Dessa forma,  $C_f/S^{2n}$  é homeomorfo a  $S^{4n}$ .

Além disso, temos a seguinte sequência exata do par  $(C_f, S^{4n})$ :

$$0 \longrightarrow \tilde{K}(S^{4n}) \xrightarrow{q^*} \tilde{K}(C_f) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}(S^{2n}) \longrightarrow 0$$

A injetividade do primeiro mapa segue de  $\tilde{K}^{-1}(S^{2n})$ , que estaria à esquerda da sequência se fosse montada a sequência longa apresentada anteriormente em (2.5), ser igual a  $\tilde{K}(S(S^{2n})) \simeq \tilde{K}(S^{2n+1}) \simeq 0$  pelo Corolário 3.3.2. Da mesma forma, a sobrejetividade do segundo mapa segue de  $\tilde{K}^1(S^{4n})$ , que estaria à direita da mesma sequência na sequência longa representada em (2.5), ser igual a  $\tilde{K}^{-1}(S^{4n}) = \tilde{K}(S(S^{4n})) \simeq \tilde{K}(S^{4n+1}) \simeq 0$  pelo mesmo Corolário 3.3.2.

Assim, como  $\tilde{K}(S^2)$  é gerado por  $H - 1$  e vale  $(H - 1)^2 = 0$  e todos os outros  $\tilde{K}(S^{2k})$  para  $k > 1$  são isomorfos a  $\tilde{K}(S^2)$  pelo Corolário 3.3.2, temos que:

$\tilde{K}(S^{4n})$  pode ser escrito como  $\mathbb{Z}[\alpha]/\alpha^2$  para algum  $\alpha$

$\tilde{K}(S^{2n})$  pode ser escrito como  $\mathbb{Z}[\beta]/\beta^2$  para algum  $\beta$

Agora, seja  $\alpha' \in \tilde{K}(C_f)$  tal que  $\alpha'$  é a imagem de  $\alpha$  gerador de  $\tilde{K}(S^{4n})$  pelo mapa  $q^*$  e seja  $\beta' \in \tilde{K}(C_f)$  cuja imagem por  $i^*$  é  $\beta$  gerador de  $\tilde{K}(S^{2n})$ .

Por  $i^*$  ser um homomorfismo de anel,  $i^*((\beta')^2) = \beta^2 = 0$ . Isto é,  $(\beta')^2 \in \text{Ker } i^* = \text{Im } q^*$ . Então  $(\beta')^2 = q^*(h\alpha) = h\alpha'$  para algum  $h \in \mathbb{Z}$ . Este inteiro  $h$  é o **invariante de Hopf** de  $f$ .

**Definição 3.4.9** (Mapa associado). Dado um mapa  $g : S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ , é possível construir um mapa associado  $\tilde{g} : S^{2n-1} \rightarrow S^n$  definido por

$$\tilde{g}(x, y) = \begin{cases} |y|g(x, \frac{y}{|y|}) & \text{se } (x, y) \in \partial D^n \times D^n \\ |x|g(\frac{x}{|x|}, y) & \text{se } (x, y) \in D^n \times \partial D^n \end{cases}$$

ao considerar  $S^{2n-1} = \partial(D^n \times D^n) = \partial D^n \times D^n \cup D^n \times \partial D^n$ .

De fato,  $\tilde{g}$  está bem definido porque  $|y|g(x, \frac{y}{|y|}) \in D_+^n$  e  $|x|g(\frac{x}{|x|}, y) \in D_-^n$  e temos que  $S^n = D_+^n \cup D_-^n$ .

**Lema 3.4.10.** Se  $g : S^{2n-1} \times S^{2n-1} \rightarrow S^{2n-1}$  é uma multiplicação com  $S^{2n-1}$  um  $H$ -espaço, então o mapa associado  $\tilde{g} : S^{4n-1} \rightarrow S^{2n}$  tem invariante de Hopf 1 ou  $-1$ .

O lema anterior é demonstrado no Lema 2.18 de [3, p.256].

**Lema 3.4.11.** [Teorema de Adams] Existe um mapa  $\tilde{g} : S^{4n-1} \rightarrow S^{2n}$  com invariante de Hopf 1 ou  $-1$  somente quando  $n = 1, 2$  ou  $4$ .

O lema anterior é demonstrado em [3, p.62-p.65].

**Teorema 3.4.12.**  $\mathbb{R}^n$  é álgebra de divisão apenas para  $n = 1, 2, 4$  e  $8$ , assim como  $S^{n-1}$  é paralelizável apenas para  $n = 1, 2, 4$  e  $8$ .

**Demonstração:** Já temos a informação de que, para  $n = 1, 2, 4$  e  $8$  de fato  $\mathbb{R}^n$  é álgebra de divisão e  $S^{n-1}$  é paralelizável. Resta verificar que, dada uma álgebra de divisão  $\mathbb{R}^n$  ou uma esfera paralelizável  $S^{n-1}$ , necessariamente  $n = 1, 2, 4$  ou  $8$ .

Pelo Lema 3.4.7, conclui-se que dada uma álgebra ou uma esfera nessas condições, necessariamente  $S^{n-1}$  é H-espaço.

Caso  $n$  seja ímpar maior que 1, é impossível  $S^{n-1}$  ser H-espaço por conta do Lema 3.4.6. Com essa contradição, é possível concluir que  $S^{n-1}$  não é paralelizável e  $\mathbb{R}^n$  não é álgebra de divisão para  $n$  ímpar maior que 1.

Se  $n$  for par e  $S^{n-1}$  é H-espaço, por definição há uma multiplicação  $g : S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ . Como  $n$  é par, pode-se escrever  $n = 2m$  para algum  $m \geq 1$ , e é possível aplicar o Lema 3.4.10 para concluir que existe mapa  $\tilde{g} : S^{4m-1} \rightarrow S^{2m}$  com invariante de Hopf 1 ou  $-1$ .

Por fim, pelo Lema 3.4.11, sabemos que só existe tal mapa  $\tilde{g}$  caso  $m = 1, 2$  ou  $4$ , isto é,  $n = 2, 4$  ou  $8$ .

Assim, concluimos que se  $\mathbb{R}^n$  é álgebra de divisão ou se  $S^{n-1}$  é esfera paralelizável, necessariamente temos  $n = 1, 2, 4$  ou  $8$ . □

**Observação 3.4.13.** Apesar de termos seguido a abordagem em que o resultado do Teorema acima segue o Teorema de Adams, anteriormente já havia sido provado por Ferdinand Georg Frobenius que as únicas álgebras de divisão reais associativas são  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$  e  $\mathbb{O}$  no Teorema de Frobenius, e também já havia sido provado por Adolf Hurvitz que as únicas álgebras de divisão reais não associativas são  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$  e  $\mathbb{O}$  no Teorema de Hurvitz.



# Apêndice A

## Os Octônios de Cayley

Através do processo de duplicação de Cayley-Dickson, é possível construir os octônios  $\mathbb{O}$  através de uma duplicação dos quatérnios. O processo também pode ser utilizado para encontrar os quatérnios a partir dos complexos e os complexos a partir dos reais. Porém, não é possível continuar a duplicação sem a perda de algumas propriedades importantes. Um exemplo disso é que, conforme duplicamos  $\mathbb{R}$ , conjunto onde é possível definir uma ordem, construímos  $\mathbb{C}$ , onde já não é possível definir ordem. Outro exemplo, na duplicação de  $\mathbb{C}$ , é que  $\mathbb{C}$  é comutativo, mas  $\mathbb{H}$  não é, pois  $ij = -ji$ ,  $jk = -kj$  e  $ki = -ik$ .

### A.1 Duplicação de Cayley-Dickson

**Definição A.1.1.** Uma álgebra  $\mathcal{A}$  sobre  $\mathbb{R}$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  que possui uma operação  $\mu : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  tal que denotamos  $\mu(a_1, a_2) = a_1 \cdot a_2$  ou  $\mu(a_1, a_2) = a_1 a_2$  como multiplicação.  $\mu$  deve possuir as seguintes propriedades para todos  $x, y, z \in \mathcal{A}$  e para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

1.  $(x + y)z = xz + yz$
2.  $z(x + y) = zx + zy$
3.  $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$

De forma geral, no processo de duplicação de Cayley-Dickson, pode-se duplicar uma álgebra  $\mathcal{A}$  cujos elementos são da forma  $a_0 + a_1 i_1 + \dots + a_m i_m$  com  $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}$  e  $i_1, \dots, i_m$  unidades imaginárias, isto é, unidades que respeitam  $i_n^2 = -1$  para todo inteiro não negativo  $n \leq m$ .

Seja  $\mathcal{A}'$  a álgebra obtida de forma que os elementos dela são  $x_1 + x_2 e$  para quaisquer  $x_1, x_2 \in \mathcal{A}$  e com  $e$  um novo símbolo, que no caso é uma nova unidade imaginária.

A soma de  $\mathcal{A}'$  é definida por  $(x_1 + x_2 e) + (y_1 + y_2 e) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)e$  para todos  $x_1 + x_2 e, y_1 + y_2 e \in \mathcal{A}'$ .

O produto de  $\mathcal{A}'$  é definido por  $(x_1 + x_2e)(y_1 + y_2e) = x_1y_1 - \overline{y_2}x_2 + (y_2x_1 + x_2\overline{y_1})e$ , onde  $\overline{y_2}$  e  $\overline{y_1}$  são  $y_2$  e  $y_1$  conjugados em  $\mathcal{A}$ . A operação de conjugação em  $\mathcal{A}$  é definida por  $\overline{a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 \dots + a_m i_m} = a_0 - a_1i_1 - a_2i_2 - \dots - a_m i_m$ .

Com este produto, é possível notar que  $e^2 = -\bar{1} \cdot 1 = -1$  e que  $(i_j e)^2 = -\bar{i_j} i_j = i_j^2 = -1$  para todo  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Ou seja,  $\mathcal{A}'$  possui como unidades imaginárias  $i_1, \dots, i_m, e, i_1 e, \dots, i_m e$ . Observe que  $\mathcal{A}'$  possui o dobro da dimensão de  $\mathcal{A}$ .

**Exemplo:** Os octônios são da forma  $x_1 + x_2e$ , com  $e$  unidade imaginária e  $x_1, x_2 \in \mathbb{H}$ . Assim, as unidades imaginárias do octônio são  $i, j, k, e, ie, je$  e  $ke$ .

A tabela de multiplicação dos octônios pode ser obtida através da definição de produto geral anterior, e é a seguinte:

	1	i	j	k	e	ie	je	ke
1	1	i	j	k	e	ie	je	ke
i	i	-1	k	-j	ie	-e	-ke	je
j	j	-k	-1	i	je	ke	-e	-ie
k	k	j	-i	-1	ke	-je	ie	-e
e	e	-ie	-je	-ke	-1	i	j	k
ie	ie	e	-ke	je	-i	-1	-k	j
je	je	ke	e	-ie	-j	k	-1	-i
ke	ke	-je	ie	e	-k	-j	i	-1

Tabela A.1: Tabela de multiplicação dos octônios

Se  $x = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7$ , colocando  $i_1 = i, i_2 = j, i_3 = k, i_4 = e, i_5 = ie, i_6 = je$  e  $i_7 = ke$ , temos, através da tabela de multiplicação, que:

- $x = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$
- $ix = (-a_1, a_0, -a_3, a_2, -a_5, a_4, a_7, -a_6)$
- $jx = (-a_2, a_3, a_0, -a_1, -a_6, -a_7, a_4, a_5)$
- $kx = (-a_3, -a_2, a_1, a_0, -a_7, a_6, -a_5, a_4)$
- $ex = (-a_4, a_5, a_6, a_7, a_0, -a_1, -a_2, -a_3)$
- $(ie)x = (-a_5, -a_4, a_7, -a_6, a_1, a_0, a_3, -a_2)$
- $(je)x = (-a_6, -a_7, -a_4, a_5, a_2, -a_3, a_0, a_1)$
- $(ke)x = (-a_7, a_6, -a_5, -a_4, a_3, a_2, -a_1, a_0)$

E é possível notar que os elementos são dois a dois ortogonais pois o produto interno de quaisquer dois deles resulta em 0.

# Referências Bibliográficas

## Livros

- [1] Atiyah, Michael *K-Theory*, WA Benjamin New York, 1967.
- [2] Hatcher, Allen. *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 1, 2001.
- [3] Hatcher, Allen. *Vector Bundles and K-theory*. Livro não publicado disponível em <https://pi.math.cornell.edu/hatcher/VBKT/VBpage.html>. Último acesso em 15 de novembro de 2024.
- [4] Karoubi, Max. *K-Theory: An Introduction*, Springer, 1, 1978.
- [5] Kostrikin, Alexei. Yu, Manin. *Linear Algebra and Geometry*, Gordon & Breach, 1, 1989.
- [6] Munkres, James. *Topology*, Pearson Education, 2, 2000.
- [7] Riehl, Emily. *Category Theory in Context*, Dover Publications, 1, 2016.

## Artigos e periódicos

- [8] Bonatto, Luciana. *Bott's Periodicity Theorem from the Algebraic Topology Viewpoint* (2017).
- [9] Magil, Matthew. *Topological K-theory and Bott Periodicity*, (2017).
- [10] Sena, Lia. Dantas, Iago. Monteiro, Rubens. *A Álgebra dos Octônios*, Revista Científica Multidisciplinar RECIMA21, 4 (2023).