INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JULIANA MATIA NEGRI

UM ESTUDO SOBRE A RESSIGNIFICAÇÃO DO ERRO EM MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

São Paulo
2025

Juliana Matia Negri

UM ESTUDO SOBRE A RESSIGNIFICAÇÃO DO ERRO EM MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Monografia apresentada à Disciplina MAT0451 - Projeto de Ensino de Matemática, Departamento de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Área de Concentração: Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Carlos Brolezzi.

São Paulo
2025

FOLHA DE AVALIAÇÃO
MAT0451 - PROJETOS DE ENSINO

UM ESTUDO SOBRE A RESSIGNIFICAÇÃO DO ERRO EM MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

AUTOR
JULIANA MATIA NEGRI

ORIENTAÇÃO
PROF. DR. ANTÔNIO CARLOS BROLEZZI

NOTA FINAL:

ORIENTADOR

PROF. DR. HUMBERTO LUÍS DE JESUS

PROF. DR. JÚLIO CÉSAR AUGUSTO DO VALLE

DATA DA APRESENTAÇÃO
02/12/2025

Sim, existem dois caminhos pelos quais você pode seguir. Mas, na longa estrada, sempre há tempo de mudar de direção.

LED ZEPPELIN - Stairway to heaven, 1971

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer ao professor Antônio Carlos Brolezzi por toda orientação e apoio que possibilitaram a realização deste trabalho.

Agradeço aos professores Humberto de Jesus e Júlio do Valle por terem aceitado fazer parte da banca examinadora e por tudo que me ensinaram durante suas brilhantes aulas.

Agradeço aos professores Fábio, Gabriel, João e Paulino por terem aceitado participar das entrevistas e enriquecer o conteúdo do trabalho.

Agradeço à minha mãe Elisangela Matia por ter movido montanhas para que eu pudesse ter uma educação de qualidade, por ser meu colo todos os dias independentemente da distância e pela paciência comigo em todo esse processo.

Agradeço ao meu pai Wagner Negri por fazer questão de estar sempre presente independentemente da distância, por comemorar minhas conquistas como se fossem as dele e por sempre ter tido bons conselhos quando mais precisei.

Agradeço ao meu avô Alberto Negri por ter me acompanhado crescer até onde foi possível, sempre me incentivando nos estudos e gastando horas de seus dias me auxiliando nas tarefas da escola.

Agradeço à minha família do coração, Esther e Geraldo, por não terem pensado duas vezes ao decidirem me acolher em sua casa por mais de um ano para que eu pudesse trabalhar e estudar da maneira mais confortável possível.

Agradeço ao meu irmão do coração Gabriel por compartilharmos, neste ano, nossos exatos fins de ciclos. Seu apoio diário foi fundamental.

Agradeço aos meus professores de matemática do Ensino Básico, Joira e Jorge, por terem acendido em mim o interesse pela matemática e, mais do que isso, demonstrado como a educação pode impactar profundamente a vida dos alunos.

Agradeço aos meus amigos do Ensino Médio, Elisa, Marcos e Raphaela, por terem insistido para que eu prestasse a Fuvest quando eu mesma jamais imaginei que pudesse passar no vestibular.

Por último, mas não menos importante, agradeço ao meu conjunto de amigos da faculdade, Carlos, Danilo, Felipe, Guilherme, Kaique e Mateus por terem sido para mim uma rede de apoio imprescindível. Durante os últimos 5 anos, tornamos as rotinas uns dos outros mais leves e tivemos o privilégio de observar o crescimento pessoal e profissional de cada um.

RESUMO

Este trabalho investiga a ressignificação do erro nas aulas de Matemática do Ensino Médio e analisa os potenciais da metodologia da análise de erros como ferramenta pedagógica. A partir da percepção da relação negativa dos alunos com respostas incorretas, marcadas pela retração e dificuldade em evidenciar dúvidas, desenvolve-se um estudo teórico sobre o tema e seus precursores, os quais o discutem sob várias perspectivas, entre elas, comportamentais, cognitivas, epistemológicas e investigativas. Além disso, a pesquisa aborda aspectos psicossociais dos adolescentes, buscando compreender como as particularidades dessa fase influenciam no processo de ensino aprendizagem. Com relação à prática, foram realizadas entrevistas com docentes de escolas públicas e privadas, bem como análises de uma avaliação real de estudantes do 3° ano do Ensino Médio de uma escola privada, na qual foram discutidos de maneira qualitativa e quantitativa os erros cometidos e estratégias diversas utilizadas pelos alunos. Conclui-se que entender o motivo dos erros e utilizá-los coletivamente é uma forma de valorizar os conhecimentos prévios desses jovens e ampliar as discussões sobre determinado conteúdo.

Palavras-chave: Análise de Erros; Ensino Médio; Ensino de Matemática

.

ABSTRACT

This work investigates the reframing of error in High School Mathematics classes and analyzes the potential of the error analysis methodology as a pedagogical tool. Based on the perception of students' negative relationship with incorrect answers, marked by shame and difficulty in expressing doubts, a theoretical study is developed on the topic and its precursors, who discuss it from various perspectives, including behavioral, cognitive, epistemological, and investigative. Furthermore, the research addresses psychosocial aspects of adolescents, seeking to understand how the particularities of this stage influence the teaching and learning process. Regarding practice, interviews were conducted with teachers from public and private schools, as well as analyses of a real assessment taken by 3rd-year High School students from a private school, in which the errors committed and the various strategies used by students were discussed qualitatively and quantitatively. It is concluded that understanding the reason behind errors and using them collectively is a way to value these young people's prior knowledge and broaden discussions about a given content.

Keywords: Error Analysis; High School; Mathematics Teaching.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Ao longo dos cinco anos da minha trajetória no curso de Licenciatura, tive experiências diversas em escolas igualmente diferentes entre si, com culturas, público e metodologias únicas. Entretanto, existe um aspecto que vem me chamando a atenção ao longo do tempo: a relação negativa dos alunos com o erro nas aulas de matemática, transposta de uma realidade que vivi enquanto estudante e que agora analiso mais criticamente na posição de professora em formação.

Além da experiência nos estágios mencionados, houve duas disciplinas fundamentais que despertaram em mim a curiosidade para aprender mais sobre o assunto: MAT1500 - Projetos de Estágio e EDM0615 - Educação Matemática, as quais me proporcionaram recursos para que eu entendesse que a análise de erros já é um vasto campo de pesquisa que pode ser desenvolvido como metodologia dentro de sala.

Entre as potencialidades observadas, duas delas me chamaram a atenção para desenvolver o trabalho. Primeiramente, pensar como respostas equivocadas podem ser utilizadas para que os alunos percebam seus erros e façam as respectivas correções. Mais que isso, entendendo o erro como uma dificuldade na aprendizagem, pode-se utilizá-lo na elaboração de estratégias de ensino que agreguem conhecimento aos demais alunos, não somente àquele que se equivocou.

Além disso, percebi, nas mesmas experiências citadas anteriormente, que tenho uma afinidade muito maior em trabalhar com o público do Ensino Médio e em lidar com questões da adolescência. Quando comparados aos alunos do Ensino Fundamental, sinto que consigo estabelecer uma relação mais natural com eles e, assim, executar melhor o trabalho. Dentro desse espaço, notei uma particularidade impeditiva ao pleno desenvolvimento das aulas que ministrei e prestei assistência: a aversão dos alunos com os próprios erros. A vergonha em fazer perguntas e o instinto de apagar a resposta antes que tenhamos a chance de analisar seu raciocínio num exercício são exemplos de elementos desfavoráveis a uma sala de aula, cujo ambiente se propõe a ser acolhedor e se mostrar como uma alavanca ao conhecimento matemático. Portanto, conhecer a fase da adolescência se faz necessário para que possamos introduzir essa metodologia com objetivos bem estabelecidos.

Por outro lado, a metodologia do ensino baseada na análise de erro não é única, ou seja, não existe uma fórmula para sua aplicação. Pensando em utilizar avaliações para esse fim, deve-se levar em conta fatores importantes: No dia a dia escolar, a lógica da automatização de resultados de desempenho se mostra praticamente inevitável, seja pela grande quantidade de alunos e turmas sob responsabilidade do professor ou pelos numerosos conteúdos a serem trabalhados ao longo do ano. Consequentemente, muitas vezes, estas avaliações se apresentam como diagnósticos superficiais quando se referem a simplesmente devolver um número ao estudante. Nesse sentido, e percebendo o potencial de devolutivas bem elaboradas, as avaliações podem ser instrumentos que corroboram à discussão proveitosa do erro.

Numa perspectiva mais ampla, a Análise de Erros como tendência na Educação Matemática vem ganhando maior notoriedade. Um exemplo dessa afirmação é a PND (Prova Nacional Docente), realizada pelo Inep (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira) em outubro de 2025. Ao analisar as questões da prova, confere-se que, das 50 totais específicas da disciplina, 10 envolviam conhecimentos sobre a metodologia da análise de erros. Essa prova, de acordo com o Instituto, tem o objetivo de auxiliar estados e municípios na seleção de professores para fazerem parte de seu corpo docente. Além disso, seu conteúdo está alinhado com as Diretrizes Nacionais Curriculares, ou seja, aquilo que o governo considera fundamental para a ministração de aulas de matemática, o que evidencia a relevância do tema num âmbito, sobretudo, nacional.

A seguir, ilustrarei com algumas dessas questões os principais pilares da Análise de Erros:

A primeira questão diz respeito à habilidade do professor em identificar tecnicamente os erros cometidos; sendo capaz de evidenciar qual(is) conceito(s) foi(foram) perdidos/confundidos.

Figura 1 - Questão sobre identificação técnica do erro

Ball, Thames e Phelps (2008) conjecturam que (1) o conhecimento do conteúdo poderia ser subdividido em CCK (conhecimento comum do conteúdo) e SCK (conhecimento especializado do conteúdo); (2) o conhecimento pedagógico do conteúdo poderia ser subdividido em KCS (conhecimento do conteúdo e de estudantes) e KCT (conhecimento do conteúdo e de ensino) (Shulman, 1986).

Em síntese, eles definem: reconhecer uma resposta errada é um conhecimento comum do conteúdo (CCK); dimensionar rapidamente a natureza de um erro, especialmente aqueles que não são familiares, é um conhecimento especializado do conteúdo (SCK); ter familiaridade com os erros comuns e saber por que diversos estudantes os cometem é um conhecimento de conteúdo e de estudantes (KCS); selecionar uma abordagem de ensino que seja eficiente para superar certas dificuldades e/ou explorar certos aspectos de um conteúdo é um conhecimento do conteúdo e de seu ensino (KCT).

Os professores sabem resolver o exercício e sabem que tal resposta é incorreta, mas ensinar envolve mais do que identificar respostas incorretas. O professor deve ser capaz de procurar as fontes do erro. Efetivamente, a análise de erros é uma prática comum entre os matemáticos no decorrer de seu próprio trabalho; essa tarefa, no ensino, difere somente pelo fato de que enfoca os erros produzidos pelos estudantes.

Nesse contexto, foi feita uma pesquisa com base na pergunta: *Quantos pares (x, y) de números reais existem, tais que* $x + y = xy = \frac{x}{y}$? Uma resposta obtida e analisada por pesquisadores em um estudo foi a seguinte:

$$x + y = x \cdot y$$
$$\frac{x + \cancel{y}}{\cancel{y}} = x$$
$$x = x$$
$$y = y$$

$$x = 0$$
$$y = 0$$

$$S: \{0, 0\}$$

Em relação à solução apresentada para a pergunta da pesquisa, o conhecimento comum de conteúdo, mais especificamente o conhecimento comum de Matemática, permite ao professor identificar que

A a passagem da primeira para a segunda linha dessa solução denota, provavelmente, que esse estudante utiliza a ideia e comumente ensinada nas escolas de "passar o *y* para o outro lado, trocando o sinal", desconsiderando a restrição *y* diferente de zero.

B a simplificação de $\frac{(x+y)}{y}$ resultando em $x = x$ está errada, indicando que o estudante ainda tem dificuldades com a propriedade distributiva. Essa simplificação algébrica realizada de forma correta resulta na equação: $x + 1 = x$.

C o par ordenado (0, 0) não é a solução da equação proposta. Embora seja solução da equação formada pelas duas primeiras expressões $x + y = xy$, não é solução da equação, considerando a terceira expressão $\frac{x}{y}$, pois $\frac{0}{0}$ indica um resultado que tende para o infinito.

D a resolução que parte da igualdade $xy = \frac{x}{y}$ resulta em $y = +1$ ou $y = -1$. No entanto, $y = +1$ implica $x = 0$, resultado que não satisfaz toda equação. A solução apresenta o *y*, um número inteiro negativo, e o *x*, um número racional positivo e não inteiro.

Fonte: INEP - PND/ENADE 2025. Licenciatura em Matemática, prova tipo 2, questão 33

Já a segunda questão faz o participante refletir sobre a intervenção pedagógica adequada a cada situação em que o aluno comete um desses erros conceituais, a fim de fazer com que ele tenha clareza de que sua resposta está incorreta:

Figura 2 - Questão sobre a intervenção pedagógica adequada

Texto para questões 49 e 50

TEXTO 1

Os erros evidenciam dificuldades na aprendizagem, mas a ocorrência deles não deve ser apenas apontada ou penalizada; é preciso utilizá-los para promover a aprendizagem com estudos e pesquisas e a elaboração de estratégias de ensino baseadas nas dificuldades detectadas.

CURY, H. N. Análise de erros: uma possibilidade de trabalho em cursos de formação inicial de professores. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática**, 2013. Disponível em: www.sbembrasil.org.br. Acesso em: 8 maio 2025 (adaptado).

TEXTO 2

A tabela apresenta os resultados da rodada 6 do Campeonato Brasileiro de Futebol, série A, de 2025.

RODADA 6	
INT 3 x 1 JUV	FLA 4 x 0 COR
CEA 1 x 1 SÃO	PAL 0 x 1 BAH
MIR 2 x 2 ATL	CRU 1 x 0 VAS
SPO 0 x 0 FOR	VIT 1 x 1 GRÊ
BOT 2 x 0 FLU	SAN 1 x 2 RED

QUESTÃO 50

Com base nos resultados dos jogos, um estudante do Ensino Fundamental apresentou o seguinte cálculo da média de gols por partida:

$$média = \frac{4+4+2+1+4+1+2+2+3}{9} = \frac{2}{9}$$

Assinale a intervenção pedagógica adequada para o professor que utiliza a análise de erros como metodologia de ensino, conforme a citação de Cury.

A Indicar o erro do estudante e resolver o problema na lousa, chamando a atenção de toda a turma para o fato de que a rodada do campeonato teve dez partidas e, portanto, o cálculo da média precisa ser realizado fazendo a divisão por dez.

B Comunicar ao estudante que seu raciocínio não considerou a partida em que não houve gols, a qual também faz parte da rodada do campeonato e precisa ser considerada para o cálculo da média.

C Propor uma investigação com outros conjuntos de dados para o cálculo da média, por exemplo, o número de irmãos ou de bichos de estimação, para levar o estudante a analisar seus cálculos e respostas com relação à presença de valores zero.

D Mostrar ao estudante que a rodada do campeonato teve dez partidas e dizer que, por isso, o cálculo da média precisa ser realizado somando-se todos os gols e fazendo-se a divisão por dez.

Fonte: INEP - PND/ENADE 2025. Licenciatura em Matemática, prova tipo 2, questão 50

Em relação ao terceiro pilar da metodologia, a prova traz, no texto motivador, uma análise sobre qual, então, seria a postura que o docente deve adotar em sala de aula para que o erro se torne uma oportunidade de aprendizagem:

Figura 3 - Questão sobre a intervenção pedagógica adequada

QUESTÃO 54

Estudos relacionados à Análise de Erros apontam um caminho pedagógico que vai além de aplicar medidas paliativas. A identificação e categorização dos erros cometidos pelos estudantes possibilitam adequar o planejamento de ensino para corrigir os erros conceituais e procedimentais. Para que essa identificação ocorra, os docentes precisam assumir uma postura investigativa e consciente sobre as soluções dos estudantes. Mesmo sendo constantemente delineado como pertencentes ao estudante, muitas dessas variáveis identificadas como prováveis geradoras dos erros estavam associadas ao modelo de ensino ou à postura pedagógica adotada pelo professor. No ensino de probabilidade, por exemplo, frequentemente professores apresentam um “macete” que associa a palavra “ou”, encontrada no enunciado, à ideia de que a solução envolve uma simples “adição de probabilidades”, gerando um dispositivo fácil e prático. No entanto, os estudantes deveriam ser alertados que esta relação somente será satisfeita se os eventos forem mutuamente exclusivos.

VAZ, R. F. N. Por que errar ainda é tão errado? Algumas reflexões sobre o papel do erro no ensino e na avaliação de matemática. **Revemop**, v. 4, 2022 (adaptado).

Fonte: INEP - PND/ENADE 2025. Licenciatura em Matemática, prova tipo 2, questão 54

Assim, o presente trabalho tem como objetivo promover a reflexão acerca dos motivos que levam o aluno a errar um problema, buscando adaptar as discussões de aula da maneira mais proveitosa possível para toda a turma, estimulando a criticidade sobre suas respostas em matemática. Com isso, transversalmente, pretendo instigar professores de matemática do Ensino Médio a utilizarem a metodologia da análise de erros como ferramenta de ensino aprendizagem.

2. METODOLOGIA

O trabalho foi realizado por meio de um levantamento bibliográfico, ou seja, um estudo sobre o que já é pesquisado e conhecido sobre a análise de erros. Entretanto, para que houvesse uma proximidade entre a teoria e a prática, optou-se pela realização de entrevistas com docentes da área de Matemática do Ensino Médio. Além disso, uma etapa prática foi adotada a fim de elucidar ao leitor como seria uma análise desse tipo numa avaliação real dentro de uma sala de aula nos parâmetros quantitativos e qualitativos, evidenciando, também, a necessidade de criticidade em relação aos métodos avaliativos utilizados. Para finalizar, são apresentadas reflexões sobre modos de aproveitar os erros observados.

Sendo a base para o referencial teórico, a pesquisa sobre alguns dos precursores do estudo da análise de erros foi fundamental para entender como essa tendência vem sendo desenvolvida ao longo do tempo, servindo, dessa forma, de alicerce para a metodologia do trabalho. Além disso, a pesquisa viabilizou o conhecimento sobre diferentes perspectivas acerca do tratamento de erros, o que enriqueceu as posteriores discussões.

Foram realizadas quatro entrevistas com professores de matemática inseridos em diferentes contextos. Porém, todos com experiência no Ensino Médio: Paulino Souza, 56 anos, que atua desde 2003 e tem experiência apenas em escolas públicas e EJA (Educação de Jovens e Adultos); Gabriel Sibo, 27 anos, que atua há 10 anos em escolas estaduais; João Moura, 56 anos, empresário da área da educação e ex professor da rede privada; Fábio Marson, 59 anos, professor da rede privada há 25 anos. A entrevista foi realizada em formato semi-estruturado e teve o objetivo de entender o que cada um deles pensa sobre o ato de errar dentro da aula de matemática, bem como a respectiva postura que consideram adequada frente a esse fenômeno. Dessa forma, as falas percorreram os seguintes tópicos:

- Apresentação: nome, idade, onde trabalha, ano do Ensino Médio em que leciona e tempo de sala de aula;
- O que sabe sobre a metodologia da análise de erros? Já utilizou as respostas, resoluções e/ou raciocínios incorretos de seus alunos para reestruturar as aulas que viriam em seguida? Em caso afirmativo, como isso se deu?
- Acredita que os alunos possuem resistência em assumir suas dúvidas/dificuldades e procurar ajuda? A idade pode ter relação com isso? Como a postura do professor pode contribuir para que os alunos fiquem à vontade para apontar suas dificuldades?

- A cultura escolar contribui para a aplicação desse tipo de metodologia? Ou o cronograma pré planejado faz com que não haja tempo suficiente para analisar as respostas com mais cuidado?

As falas obtidas serviram como apoio ao longo do trabalho como exemplos palpáveis, tanto no quinto capítulo quanto na pesquisa prática em si.

Realizada durante estágio em colégio particular na cidade de São Paulo, a coleta de dados se deu durante o período de revisão do terceiro ano, no qual foram escolhidas duas das seis questões dissertativas da Prova Regular do período 4 (os quais, a posteriori, serão melhor detalhados), que ocorreu no mês de setembro, logo depois das férias, sendo o primeiro período de revisão. O motivo da escolha se deu pelo fato de que seria a última prova que o 3° ano faria que incluiria questões dissertativas, sendo as demais inteiramente formatadas por testes, o que não acreditei ser interessante para o desenvolvimento do trabalho por conta do estudo sobre as teorias anteriormente mencionadas.

Nessa lógica, de maneira qualitativa, as resoluções foram avaliadas por meio de atribuição de carimbos e os erros que apareceram foram transformados em oportunidades de discussões, levantando perguntas propícias a formarem um cenário de investigação, como sugerido pela bibliografia utilizada. Já em relação ao aspecto quantitativo, o sistema do Google chamado Looker foi utilizado a fim de verificar que determinados erros apareceram com certa frequência, evidenciando a importância de trazer à tona a discussão daquele equívoco específico.

Por fim, discute-se como a postura do professor pode ser um ambiente seguro e que proporcione uma horizontalidade durante a aula, de modo que sejam levados em consideração os erros como geradores de novos conhecimentos, e não apenas ter o intuito de corrigi-los.

3. ESTUDANDO A METODOLOGIA DA ANÁLISE DE ERROS

A análise de erros na Matemática não é um campo de estudo recente ou sequer bem definido por uma figura precursora específica, mas foi se desenvolvendo ao longo dos anos como um recurso metodológico, em diferentes países e continentes, por diferentes motivos e objetivos.

3.1 Guy Buswell e Charles Judd

Como exemplo, temos estudos dos psicólogos Guy Buswell e Charles Judd os quais, nos Estados Unidos, publicaram uma monografia intitulada "Summary of Educational Investigations Relating to Arithmetic", o qual resume artigos e livros que relatam investigações científicas sobre os métodos e resultados do ensino da aritmética naquele lugar e tempo.

Os estudos estadunidenses da análise de erros têm orientação de longa data de uma corrente da psicologia: Segundo Skinner (1974), o "behaviorism" (ou comportamentalismo), o qual "não é a Ciência do comportamento humano, mas, sim, a filosofia dessa Ciência". Partindo do pressuposto que todo indivíduo realiza ações por toda sua vida e essas ações geram consequências internas e para o ambiente externo, então o comportamentalismo acredita que tais ações podem sofrer modificações. Além disso, existe um conceito importante nesta corrente: os reforços. Para os behavioristas, os reforçamentos seriam fatores que aumentam ou diminuem a probabilidade de um comportamento específico se repetir no futuro, sendo, dessa forma, uma estratégia para o processo educativo, no qual promoveriam a perpetuação de comportamentos desejáveis por meio de um estímulo agradável e a atenuação dos indesejáveis por meio da remoção de estímulos desagradáveis.

> [...] Esta percepção destaca ainda, a necessidade de reforço, a importância de assegurar oportunidades em sala de aula para que o aluno tenha condições de emitir os comportamentos esperados para os objetivos estabelecidos. Assim, ensinar consiste em explicar (até a exaustão) e aprender consiste em repetir, memorizar (ou exercitar) todos os conteúdos ensinados até ser capaz de reproduzi-lo fielmente da forma que foi repassado pelo professor em aulas e dias anteriores. (Santos; Junqueira; Oliveira, 2015; p. 183 - 184)

Essa metodologia de ensino tecnicista (inclusive difundida no Brasil durante a ditadura militar) afirma, portanto, que a aprendizagem da Matemática ocorreria passivamente por meio da repetição e consequente memorização de técnicas de resolução na qual o erro não tem função pedagógica, pois é algo a ser evitado, base da pesquisa de Buswell e Judd.

Por outro lado, a Europa começou seus estudos na Análise de Erros baseada na Psicologia da Gestalt, a qual teve início com os psicólogos Max Wertheimer, Wolfgang Köhler e Kurt Koffka. Esta, por sua vez, traz uma doutrina que tem como base a ideia de que é preciso compreender a totalidade antes da percepção das partes. O conceito foi, ainda, muito consolidado na área da percepção de formas (Bock, 2004). Enquanto isso, na Rússia, antiga União Soviética, o contexto se formava pelas significativas mudanças na estrutura escolar e procedimentos de pesquisa, fortemente influenciados pelos ideais marxistas, além da emergente descrença por parte do sistema de ensino desse país em relação aos testes, uma vez que, em 1936, o Comitê Central do Partido Comunista baniu tal método de avaliação, alegando que esta era insuficiente para demonstrar o nível de desempenho dos alunos, além de não fornecer informações sobre os meios pelos quais estes respondiam aos testes (Radatz,1979).

Assim, tendo em vista que as diferenças teóricas entre as sociedades dificultaram muito a troca de informações sobre os achados, Radatz ressalta algumas motivações que superaram essas dificuldades por estarem latentes no contexto acadêmico e propulsionaram o aprofundamento desse estudo para além dos erros em cálculos aritméticos. Entre elas, está a individualização e diferenciação do ensino da matemática, as quais, apesar de necessárias, necessitam de diagnósticos de dificuldades específicas que apenas seriam conquistados se os professores possuíssem modelos de ação que integrassem o conteúdo matemático com pesquisas e resultados da psicologia educacional e social.

Cada corrente da área da Psicologia da Educação que surgiu agregou conhecimento e propulsionou novos estudos na pesquisa de erros. Logo, apesar de algumas ideias não perdurarem para posteriores pensadores, é importante lembrar que o desenvolvimento de tal área é, sobretudo, construtivo, e aqueles são produtos de uma determinada sociedade num tempo.

3.2 Thorndike

Edward Lee Thorndike foi um psicólogo behaviorista norte-americano que viveu no século XIX e grande parte de suas ideias relacionadas ao ensino de matemática se encontram no livro: “A nova metodologia da Aritmética”, no qual, apesar de voltado a alunos da escola primária, apresenta reflexões interessantes no que diz respeito à proposta de uma forma de ensinar aritmética que evita o esgotamento mental dos alunos por consequência de exercícios de repetição:

> O tempo requerido pela cópia de números, como por muitos dos trabalhos da escola primária, para grande parte dos alunos, é maior do que o tempo exigido pela solução do próprio trabalho de aritmética, em si mesmo. O simples trabalho de copiar é suficiente para matar o prazer de pensar. Os novos métodos recomendam que, tanto quanto possível, a criança faça cópia de números apenas na medida indispensável ao adestramento e correção no escrevê-los e à formação e disposição dos mesmos. Ir além será em pura perda. (p. 27)

Nessa lógica, Thorndike defende que a superestimulação visual produzida pelas cópias propiciam resultados errados e consequente desmotivação dos alunos. Com isso, exemplifica para o leitor sugestões de exercícios que fornece aos professores priorizando a matemática, tirando o foco de estímulos exagerados vindo da repetição ou da linguagem empregada nos enunciados. Além disso, vale ressaltar que a repetição de métodos pode enfatizar erros e/ou incompreensões, caso o aluno repita um processo equivocado muitas vezes. Assim, a citação pode levar à reflexão sobre o erro não necessariamente como falha, mas como desmotivação, repercutindo diretamente na postura docente frente às dificuldades dos alunos.

3.3 Hadamard

Jacques Hadamard, matemático francês que viveu entre os séculos XIX e XX, responsável pela prova do teorema dos números primos, também contribuiu para o estudo. Hadamard foi fortemente influenciado, durante a conferência na Sociedade de Psicologia de Paris, pelas ideias de Henri Poincaré no que diz respeito às relações entre o consciente e o subconsciente (Hadamard, 1945). Nesse sentido, afirma-se que, por vezes, as pessoas tendem a produzir soluções súbitas de problemas por meio de processos do inconsciente e subconsciente que a fase do esforço consciente falhou, fazendo-se notar que Hadamard desencadeou muitas ideias sobre o papel da Psicologia no estudo da criação matemática.

Em uma de suas produções mais célebres, o livro "An essay on the psychology of invention in the mathematical field", o matemático expõe a seguinte perspectiva:

> Muitas vezes, ao tentar ensinar, os professores se debruçam demasiadamente sobre cada parte de um argumento, não apresentando a síntese que representaria o resultado. Se um aluno entende por si só essa síntese, "aprende" a Matemática, mas se ele sente que está faltando algo e não compreende o que está

> errado, fica totalmente perdido e não consegue superar essa dificuldade. (p. 49)

Com esse apontamento, evidencia como relevante o fato de que os alunos precisam ter um entendimento geral daquilo que estão calculando, compreendendo o contexto e o objetivo do problema, para, só então, pensarem num plano de ação e quais seriam as ferramentas matemáticas mais adequadas para aquela ocasião. Por outro lado, se o passo a passo da resolução não tem uma contextualização inicial e o foco se vira para detalhes e especificidades, a clareza do porquê aquilo estar sendo feito se perde e o aluno, ao chegar na resposta final, mal compreende o que fez, tampouco poderá perceber facilmente se houve algum erro, uma vez que a criticidade da resolução daquele problema é comprometida.

Hadamard também reconhece que professores são passíveis ao erro, de modo que a diferença entre eles e seus alunos se dá pela percepção do erro e posterior correção:

> [...] Enquanto a mim (e o meu é o caso de vários matemáticos), cometo muito mais (erros) do que meus estudantes o fazem; só que eu sempre os corrijo até que nenhum traço deles se encontre no resultado final. A razão para isso é que, quando quer que um erro tenha sido cometido [...], a intuição me avisa de que minhas contas não se parecem como deveriam". (p.49)

Com isso, percebe-se que o conceito de empatia pode ser acionado, uma vez que o professor deve conseguir enxergar equívocos nas respostas dos alunos que ele próprio, outrora, poderia ter cometido e, a partir daí, sanar essa dúvida numa perspectiva mais profunda, compreendendo exatamente as conexões que estão sendo feitas erroneamente, elucidando-as.

3.4 Brousseau

Guy Brousseau, matemático e educador francês (1933-2024), foi um dos diversos pesquisadores que trabalharam com a noção de obstáculo epistemológico, (conceito criado pelo filósofo francês Gaston Bachelard) mas foi aquele quem introduziu essa noção na Didática da Matemática (CURY, 2015). Segundo Bachelard:

> Quando se procuram as condições psicológicas do progresso da ciência, logo se chega à convicção de que é em termos de obstáculos que o problema do conhecimento científico deve ser colocado. E não se trata de considerar obstáculos externos, como a complexidade e a fugacidade dos fenômenos, nem de incriminar a fragilidade dos sentidos e do espírito humano: é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos. É aí que mostraremos causas de estagnação e até de regressão, detectaremos causas de inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos. O conhecimento do real é luz que sempre projeta algumas

> sombras. [...]. Ao retomar um passado cheio de erros, encontra-se a verdade num autêntico arrependimento intelectual. No fundo, o ato de conhecer dá-se contra um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos, superando o que, no próprio espírito, é obstáculo à espiritualização. (BACHELARD, 1996, p.17)

Assim, o filósofo trata o erro como fenômeno inevitável e fundamental para o avanço científico a partir do momento em que o afirma que o conhecimento se dá por meio de quebras com as concepções equivocadas do passado. Saddo Ag Almouloud, professor da PUC-SP, em seu livro “Fundamentos da Didática da Matemática”, discorre sobre Erros e Obstáculos na Perspectiva de Brousseau:

> “Com relação à aprendizagem de conceitos matemáticos, a maioria dos pesquisadores em didática da matemática defende a ideia de que um dos fatores que mais influenciam essa aprendizagem é o tratamento que o professor dá ao erro do aluno”. (Almouloud, 2022)

Segundo o autor, existem algumas concepções que os professores possuem em relação ao aprendizado dos alunos e que se deve dar a devida atenção, uma vez que o tratamento que se estabelece em sala a partir dessas concepções irá influenciar diretamente na relação do aluno com o erro e, consequentemente, na sua aprendizagem. A concepção de “cabeça vazia”, por exemplo, considera que o aluno comete erros por insuficiência de conhecimento, de modo que equívocos devam ser evitados para que não sejam gravados no espírito do aluno; e não corrigidos pela raíz, lugar no qual o objetivo do professor é lhe mostrar a “maneira certa”.

Além de Bachelard, a corrente construtivista de Piaget também teve forte influência para Brousseau (Almouloud, 2010), principalmente no que tange à sua concepção, a qual afirma que o aluno tem direito ao erro e este, por sua vez, revela um saber em constituição. Quando se trata da noção de obstáculos, alguns autores, como Pais (2001), o mais correto seria a referência à obstáculos didáticos, e não epistemológicos, uma vez que a transferência deste último para a área da Pedagogia deveria ser feita com muita cautela. Entretanto, Cury acredita que seja possível acessar às noções de obstáculos para aproximá-las à análise de erros. Para Brousseau, o projeto de ensino deve visar à superação desses obstáculos, em que o erro é uma passagem obrigatória:

> O erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso [...], mas o efeito de um conhecimento anterior que, por um tempo, era interessante e conduzia ao sucesso, mas agora se mostra falso, ou simplesmente inadaptável. Os erros desse tipo não são erráticos e imprevisíveis, mas se constituem em

> obstáculos. Tanto na ação do mestre como na do aluno, o erro é constitutivo do sentido do conhecimento adquirido. (BROUSSEAU, 1983, p.171)

É possível compreender essa passagem de maneira prática se um comportamento muito comum em sala de aula for lembrado: as generalizações que parecem naturais, mas são inadequadas. Um exemplo ilustrativo é aquele momento em que o aluno sabe que, numa multiplicação de duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, o numerador do produto será a multiplicação dos numeradores e seu denominador, a multiplicação dos denominadores: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Mais tarde, quando se depara com a soma entre duas frações: $\frac{e}{f} + \frac{g}{h}$, o estudante generaliza o procedimento erroneamente, somando os numeradores e os denominadores entre si: $\frac{e}{f} + \frac{g}{h} = \frac{e+g}{f+h}$.

Não se apresenta trivial aos estudantes a missão de diferenciar estruturas pelo fato da operação entre os termos ter se alterado. Entretanto, pode-se dizer que esse tipo de erro apresenta coerência, uma vez que são baseados em conhecimentos e técnicas que, outrora, funcionavam perfeitamente; apenas não foram transpostos à nova situação. O fato de que a multiplicação entre frações se mostra intuitiva, os estudantes podem se apegar ainda mais a ela, pois não parece natural que, numa soma, deve-se lembrar de frações equivalentes e fazer as alterações necessárias para que a soma seja possível. Nesse momento, cabe ao professor o trabalho (como o autor sugere, já previsível) de estimular o rompimento de conhecimentos consolidados para abrir espaço à criticidade daquilo que está se pensando ou calculando e, segundo a linha de Piaget, a partir do momento em que esse desequilíbrio é superado, pode-se entender como uma organização de pensamentos que foram integrados ao saberes antigos. Ou seja, no exemplo dado, o aluno vê sentido em multiplicar numeradores e denominadores ao mesmo tempo em que se torna natural buscar um denominador comum às frações antes de somá-la.

Outra contribuição interessante para a área diz respeito à diferenciação entre tipos de obstáculos que Brousseau levanta para além dos obstáculos epistemológicos e didáticos: Obstáculos psicológicos e ontogênicos:

Tabela 1 - Tipos de obstáculos

Obstáculos epistemológicos	Resultados decorrentes de conhecimentos que os alunos já possuem e têm dificuldade em transacionar à uma nova situação. Exemplo: $(\frac{1}{2})^{x} > (\frac{1}{2})^{2} \Rightarrow x > 2$, pois sabem, por exemplo, que $2^{x} > 2^{2} \Rightarrow x > 2$
Obstáculos didáticos	Resultados decorrentes das escolhas de estratégias de ensino que limitam a expansão de conceitos. Exemplo: dificuldade de interpretação de frações do tipo $\frac{15}{4}$ pela definição limitada como a parte de um todo, levando à inferência de que o numerador deveria ser sempre menor ou igual ao denominador.
Obstáculos psicológicos	Resultados decorrentes da contradição com a intuição natural do sujeito. Exemplo: A resistência em considerar variáveis para determinar a probabilidade de ocorrência de um evento em apego à dualidade simplória de que um evento sempre tem 50% de chance de ocorrer (“ocorre ou não ocorre”).
Obstáculos ontogênicos	Limitações neurofisiológicas relativas à fase de desenvolvimento do aluno. Exemplo: a impossibilidade de desenvolver cálculos formais quando este ainda está na fase de operações concretas.

Fonte: autoria própria

3.5. Borasi

Tida como uma das principais referências sobre o estudo da análise de erros, a matemática italiana Raffaella Borasi traz contribuições importantes principalmente sobre a taxionomia do uso desses erros. Borasi se encontrou num contexto em que fazia doutorado em Nova Iorque e acontecia uma reforma na Matemática escolar nos Estados Unidos. Crítica àquele cenário, realizou trabalhos que tinham por objetivo encorajar os alunos a explorar, verbalizar e argumentar sobre ideias, abordagem essa que colidia com um sistema escolar o qual, sustentado pela lógica de produção e notas, faz com que os erros se tornem frustrantes, perda de tempo.

Na metodologia de Raffaella, os erros devem ser tidos como um cenário para investigação. Num exemplo citado pela pesquisadora em seu livro “Reconceiving Mathematics Instruction: A focus on errors”, reflete exatamente sobre a generalização equivocada sobre soma de frações apresentado no tópico anterior, em que o aluno transfere seu conhecimento de imediato a partir do método para multiplicação. Borasi sugere algumas perguntas capazes de transformar esses erros num cenário para investigação:

> Deixando de lado por um momento o conceito para remediação do erro original, nós podemos desafiar o *status quo* e questionar quais seriam os casos nos quais a operação realizada dessa forma específica faria sentido. Dependendo de como nós interpretamos essa pergunta geral, podemos decidir por seguir as seguintes linhas de investigação:
>
> - Existem outras operações nas quais numeradores e denominadores são combinados separadamente?
> - Existem algumas frações para as quais o resultado de adição com o algoritmo padrão e esse alternativo são o mesmo, ou pelo menos “parecidos o suficiente"?
> - Existe alguma situação da vida real que é descrita por esse método de soma? (Borasi, 1996, tradução livre)

Esse seria um exemplo específico, mas que pode se estender a outros cenários. A primeira pergunta pode servir como uma forma de revisão, que, de certa forma, força os alunos a sintetizar tudo que sabem sobre operações entre frações, organizando seu conhecimento. A segunda pergunta se refere a uma estratégia de fazer o uso do erro como “trampolim para a aprendizagem”, como diz Borasi, a fim de que o professor promova uma investigação daquele erro. Com isso, poderiam buscar desenvolver respostas para o tipo de pergunta: Será que existe algum caso tal que $\frac{ad+bc}{bd} = \frac{a+c}{b+d}$?”. Já a terceira pergunta também sugere reflexões interessantes: faz sentido somar frações dessa forma em algum contexto? Por exemplo, um torneio de tênis foi dividido em dois jogos; no primeiro, suponha que o jogador A acertou 12 saques de um total de 15, já, no segundo, 8 saques de um total de 10. É razoável descrever o saldo de saques acertados com a notação $\frac{12}{15} + \frac{8}{10} = \frac{20}{25}$? Quais as diferenças entre essa situação e problemas envolvendo frações do tipo parte-todo? Exemplos como esse podem servir para gerar ricas discussões em sala.

4. INFLUÊNCIAS DAS MUDANÇAS PSICOSSOCIAIS DOS ADOLESCENTES FRENTE AOS ERROS NO APRENDIZADO

A adolescência, diferentemente da puberdade, não pode ser compreendida como um fenômeno biológico universal, mas sim como uma construção psicossociológica que varia conforme a cultura e o espaço-tempo (COLL; MARCHESI; PALACIOS & COLS, 2007, capítulo 16). No Ocidente, a forma como entendemos atualmente essa etapa é produto do século XX, marcado pela industrialização e pela escolarização obrigatória, fatores que contribuíram para adiar a entrada dos jovens na vida adulta. Antes da legitimação desse conceito, a passagem da infância para a fase adulta ocorria de maneira direta, sem ser intermediada por um estágio característico de desenvolvimento. Assim, a adolescência consolidou-se como um período de transição com identidade própria, caracterizado pela dependência (não emocional) dos pais, pela permanência na escola e pela formação de vínculos com grupos de iguais, os quais, por sua vez, originam uma cultura adolescente específica (COLL, 2007).

Nunca houve, portanto, uma concepção única e definitiva sobre o que seja adolescência. Nesse sentido, o debate entre fatores biológicos (como mudanças hormonais) e sociais (como papéis e expectativas) permanece central na explicação desse desenvolvimento. A visão da adolescência como período conflituoso foi reforçada por psicanalistas e autores literários. Para Sigmund Freud, por exemplo, a adolescência é secundária e tem foco nas resoluções infantis do Complexo de Édipo que, segundo Laplanche e Pontalis, pode ser definido como conceito caracterizado por um:

> Conjunto organizado de desejos amorosos e hostis que a criança sente em relação aos pais. Sob a sua forma dita positiva, o complexo apresenta-se como na história de Édipo-Rei: desejo da morte do rival que é a personagem do mesmo sexo e o desejo sexual pela personagem do sexo oposto. Sob a sua forma negativa, apresenta-se de modo inverso: amor pelo progenitor do mesmo sexo e ódio ciumento ao progenitor do sexo oposto. Na realidade, essas duas formas encontram-se em graus diversos na chamada forma completa do complexo de Édipo. Segundo Freud, o apogeu do complexo de Édipo é vivido entre os três e os cinco anos, durante a fase fálica; o seu declínio marca a entrada no período de latência. É revivido na puberdade e é superado com maior ou menor êxito num tipo especial de escolha de objeto. O complexo de Édipo desempenha papel fundamental na estruturação da personalidade e na orientação do desejo humano. Para os psicanalistas, ele é o principal eixo de referência da psicopatologia. (p.77)

Na psicologia genética de Piaget, o destaque recai sobre o desenvolvimento cognitivo: se aos dois anos ocorre a passagem do prático para o simbólico, na adolescência emerge a capacidade de raciocínio abstrato, mais afastado do concreto, permitindo tanto a compreensão de conteúdos escolares mais complexos quanto a reflexão sobre a própria realidade e futuro.

As ideias de Piaget sobre o pensamento formal, entretanto, foram objeto de críticas. O autor o considerava universal, uniforme e independente do conteúdo das tarefas. Pesquisas posteriores, no entanto, demonstraram que o desenvolvimento desse tipo de pensamento é mais complexo, varia de acordo com o tipo e conteúdo das atividades e não é plenamente adquirido por todos os adolescentes — nem mesmo por todos os adultos. Essa constatação levou à crítica da concepção de que o pensamento formal representaria o estágio final do desenvolvimento cognitivo, surgindo a proposta de um pensamento pós-formal, caracterizado pela flexibilidade, pelo relativismo e pela adaptação a contextos práticos e sociais. (COLL; MARCHESI; PALACIOS & COLS, 2007, capítulo 17)

A literatura também aponta a influência do conteúdo no desempenho dos adolescentes. Entre aqueles que não conseguem resolver problemas formais, há diferenças significativas. Pesquisas demonstraram que o déficit nas operações formais deve ser analisado a partir da distinção entre competência e atuação. Em outras palavras, as deficiências de aprendizagem não decorrem, necessariamente, da incapacidade de apropriação e uso do pensamento formal, mas sim de variáveis relacionadas à tarefa — como sua formulação, as demandas específicas e a forma de apresentação — ou de características individuais, como nível educacional e diferenças pessoais. Nesse sentido, Piaget já apontava que, quando os sujeitos se deparam com tarefas situadas em seu domínio de especialidade, seu pensamento tende a expressar o nível formal de operação. Em contexto escolar, isso significa que os adolescentes apresentam maior facilidade em atividades para as quais já possuem predisposição (COLL, 2007). Contudo, cabe ao professor problematizar essa informação: como incentivar o interesse no adolescente para algo que este não tenha familiaridade?

Nas últimas décadas, pesquisas sobre o pensamento científico substituíram a ideia de "pensamento formal" de Piaget, considerada excessivamente genérica e insuficiente. As investigações atuais enfatizam habilidades específicas e contextualizadas, revelando que muitos alunos, mesmo após anos de escolarização, resistem a mudar concepções já consolidadas, mesmo quando incorretas do ponto de vista científico. Nessa perspectiva, a teoria da mudança conceitual de Strike e Posner (1982) sustenta que a transformação ocorre quando o indivíduo percebe a insuficiência de seus conhecimentos prévios, compreende uma nova teoria, a considera plausível e reconhece que ela explica melhor determinado fenômeno, ou seja, ele expande o que sabe. Ainda assim, concepções espontâneas tendem a persistir, reflexo de um sistema educacional que nem sempre promove de forma efetiva o pensamento crítico. Logo, embora os adolescentes desenvolvam maior habilidade com conteúdos abstratos, isso não garante a substituição de concepções equivocadas. Cabe à educação, portanto, confrontar e reconstruir ideias, sendo a análise de erros um recurso relevante nesse processo (COLL, 2007).

Outro aspecto muito importante refere-se ao desenvolvimento da autoestima na adolescência, que pode ser compreendida em duas dimensões: a parcial e a global. A primeira refere-se à confiança do indivíduo em áreas específicas da vida, como família, estudos, esportes, vida social e aparência física. A segunda, por sua vez, diz respeito à forma como o sujeito se percebe de maneira integral. Um ponto relevante nessa classificação é que a autoestima global não depende inteiramente da autoestima parcial, mas daquilo que o adolescente considera prioritário em sua vida. Assim, por exemplo, se as relações interpessoais são vistas como mais relevantes, mesmo que a autoestima acadêmica seja baixa, a autoestima global pode se manter elevada. Outro fator recorrente é a queda da autoestima no momento da transição do Ensino Fundamental para o Ensino Médio, quando os estudantes deixam de ser os mais velhos e experientes para se tornarem os novatos em um novo ambiente, com professores e colegas desconhecidos. Com o tempo, entretanto, essa autoestima tende a se restabelecer gradualmente. (COLL; MARCHESI; PALACIOS & COLS, 2007, capítulo 18)

Por fim, os contextos educativos vivenciados na adolescência também influenciam o modo como os jovens enfrentam erros no processo de aprendizagem. Retomando as mudanças físicas, psíquicas e sociais trazidas pela puberdade, observa-se que a responsabilidade pelo aumento do fracasso escolar foi, muitas vezes, atribuída ao próprio adolescente (COLL, 2007).

Apesar de haver relação entre esses fatores, John Eccles, neurofisiologista australiano, por meio de pesquisas, mostrou que o sistema educacional se mostra incapaz de acompanhar essas mudanças inerentes aos aluno: num período em que as relações interpessoais têm um papel crucial, o cenário do Ensino Médio os afasta em turmas separadas; num período em que se afastam dos pais, o fato de que professores do Ensino Médio, por vezes, estabelecem relações mais frias e distantes, limita a possibilidade que esses adolescentes tinham de interagir com personalidades e ideias de outros adultos que não os de sua casa. Assim, se faz importante refletir se o cenário em que estão inseridos esses estudantes acompanha suas necessidades e características evolutivas (COLL, 2007).

5. A POSTURA DO PROFESSOR FRENTE AOS ERROS NA APRENDIZAGEM

Considerando os dois capítulos anteriores, é o momento de convergir as duas bases teóricas do trabalho (a metodologia da análise de erros e a psicologia que explica o sentimento dos adolescentes frente a seus erros na aprendizagem) e refletir: qual, então, seria a postura a ser adotada pelo professor para que os erros e o sentimento de fracasso se transformem em oportunidades de aprendizagem? Para contribuir à reflexão, as entrevistas semi-estruturadas com os quatro docentes foram utilizadas como apoio, a fim de contrastar a teoria com a prática vivida pelos professores de Matemática.

Um dos posicionamentos mais importantes que os professores podem adotar é aquele de caráter investigativo, ou seja, quando o docente tem um olhar atento às produções dos alunos, procurando pistas e indícios do que os alunos estão comunicando e precisando. Diferentemente da visão tecnicista e behaviorista que busca dispersar o erro, a análise de erros passou a exigir que o professor enxergasse a resposta incorreta como um saber em constituição, no qual o erro tem papel fundamental na aprendizagem , principalmente na visão construtivista (Almouloud, 2010). A prática dos entrevistados reforça essa premissa: o Professor Paulino descreve o trabalho como o esforço para “entender a linha de raciocínio pela qual [o aluno] chegou naquele resultado que não é o desejado. Depois disso, tentamos direcioná-lo para que ele pense naquele problema de forma mais adequada, pois, não necessariamente, a forma com que ele pensou está de toda errada.”, corroborando para a ideia de que o erro não é uma falha absoluta, mas um caminho que precisa ser reformulado.

Com isso, a busca por entender esse raciocínio subjacente transforma o erro em um diagnóstico. O professor Gabriel ilustra tal processo ao relatar que, após identificar o erro, o passo crucial é identificar o porquê, principalmente se a maior parte da turma o cometer: “Por exemplo, numa prova paulista, percebi que muitos alunos erraram uma questão sobre razões trigonométricas. O segundo passo é perguntar: ‘Por que eles erraram isso?’. Será que eles erraram por não entenderem o conceito de razão trigonométrica ou será que foi outro fator? Aí, você abre uma janela para questionar. Talvez a razão não seja única, talvez a questão esteja realmente muito exigente em relação àquilo que eles conhecem.” Essa fala abre espaço para uma reflexão muito importante. O professor pode se questionar: Será que o enunciado foi escrito da melhor forma? Será que existe alguma ambiguidade nele que não deixou claro o comando do exercício? A questão exigia um conhecimento que foi diretamente ensinado em sala ou foi preciso que o aluno fizesse uma dedução extra a partir de seus conhecimentos prévios? Os alunos detinham tais conhecimentos bem consolidados? O tempo para a realização da atividade foi adequado?

Dessa maneira, a resposta a essa investigação permite que o professor tome ações sobre os problemas que observa de forma mais assertiva, sem necessariamente reexplicar o conceito novo, mas revisitar lacunas do passado e ouvir dos alunos o que eles interpretaram daquele exercício. Esse tópico também remete à fala do professor João Moura no que se refere à então diferenciação entre um profissional da educação e um professor, sendo que, em sua perspectiva, este último tem uma visão mais abrangente do aluno, encarando as respostas erradas não por falta de competência individual, mas por carência de maior orientação analítica por parte do docente.

Além disso, essa orientação analítica não deve se limitar ao campo dos conteúdos de matemática propriamente ditos, mas deve envolver todo o comportamento do professor e postura estratégica em sala de aula. Pelas entrevistas, fica evidente que a fase pela qual tais alunos se encontram influencia diretamente na forma como estudam. De acordo com o professor Paulino: “Sim. [A insegurança, vergonha e/ou resistência em tirar dúvidas] tem muito a ver com a idade. Se você trabalha com o ensino regular de Ensino Médio e, em seguida, numa sala de ensino EJA, você consegue perceber que a EJA, na maior parte das vezes, participa muito mais das aulas. Embora geralmente tenham mais dificuldade, se sentem mais encorajados, até pela maior experiência de vida, enquanto os jovens tendem a se retrair.”

6. A PESQUISA

A fim de enriquecer o estudo sobre o tema, realizou-se uma pesquisa prática para motivar professores a pensarem mais profundamente sobre a resposta de seus estudantes e como utilizar isso para propor uma atividade que busca desmistificar o fracasso proveniente do erro e entender o que pode ser feito para melhorar o desempenho desses jovens. Para isso, utilizou-se uma avaliação real que os alunos do 3° ano do Ensino Médio da Escola Móbile realizaram.

6.1. Caracterização da escola

A Móbile, atuando há 50 anos, é uma escola particular localizada na cidade de São Paulo, no bairro nobre de Moema. A arquitetura curricular de seu Ensino Médio está em conformidade com a Lei do Novo Ensino Médio (13.415/2017), sendo segmentada em duas frentes:

- Formação Geral Básica (FGB): Corresponde à carga horária dedicada aos componentes curriculares obrigatórios, conforme a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) inseridos nas áreas do conhecimento (Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas).
- Itinerários Formativos (IF): Componente flexível do currículo, no qual os estudantes optam por trilhas de aprofundamento acadêmico. São estruturados por meio de disciplinas eletivas, projetos e oficinas que permitem a verticalização do estudo em áreas de interesse específicas do aluno. Exemplos: “Debater”, “Ciência do Voo”, “Ciências Forenses”, “Simulação da ONU”, “Laboratório de Biodiversidade”, entre outros.

Com foco na preparação para processos seletivos externos, os conteúdos da FGB são planejados em consonância com as matrizes de referência dos principais vestibulares do Brasil e ENEM. Nesse sentido, no 3° ano, o qual abrange atualmente seis turmas com 40 alunos cada, a grade é reorganizada de modo a incluir blocos de aulas dedicados à revisão sistemática e ao aprofundamento estratégico dos conteúdos de maior incidência nesses exames. Especificamente para a disciplina de Matemática, o currículo é planejado para que todo o conteúdo do Ensino Médio seja concluído até o final do primeiro semestre do terceiro ano. Dessa forma, a segunda metade do último ano letivo é inteiramente reservada para a revisão focada nos assuntos do primeiro e do segundo ano, apenas.

Além disso, cada ano é dividido em seis períodos. Assim, os alunos passam por três momentos de avaliação por semestre, cada um subdividido em dois tipos de prova: as sondagens e as Provas Regulares (PR’s). As sondagens são avaliações de verificação mais curtas que servem para os alunos perceberem o que estão de fato absorvendo naquele período e no que precisam depositar mais energia. Já as PR’s são provas maiores, realizadas algumas semanas após as sondagens, que englobam questões testes e dissertativas mais exigentes, em formato de vestibular.

Vale ressaltar que o tipo de coleta de dados para o referido trabalho foi feito numa instituição muito específica e favorecida. Como ressalva o professor da Móbile entrevistado Fábio: “[...] Estamos numa escola que está no topo da pirâmide no que diz respeito a recursos disponíveis e estudantes privilegiados. Por isso, é importante pensar nos professores que estão na rede pública, cujas escolas possuem muitos problemas de base.” Logo, foram analisadas respostas dos alunos para que outros professores em outras instituições possam identificar possibilidades de realizar reflexões análogas levando em consideração o contexto social no qual estejam inseridos, enxergando, nessa pesquisa, situações semelhantes às que já vivenciaram em sala de aula.

6.2. Os carimbos

No referido colégio, é utilizado um método de avaliação que pode-se considerar singular quando comparado a outros colégios particulares. Como o número de alunos de cada série é relativamente alto, as PR’s, depois de passarem pelos alunos, são escaneadas e disponibilizadas num sistema chamado “Corretor”. Nele, professores e assistentes pedagógicos criam os chamados carimbos para realizarem a correção, sendo estes divididos em três tipos: Atribuição de pontuação, Comentários e Descontos. Como o nome sugere, o primeiro adiciona pontos; os Descontos tiram pontos e os Comentários são neutros, não atribuem nem descontam, mas servem como um tipo de sugestão ao estudante ou ponto de atenção.

Ademais, os carimbos se comunicam com o sistema Looker, que é uma plataforma do Google que, dentre uma vasta gama de possibilidades, quantifica cada carimbo dado, possibilitando análises estatísticas que vão das mais simples, como verificar a quantidade de carimbos de Atribuição “x” fornecido ao 3°A, ou cruzar informações e obter dados mais específicos, como a quantidade desses carimbos de Atribuição “x” fornecido ao 3°A que não receberam o Desconto “y” ao longo dos últimos 3 anos.

São muitas as possibilidades de se trabalhar com o Looker, sendo uma de suas principais vantagens, como bem apontado por Fábio, a de ter clareza da situação: “A partir do momento em que a gente cria esses carimbos e você consegue classificar os erros dos alunos de alguma maneira, conseguimos quantificar os tipos de erros que eles estão cometendo e, eventualmente, tomar ações para mitigá-los. Por exemplo, se está aparecendo muitos erros algébricos, conseguimos fazer oficinas específicas. A princípio, o que a gente sempre tem é uma sensação: ‘os alunos cometem muitos erros algébricos’ - especulações. [...] Enfim, antes dos carimbos, não tínhamos condição de ter uma quantificação disso. Era tudo baseado numa impressão.”

Objetivando exemplificar de forma prática as potencialidades do carimbo e suas possibilidades de discussão, serão analisadas duas questões anteriormente mencionadas.

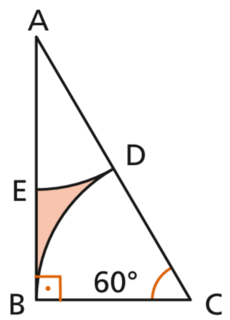
6.3. As questões

O objetivo da primeira questão era verificar como os alunos estavam lidando com a Geometria Plana, mais especificamente no que se refere à identificação e cálculo de áreas de círculos, setores circulares e triângulos, tópicos sobre os quais vínhamos trabalhando.

(Questão 1) Os itens a seguir são independentes.

a) Determine a área da região sombreada da figura a seguir, sabendo que a hipotenusa do triângulo retângulo ABC mede 10cm e que A e C são os centros dos setores circulares.

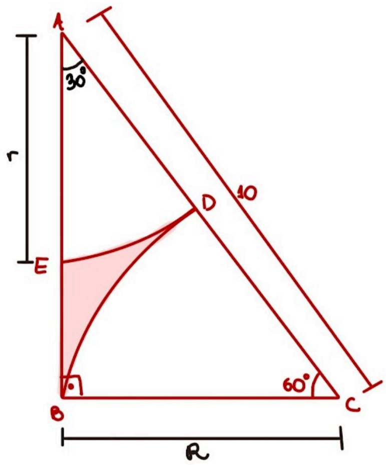
Figura 4 - Questão 1



Fonte: Livro 9 - Geometria Plana - Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. Questões 933.

Para cada uma das questões, é solicitado, pelos professores, que façamos gabaritos de resolução pré-carimbos (com posterior aprovação daqueles), como uma forma de prever aquilo que deveríamos atribuir ou descontar pontos. Dessa forma, no item a), elaborei a seguinte resolução, na qual, em vermelho, estão representados os elementos fornecidos pelo enunciado e, na cor preta, aqueles que foram identificados matematicamente:

Figura 5 - Resolução esperada da questão 1



Fonte: autoria própria.

$Seja\ R\ o\ raio\ do\ setor\ circular\ BCD\ e\ r,\ do\ setor\ EAD.$

$No\ triângulo\ ABC,\ temos\ que\ cos(60°) = \frac{R}{10} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{R}{10} \Rightarrow R = 5\text{u}$

$Como\ r + R = 10,\ então\ r = 5u$

$Por\ Pitágoras\ e\ sabendo\ que\ \overline{BA} > 0,\ temos\ R^2 + (\overline{BA})^2 = (\overline{AC})^2$

$\Rightarrow 5^2 + (\overline{BA})^2 = 10^2 \Rightarrow (\overline{BA})^2 = 100 - 25 \Rightarrow (\overline{BA})^2 = 75 \Rightarrow \overline{BA} = 5\sqrt{3}\,u$

$Se\ \angle BCA = 60°\ e\ \angle ABC = 90°,\ então\ \angle BAC = 180° - 60° - 90° = 30°$

$Seja\ As\ a\ notação\ para\ a\ área\ sombreada,\ A\triangle\ para\ a\ área\ do\ triângulo$
$ABC\ e\ Aset\ para\ a\ área\ dos\ setores\ circulares.$

$Percebemos\ a\ seguinte\ relação:\ As = A\triangle - Aset$

$\bullet A\triangle = \frac{R \cdot \overline{BA}}{2} = \frac{5 \cdot 5\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2}u^2$

$$\bullet Aset = \frac{60}{360} \cdot \pi \cdot R^2 + \frac{30}{360} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 5^2 + \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot 5^2 =$$

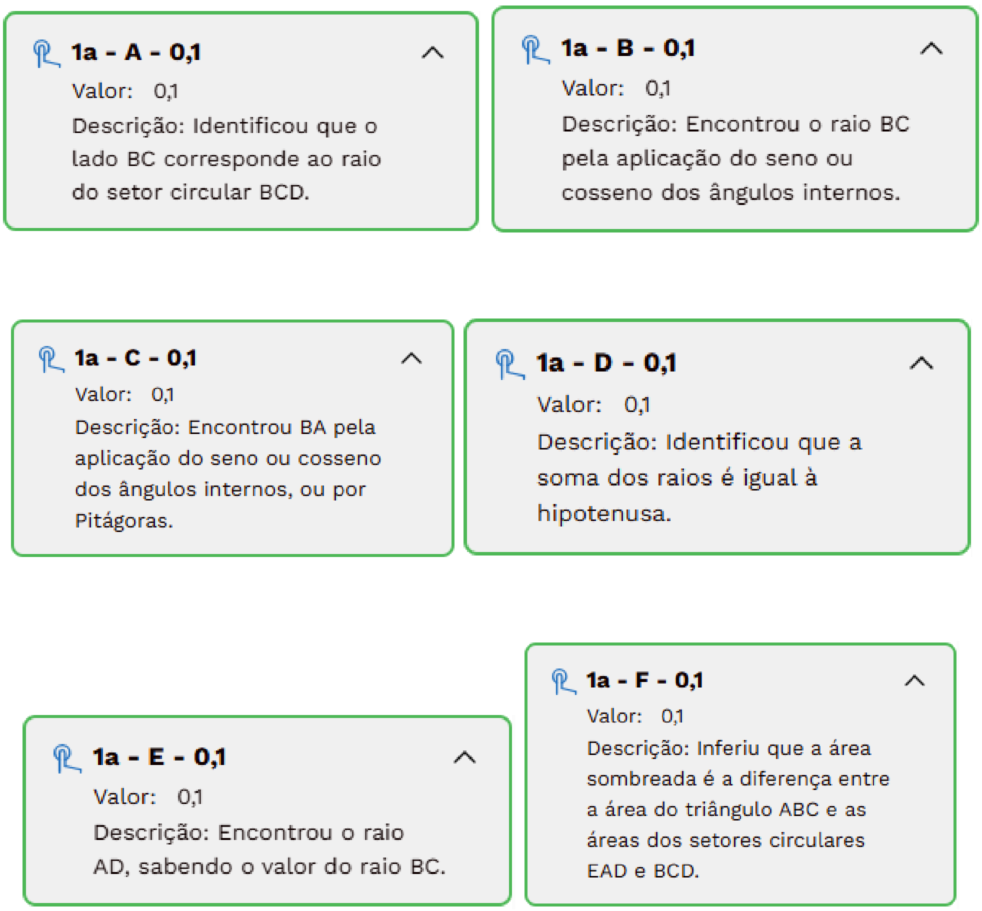
$$= \frac{25}{6}\pi + \frac{25}{12}\pi = \frac{75}{12}\pi\, u^2$$

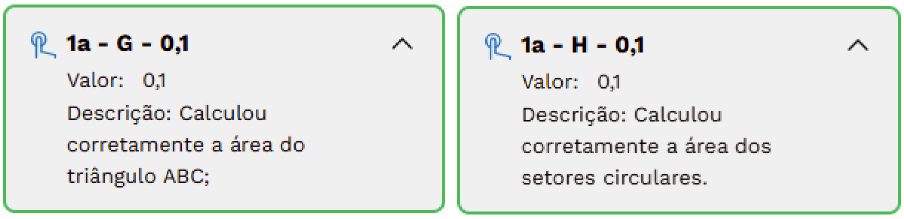
$$Logo,\ As = \frac{25\sqrt{3}}{2} - \frac{75}{12}\pi\, u^2$$

O previsto seria que os alunos utilizassem o método acima que foi trabalhado em aula, o qual denominamos método de cálculo de área indireto. Nesse método, a área sombreada não pode ser calculada diretamente com as ferramentas que apresentamos no Ensino Médio, mas é possível calcular a área de uma figura que a engloba e excluir as formas que não interessam.

Executamos a correção de forma online, pois as provas são escaneadas e disponibilizadas num sistema próprio da escola. Para essa questão, os carimbos criados inicialmente estão apresentados a seguir.

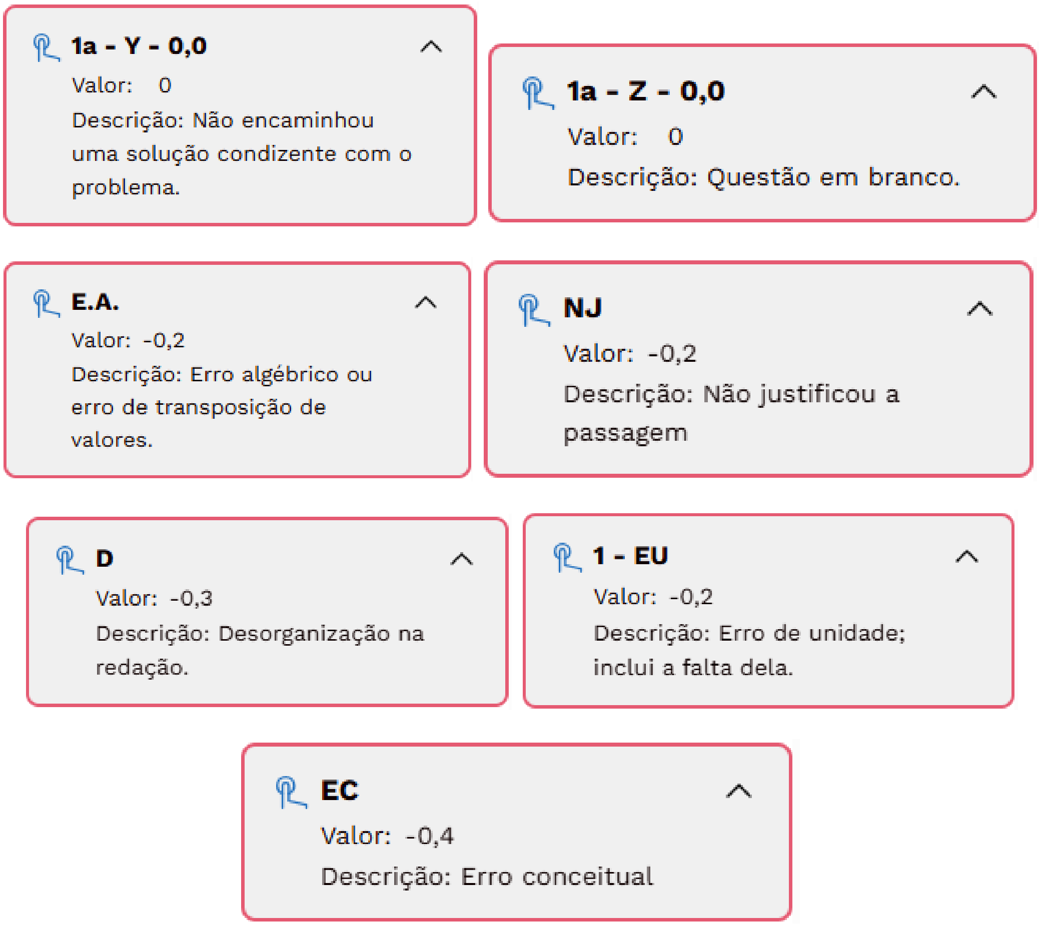
Figura 6 - Carimbos de atribuição de pontuação da questão 1





Fonte: Sistema de correção da própria escola.

Figura 7 - Carimbos de desconto da questão 1.

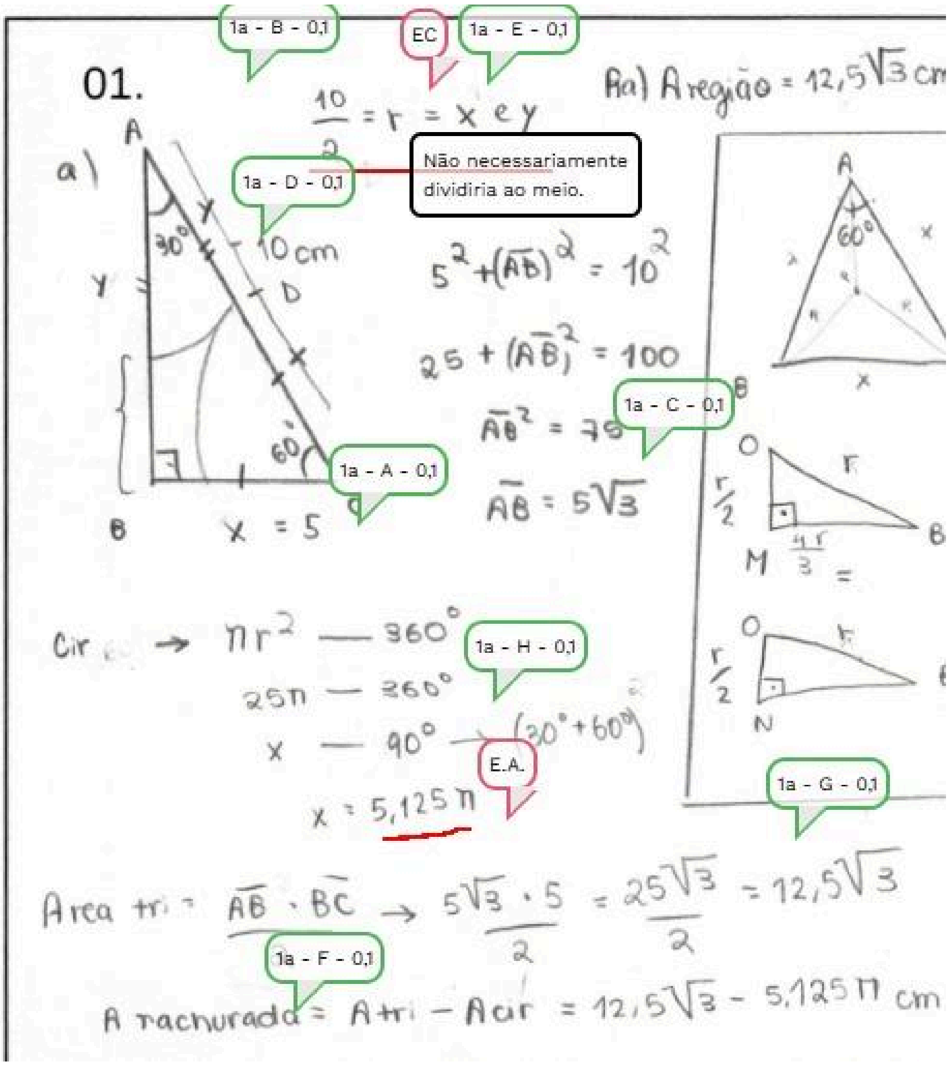


Fonte: Sistema de correção da própria escola.

Como dito anteriormente, a função dos carimbos é quantificar as habilidades e pontos de atenção, bem como facilitar a atribuição de nota. Entretanto, é interessante notar que, por vezes, não são suficientes para abarcar todas as possibilidades de resposta, uma vez que os alunos encontram maneiras para resolverem os problemas que não foram imaginadas pelo professor, o que é uma situação que este poderia aproveitar em aula, e não se manter indiferente à novos métodos de resolução. Quando nos deparamos com situações desse tipo, é necessário alterar o carimbo.

A seguir, serão apresentadas algumas resoluções incorretas, as quais não pude apresentar em aula, mas que que considerei interessantes para possíveis discussões e resoluções corretas que fugiram daquela prevista para formar os carimbos:

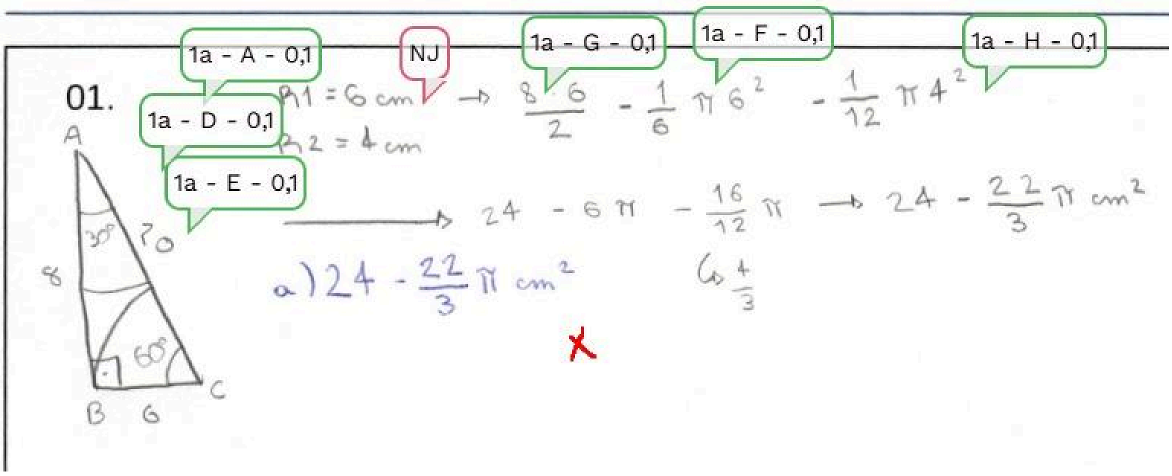
Figura 8 - Resolução analisada 1



Fonte: Sistema de correção da própria escola.

Erro conceitual: Assumiu que o ponto de encontro entre as circunferências do triângulo ABC dividiria o segmento $\overline{AC}$ ao meio, informação que foi deduzida, provavelmente, apenas ao observar a imagem do enunciado. Além disso, sua dimensão (10 cm), sendo um número par, pode ter impulsionado um raciocínio de dividir o segmento em dois de medida 5 cm. Apesar de ser coincidentemente um fato, nesse contexto em específico, não foi apresentada uma justificativa válida. O erro traz uma boa oportunidade de discussão em sala, extrapolando, inclusive, o conteúdo do exercício em questão: Podemos provar matematicamente que, num triângulo cujos ângulos internos são 90°, 30° e 60°, o raio de dois setores que se interceptam na hipotenusa do triângulo tem mesma medida? O que podemos, ao observar um exercício de geometria, deduzir sobre a relação entre seus elementos? A figura está necessariamente em escala? Podemos provar que segmentos que parecem iguais realmente o são?

Figura 9 - Resolução analisada 2



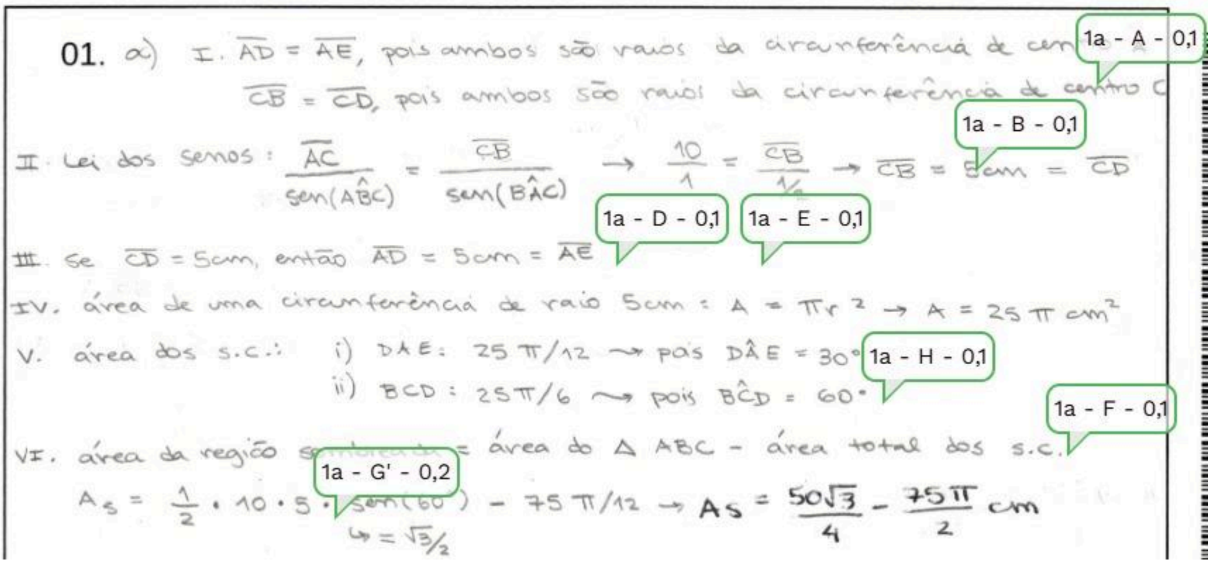
Fonte: Sistema de correção da própria escola.

Já nessa situação, provavelmente o aluno conhece o triângulo retângulo notável (6,8,10) e, observando que a hipotenusa valia 10cm, assumiu que os outros dois catetos possuíam medidas de 6cm e 8cm, o que não foi justificado. Sobre as possibilidades de discussão para esse erro, podemos realizar perguntas para criar um cenário o qual Borasi outrora denominara cenário para investigação: Quais poderiam ser as medidas dos catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa tenha dimensão igual a 10? O que poderíamos afirmar se nos fosse fornecido a medida da hipotenusa e um dos catetos?

A partir do momento em que descontamos um erro, seguimos a correção assumindo que o valor que o aluno encontrou é o correto, a fim de valorizar os demais processos que desenvolveu.

Existem, também, resoluções diferentes, não previstas pelo carimbo, como por exemplo:

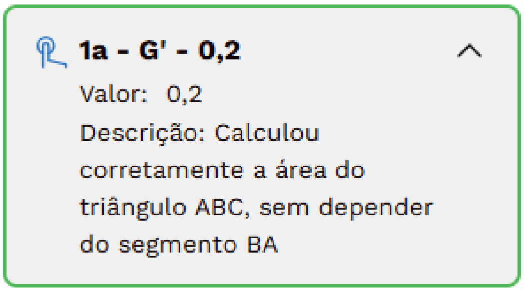
Figura 10 - Resolução analisada 3


01. a) I. $\overline{AD} = \overline{AE}$, pois ambos são raios da circunferência de cen
$\overline{CB} = \overline{CD}$, pois ambos são raios da circunferência de centro C
II. Lei dos senos: $\frac{\overline{AC}}{sen(A\hat{B}C)} = \frac{\overline{CB}}{sen(B\hat{A}C)} \to \frac{10}{1} = \frac{\overline{CB}}{1/2} \to \overline{CB} = 5cm = \overline{CD}$
III. Se $\overline{CD} = 5cm$, então $\overline{AD} = 5cm = \overline{AE}$
IV. área de uma circunferência de raio 5cm: $A = \pi r^2 \to A = 25\pi\ cm^2$
V. área dos s.c.: i) DAE: $25\pi/12$ → pois $D\hat{A}E = 30°$
ii) BCD: $25\pi/6$ → pois $B\hat{C}D = 60°$
VI. área da região sombreada = área do Δ ABC − área total dos s.c.
$A_s = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 \cdot sen(60) - 75\pi/12 \to A_s = \frac{50\sqrt{3}}{4} - \frac{75\pi}{2}$ cm
$\hookrightarrow = \sqrt{3}/2$

Fonte: Sistema de correção da própria escola.

Nesse caso, o(a) aluno(a) conseguiu calcular a área do triângulo sem a necessidade de encontrar a dimensão de $\overline{BA}$ por meio do uso da relação $A\Delta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot sen(\alpha)$. Nesse momento, percebi que os carimbos se tornaram insuficientes, uma vez que não teria como atribuir 1a - C - 0,1, e, assim, não atingiria a nota completa, apesar de ter acertado integralmente a questão. Logo, precisei criar um novo carimbo: 1a - G' - 0,2, cuja pontuação por si só valeria pelas dos carimbos 1a - C - 0,1 e 1a - G - 0,1:

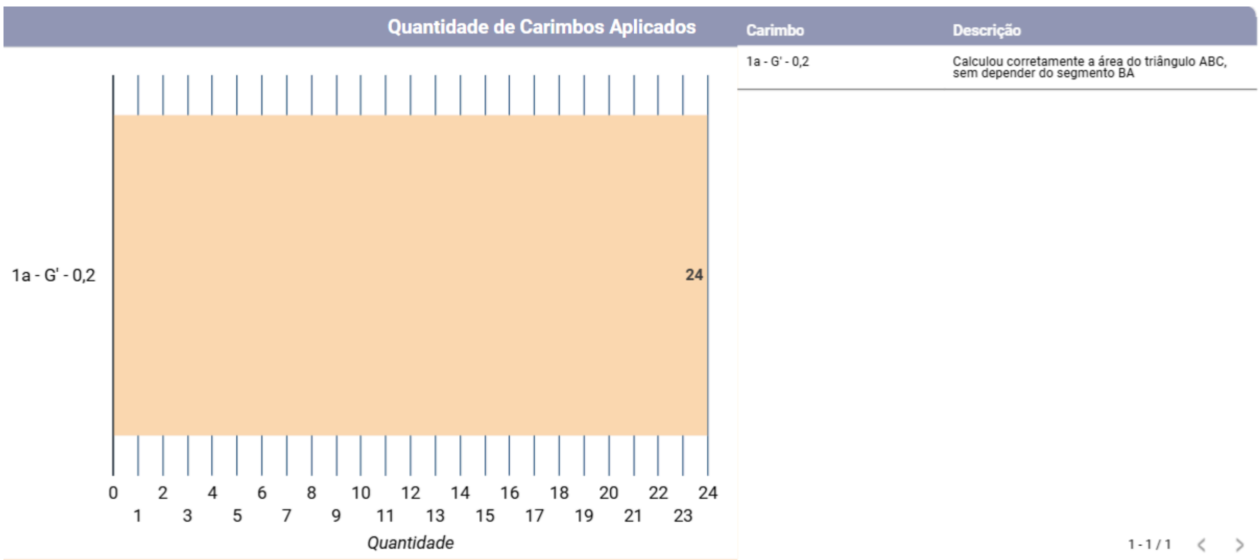
Figura 11 - Carimbo extra 1



Fonte: Sistema de correção da própria escola.

Com isso, percebamos que se faz difícil padronizar um método de correção passo a passo, pois podem aparecer resoluções que utilizam outros mecanismos e que, consequentemente, exigiriam outros carimbos. De acordo com o Looker, outras 24 pessoas receberam essa marca, evidenciando que, talvez, pudéssemos pensar num conjunto de carimbos menos específicos que abarcasse mais linhas de raciocínio numa próxima questão:

Figura 12 - Dados quantitativos 1



Fonte: Sistema Looker (Google).

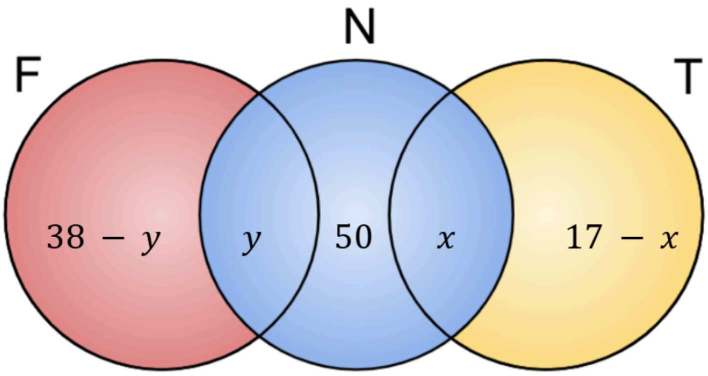
Já a segunda questão envolvia conhecimentos acerca da Teoria dos Conjuntos, para a qual a interpretação dos dados do enunciado é o fator de maior dificuldade:

(Questão 2) Um clube oferece a seus associados aulas de três modalidades de esporte: natação, tênis e futebol. Nenhum associado pôde se inscrever simultaneamente em tênis e futebol, pois, por problemas administrativos, as aulas desses dois esportes serão dadas no mesmo horário. Encerradas as inscrições, verificou-se que: dos 85 inscritos em natação, 50 só farão natação; o total de inscritos para as aulas de tênis foi de 17 e, para as aulas de futebol, de 38; o número de inscritos só para as aulas de futebol excedeu em 10 o número de inscritos só para as de tênis. Quantos associados se inscreveram simultaneamente para as aulas de futebol e natação?

Fonte: vestibular UFRJ 2002

O gabarito de resolução pré-carimbo foi o seguinte:

Figura 13 - Resolução esperada da questão 2



Fonte: autoria própria

$Pela\ informação\ do\ total\ de\ inscritos\ para\ natação,\ temos:\ 50 + x + y = 85\ (I)$

$Pela\ informação\ de\ que\ os\ inscritos\ exclusivos\ de\ futebol\ supera\ em\ 10\ os$ $exclusivos\ de\ tênis,\ temos:\ 38 - y = 10 + (17 - x)\ (II)$

$Então,\ (I):\ x + y = 35;\ (II):\ 38 - y = 10 + 17 - x \Rightarrow x - y = 27 - 38 =- 11$

$Somando\ as\ equações:\ 2x = 24 \Rightarrow x = 12$

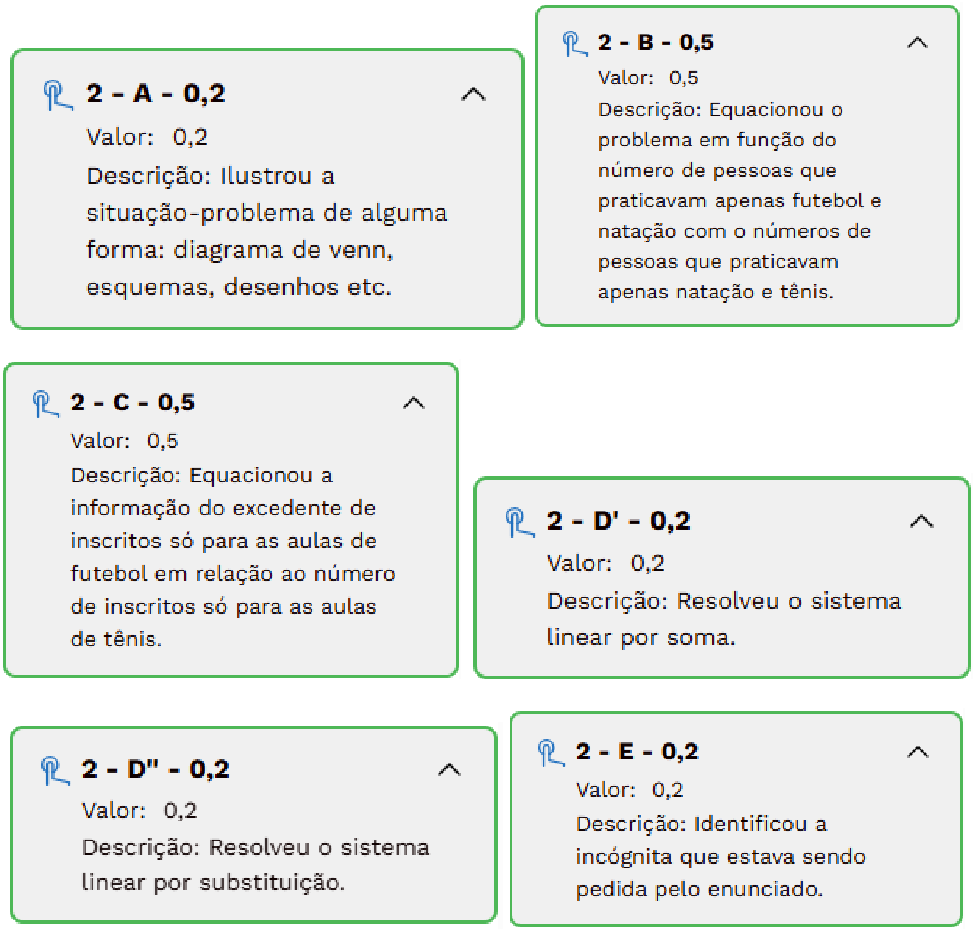
$Substituindo\ x\ em\ (I):\ 12 + y = 35 \Rightarrow y = 23$

$Logo,\ o\ total\ de\ inscritos\ para\ natação\ e\ futebol\ é\ de\ 23\ pessoas.$

Para esse tipo de situação, a utilização dos Diagramas de Venn se torna uma estratégia eficiente e clara para organizar os dados do problema, que, por vezes, se referem a diversas intersecções entre eventos. Tendo em vista a valorização dessa organização, um dos critérios avaliativos foi esquematizar o problema de alguma maneira, não necessariamente pelo Diagrama.

Os carimbos utilizados foram:

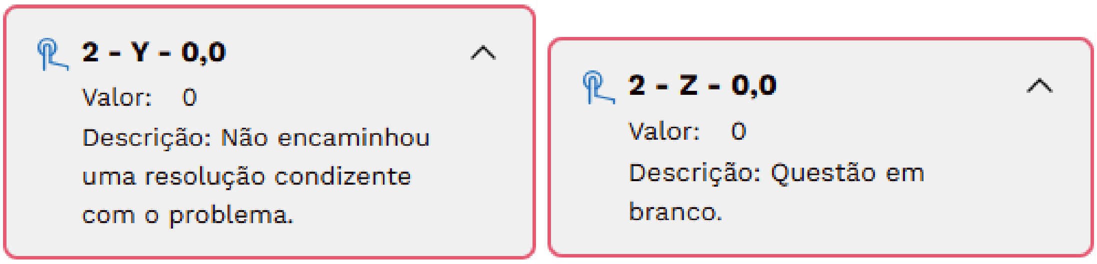
Figura 14 - Carimbos de atribuição de pontuação da questão 2



Fonte: Sistema de correção da própria escola.

Já os de desconto são os mesmos do exemplo anterior, com a variação de dois deles que diferencia para o Looker qual das questões foi deixada em branco ou não condizente com o problema:

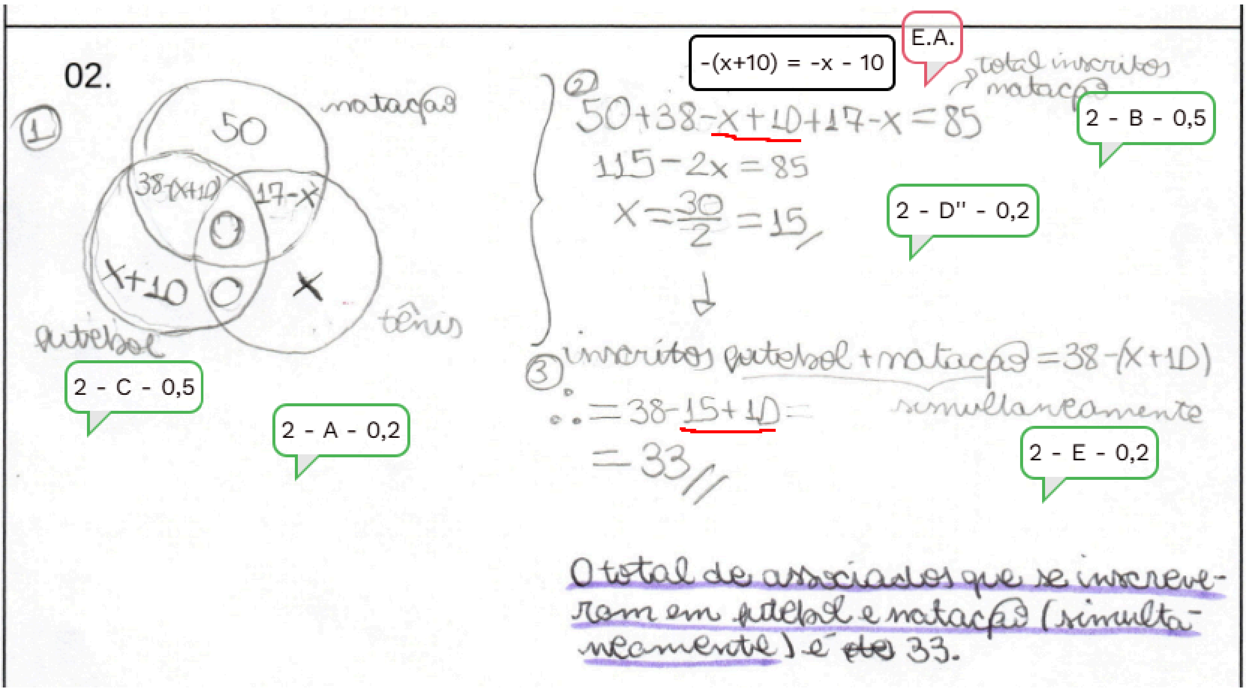
Figura 15 - Carimbos de desconto da questão 2.



Fonte: Sistema de correção da própria escola.

Algumas das resoluções com potencial para discussão:

Figura 16 - Resolução analisada 4

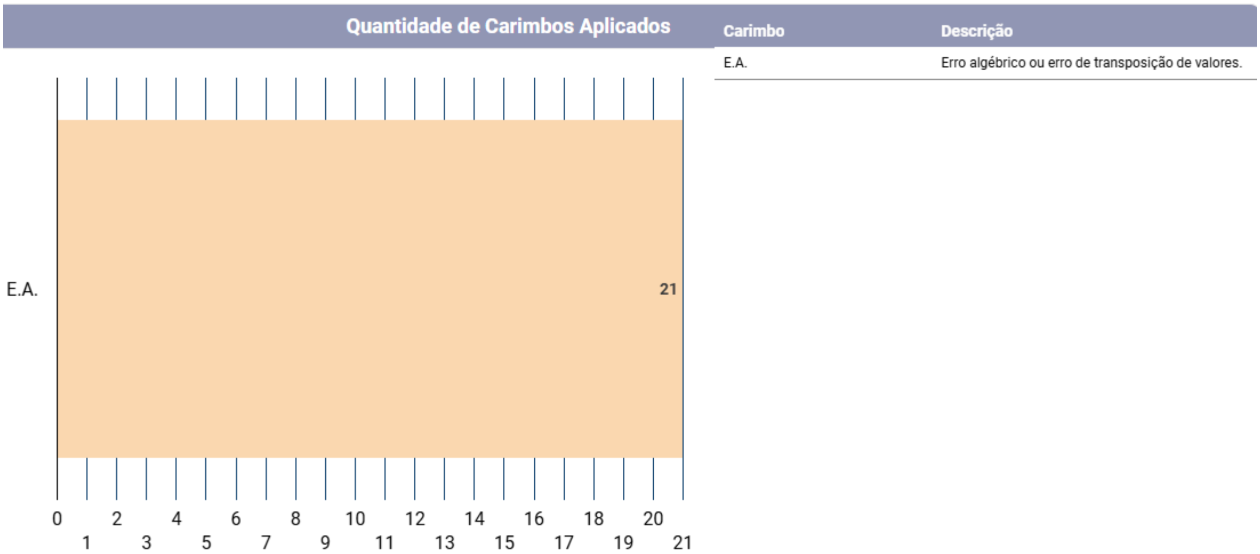


Fonte: Sistema de correção da própria escola.

Um erro recorrente durante a correção foi algébrico. Muitos alunos receberam o carimbo respectivo por não distribuírem adequadamente o sinal na operação que envolve a subtração entre um elemento e uma soma. No exemplo acima, o(a) estudante denominou as pessoas que jogam apenas futebol como $x + 10$, sendo x a quantidade de inscritos em tênis, apenas. Para o preenchimento da intersecção futebol e natação, é necessário subtrair seu total (38) pela intersecção, o que deve ser feito por meio dos parênteses:

$38 - (x + 10) = 38 - x - 10 = 28 - x$. Pode-se notar que não foi um erro de atenção, mas sim conceitual, pois ocorreu novamente em seguida.

Figura 17 - Dados quantitativos 2



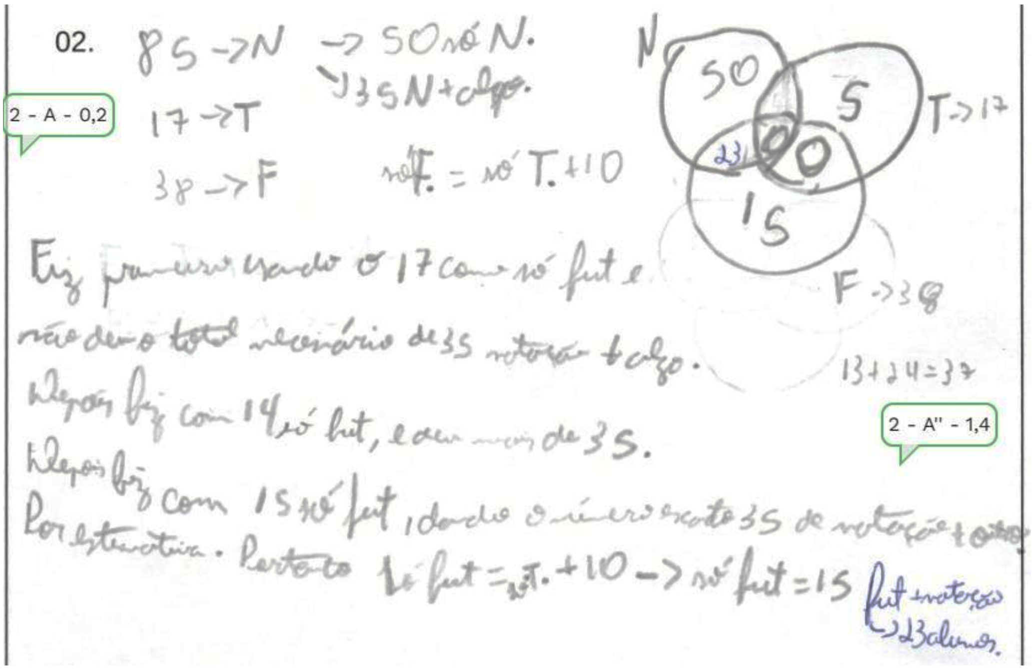
Fonte: Sistema Looker (Google).

A frequência de carimbos de erro algébrico apenas nessa questão foi 21, sendo que a grande maioria se deu por esse conceito específico mencionado. O erro em realizar a operação $38 - (x + 10) = 38 - x + 10$ seria classificado por Brousseau (outrora mencionado) como um obstáculo epistemológico, no qual se nota a falta da extensão do conhecimento: a aluna provavelmente sabe que $38 - (+\ x) = 38 - x$, mas quando o termo entre parênteses não é único, o conceito não é ampliado. Com isso, podería-se trazer uma revisão conceitual sobre o assunto, evidenciando-se o problema em não desenvolver a distribuição adequadamente. Além disso, esse é um tipo de problema que é possível conferir sua resposta final a partir do enunciado, o que foi reconhecido por alguns deles, e que é um ótimo exercício para que eles invertam a linha de raciocínio, saindo da resposta e conferindo com o contexto exposto.

Nesse caso, teríamos 33 pessoas fazendo futebol e natação ao mesmo tempo; como 50 fazem apenas natação, sobrariam $85 - 50 - 33 = 2$ fazendo tênis e natação, implicando que $17 - 2 = 15$ pessoas fariam tênis; também, $38 - 33 = 5$ fariam apenas futebol. Contudo, o enunciado diz que o número de inscritos em futebol superaria em 10 os que fazem apenas tênis, o que não foi contemplado pela resposta encontrada. Assim, evidenciando ao aluno que sua resolução está incorreta e precisaria revê-la.

Outro curioso método utilizado pelos estudantes, também não previsto por mim, foi o de tentativa e erro:

Figura 18 - Resolução analisada 5



Fonte: Sistema de correção da própria escola.

Transcrição:

"$85 \rightarrow N \quad \rightarrow 50\ só\ N\ e\ 35\ N + algo$

$17 \rightarrow T$

$38 \rightarrow F$

$Só\ Fut. = só\ T + 10$

$Fiz\ primeiro\ usando\ o\ 17\ como\ só\ fut\ e\ não\ deu\ o\ total\ necessário\ de\ 35\ natação + algo$"

Nessa passagem, o aluno testou 17 pessoas jogando apenas futebol. Com isso, inferiu que 7 fariam apenas tênis, restando 10 para natação junto com tênis e 21 para natação junto com futebol. Porém, como 35 precisam fazer natação e outro esporte e $10 + 21 \neq 35$, então o valor inicial não pode ser 17.

"$Depois\ fiz\ com$ 14 $só\ fut,\ e\ deu\ maior\ de$ 35".

Fez o processo análogo ao anterior e chegou à conclusão que $24 + 13 > 35$, não podendo utilizar o 14 para apenas futebol.

"$Depois\ fiz\ com$ 15 $só\ fut,\ dando\ o\ número\ exato$ 35 $de\ natação + outro$".

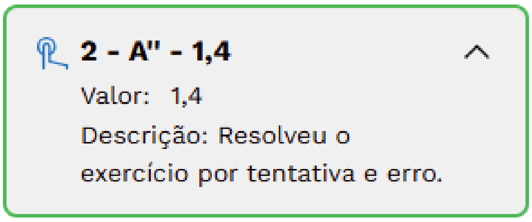
Quando testou 35, verificou que todas as restrições do enunciado haviam sido atendidas.

Mesmo que não tenha utilizado uma linguagem matemática formal, existem muitos pontos curiosos a serem considerados. Primeiramente, é importante perceber que existiu uma intuição natural às chamadas demonstrações por absurdo, nas quais supõe-se que uma premissa é verdadeira e, ao final, encontra-se uma contradição, provando que aquela é, na verdade, falsa.

Seria de grande valia apresentar tal resolução ao restante da turma, destrinchando o raciocínio passo a passo, a fim de provocá-los a uma análise alternativa do problema e instigá-los a buscar métodos tão eficazes quanto. Também, alertá-los sobre as limitações desse tipo de estratégia: O que ocorreria se existissem mais restrições? Como poderíamos organizar a resolução de maneira que ficasse mais clara e intuitiva ao leitor?

Ademais, como se fez perceber, não havia nenhum carimbo que contemplasse esse tipo de raciocínio, então, novamente, foi necessário interromper as correções para criar um, cuja nota, somada à atribuição de esboço da situação, inteirasse a nota do problema:

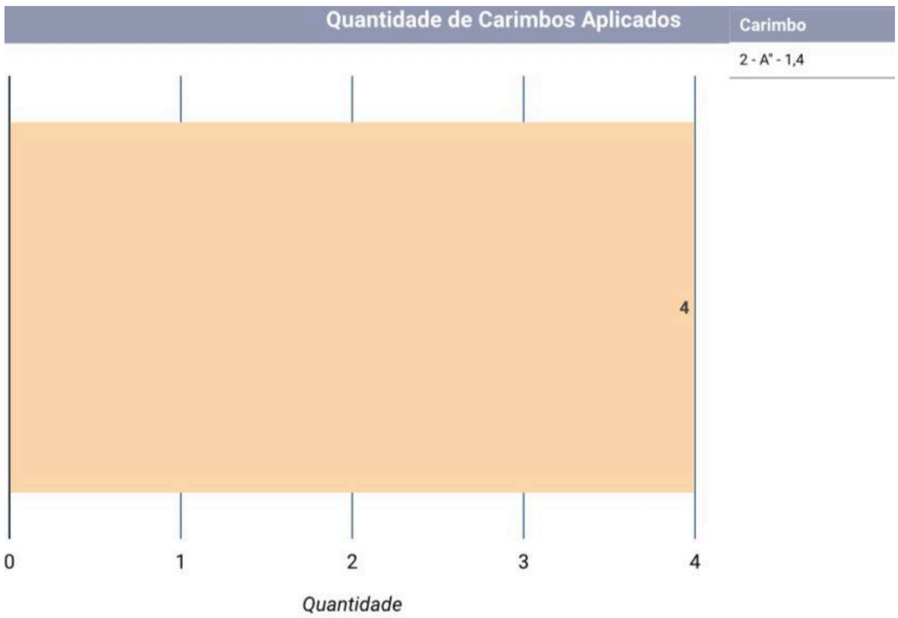
Figura 19 - Carimbo extra 2



Fonte: Sistema de correção da própria escola.

De acordo com o Looker, quatro alunos tiveram essa mesma ideia de resolução:

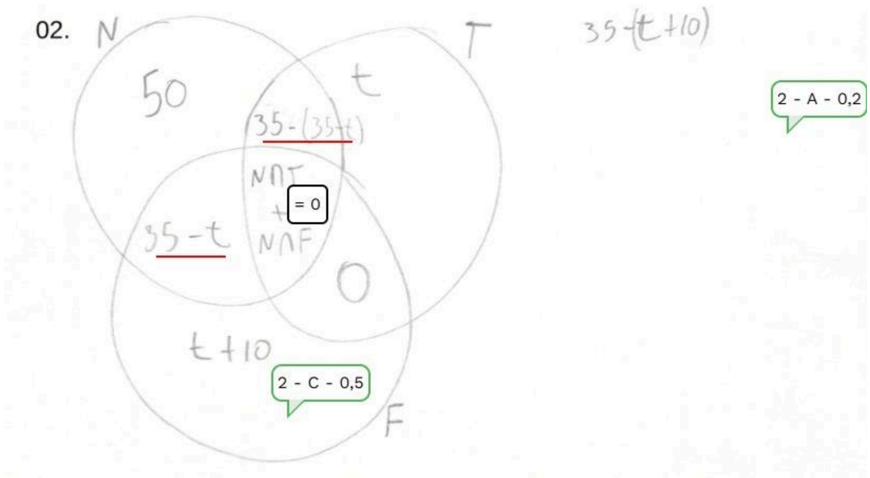
Figura 20 - Dados quantitativos 3



Fonte: Sistema Looker (Google).

Outrossim, verifica-se um exemplo de como o enunciado pode interferir na resolução da questão, fator também não previsto e não contemplado pelos carimbos:

Figura 21 - Resolução analisada 6



Fonte: Sistema de correção da própria escola.

Nessa questão, o aluno entende que o fato de pessoas não poderem se inscrever simultaneamente em futebol e tênis não implica no impedimento de que estas se inscrevam para os três esportes ao mesmo tempo. Com isso, não observamos dificuldade apenas nas técnicas matemáticas, mas também um obstáculo proporcionado pelo enunciado da questão. Thorndike havia apontado sobre esse tipo de erro: a superestimulação visual, bem como a linguagem empregada, que desviaria o aluno do foco matemático. Entretanto, a compreensão de questões como essas fazem parte do saber matemático tanto quanto seu tratamento.

O que poderia ser feito com a turma seriam provocações como: O exercício realmente dá abertura para outra interpretação, ou seja, da maneira como está escrito, seria possível haver o impedimento apenas para a inscrição de futebol junto à natação? Há uma maneira de melhorar o enunciado? Vamos formular uma situação-problema na qual haja a possibilidade de uma intersecção vazia entre dois elementos e não vazia entre esses dois elementos e um terceiro.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

No início do ano, antes de ter aulas e estudar sobre a análise de erros, já havia pensado no tema para realizar o presente trabalho de conclusão de curso. Entretanto, possuía uma visão bastante tecnicista e limitada desta, uma vez que imaginei o cerne de seu funcionamento se dando apenas pela classificação quantitativa dos erros e as medidas a serem tomadas em decorrências deles estariam descritas numa tabela a ser seguida.

Com feliz surpresa, ao longo dos estudos, percebi que não se trata de uma metodologia estática, mas ela se molda de acordo com as necessidades e características de determinado grupo, cabendo ao professor a avaliação do espaço para decidir quais provocações irá estabelecer. Para que sua postura esteja em consonância com a análise de erros, é imprescindível adotar uma pedagogia que assuma a presença de obstáculos na construção do conhecimento como parte do processo, jamais algo a ser escondido e/ou ridicularizado, pois é impossível e, sobretudo, desnecessário evitá-lo.

Para além das potencialidades da análise de erros, percebe-se alguns fatores importantes que devem ser levados em consideração. Como dito anteriormente e reforçado nas entrevistas com os professores Paulino e Gabriel, a superlotação das salas de aula, a defasagem escolar e a sobrecarga de trabalho sofrida pelos professores da rede pública são problemas que dificultam enormemente sua implementação. Tendo isso em vista, é fundamental voltar a ressaltar que a pesquisa foi realizada num espaço brasileiro privilegiado, e que as reflexões e dados levantados se propõem a servirem de inspiração para que docentes possam pensar sobre como levar elementos da análise de erros dentro da realidade de sua sala de aula, de acordo com o que faz sentido para o conteúdo estudado e levando em conta a bagagem de seus estudantes, mas sempre com o intuito de estimular sua criticidade sobre aquilo que erraram.

Apesar do trabalho de conclusão de curso ser optativo no curso de Licenciatura em Matemática da USP, considero ter sido uma escolha fundamental, pois o estudo realizado complementou diversos assuntos vistos na graduação de maneira mais profunda. Além disso, me instigou a continuar estudando sobre educação matemática, principalmente no que se refere a outras possibilidades de metodologia.

8. REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo. **Fundamentos da didática matemática**, 2007.

BACHELARD, Gaston. **A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996, p.17.

BEM, L. Y.; CARVALHO, S. M. P. de; OLIVEIRA, C. A. de; SANTOS, M. A. B. dos. **A teoria behaviorista e suas implicações na concepção e prática no contexto escolar**, 2019.

BOCK, Ana. **Psicologias. Uma introdução ao estudo de psicologia**. São Paulo: Saraiva, 2004.

BORASI, Raffaella. **Reconceiving Mathematics Instruction: A focus on errors**, 1996.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Prova Nacional Docente: provas e gabaritos**, 2025.

CARAGNATTO, R. A. **A avaliação no ensino de Matemática**. Monografia (Graduação em Matemática). Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões. Erechim, 2008.

COLL, César; MARCHESI, Álvaro; PALACIOS, Jesús (Org.). **Desenvolvimento psicológico e educação: Psicologia evolutiva**. v. 1. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2007.

CURY, Helena. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. Belo Horizonte, 2007.

HADAMARD, Jacques. **An essay on the psychology of invention in the mathematical field**, 1945.

LAPLANCHE, J.; PONTALIS, J. B. **Vocabulário da psicanálise** (P. Tamem, trad.). São Paulo: Martins Fontes, 1992.

OLIVEIRA, J. L.; ARRUDA, A. M.; SILVA, F. C.; CAMARGO, J. A. **Os conceitos de erro, obstáculo e contrato didático segundo Guy Brousseau**, 2020.

RADATZ, Hendrik. **Error analysis in mathematics education. Journal for Research in Mathematics Education**, v.10, n.3, 1979.

SANTOS, Anderson; JUNQUEIRA, Adriana; OLIVEIRA, Guilherme. **Teorias da Aprendizagem e Conhecimento Matemático: Aportes Teóricos à Prática Docente**. Uberlândia, 2015

SKINNER, B. F. **Sobre o behaviorismo**. 14. ed. São Paulo: Cultrix, 1974.

TEIXEIRA, Leny. **A análise de erros: uma perspectiva cognitiva para**

compreender o processo de aprendizagem de conteúdos matemáticos, vol 3, 1997.

THORNDIKE, Edward. **A nova metodologia da aritmética**, 1936.

APÊNDICE
ENTREVISTAS

Juliana Negri (JN)

Paulino Souza (PS):

JN: Primeiramente, gostaria que você se apresentasse falando seu nome, sua idade, onde você trabalha, há quanto tempo você dá aula e para qual série. Enfim, fale um pouco de você.

PS: Bom, tenho 56 anos, sou professor de Matemática desde 2003 e dei aula para o Ensino Médio desde então. Atualmente, eu tenho dado muita aula para educação de jovens e adultos - o chamado EJA. Então, agora, não trabalho mais com o chamado regular, que tem um público mais jovem, e tenho uma carga reduzida: dou aula para o regular duas vezes por semana.

JN: Você tem experiência em escolas públicas ou privadas?

PS: Só dei aula para escola pública, não tenho experiência em escola privada. Todo meu tempo de ensino se deu em escolas do Estado.

JN: Certo. O Sr. já ouviu falar na metodologia da análise de erros? Já estudou sobre isso ou teve alguma formação específica nessa área?

PS: Não tive formação específica na análise de erros, mas nós (equipe de professores) temos foco nisso. Ultimamente, estamos tendo, pela Secretaria da Educação, um planejamento de aula que é online, no qual essa questão é muito enfatizada: "como trabalhamos isso?". Quando você dá um exercício ou coloca alguma atividade para o aluno desenvolver, ele acaba errando por diversos motivos. Então, até onde entendo, trabalhamos isso na medida em que conseguimos entender o porquê daquele aluno ter pensado daquela forma; entender a linha de raciocínio pela qual chegou naquele resultado que não é o desejado. Depois disso, tentamos direcioná-lo para que ele pense naquele problema de forma mais adequada, pois, não necessariamente, a forma com que ele pensou está de toda errada. Tento sempre trabalhar essa questão para, também, pensar em outras formas de explicar o mesmo conteúdo.

JN: Então você considera que as resoluções incorretas que mencionou podem servir para reestruturar as aulas que viriam em seguida?

PS: Com certeza. Entender como seu aluno está pensando é importantíssimo para você trabalhar sua aula, dando enfoque naquela que percebeu maiores dificuldades, buscando outros exemplos, exemplos práticos. Acontece que a gente tem muita dificuldade, no Ensino Médio da escola pública, porque são muitos alunos. Então, imagine que você está numa sala com 40 alunos e que cada um deles pensa de forma diferente, é complicado, por isso trabalhamos isso na medida do possível: sento com o aluno, tento entender o que ele está fazendo, como está pensando o exercício.

JN: Você considera que o grande número de pessoas em sala dificulta a percepção das necessidades dos alunos? A metodologia da análise de erros precisa compreender as individualidades?

PS: Sim, precisaríamos de uma sala de aula com menos alunos para dar a devida atenção a todos. Pode acontecer de um mesmo erro ser cometido por mais de um aluno, mas, ainda assim, o ideal seria sentar com cada um, individualmente, e entender aquele processo.

JN: Esse ambiente cheio também contribui para que a insegurança e vergonha dos estudantes dificultem o processo de tirar dúvidas?

PS: Isso acontece com frequência. Geralmente o aluno tem vergonha de perguntar. Mas, você tem que procurar incentivá-lo. Ter a sensibilidade de perceber que ele está em dúvida e provocá-lo: "Fulano, o que você acha sobre isso? Está certo? Está errado?". Além disso, a manifestação de um aluno também serve de incentivo para os demais. Quando você provoca, claro, sem que seja de forma autoritária, a sala se torna mais participativa. Isso é um fato. Não ter a participação deles faz com que a aula se torne muito mecânica, e é importante lembrar que, mesmo que eles saibam a resposta, são inseguros para compartilhar seu raciocínio.

JN: E você, tendo experiência com EJA, com pessoas mais velhas, acha que essa insegurança, vergonha e/ou resistência podem ter a ver com a idade? Ou são características que independem da fase da vida?

PS: Sim. Tem muito a ver com a idade. Se você trabalha com o ensino regular de Ensino Médio e, em seguida, numa sala de ensino EJA, você consegue perceber que a EJA, na maior parte das vezes, participa muito mais das aulas. Embora geralmente tenham mais dificuldade, se sentem mais encorajados, até pela maior experiência de vida, enquanto os jovens tendem a se retrair.

JN: Entendo. Já presenciou a relação entre os próprios alunos em tom de deboche quando se trata de tirar dúvidas durante as aulas?

PS: Isso acontece com frequência. A postura que procuro ter em sala para minimizar esse fenômeno é elogiar o ato de perguntar: “Muito bem!”, “Pergunta interessante”, ainda que aquela não tenha sido a mais adequada no momento. Jamais adotar falas do tipo: “Isso não tem nada a ver com o que estamos falando”.

JN: Bem, voltando um pouco, agora, para a metodologia da análise de erros em si. Você acredita que a cultura da escola, seus valores, contribuem para esse tipo de metodologia? O tempo que é fornecido é suficiente para implementá-la?

PS: Às vezes, com um cronograma pré-planejado, se torna difícil encaixar aulas com conteúdos os quais se percebeu importante revisar, por exemplo. Nosso tempo é muito curto, é complicado. O ideal seria, talvez, contar com professores especificamente que trabalhariam com os estudantes num período pós aulas, pois, dentro de sala, um único profissional para fazer isso é complicado. Além disso, outro fator que deve ser levado em consideração é o pré-requisito. Os alunos chegam no Ensino Médio, muitas vezes, despreparados para os conteúdos pré-planejados, assim, o fator do tempo se mostra novamente como um obstáculo, porque fica inviável para o professor retomar aquilo que eles já deveriam saber.

JN: No geral, você acredita que a metodologia é funcional? Seria interessante tentar implementá-la ainda mais no dia a dia?

PS: Teoricamente ela é interessante, mas, na prática, deixa a desejar, principalmente por conta das condições que temos hoje para dar aula (tempo, quantidade de alunos, despreparo dos mesmos etc). Acredito que o ideal seria diminuir significativamente o número de alunos, principalmente do Ensino Médio, e colocar mais psicólogos para atendê-los e ajudá-los com essas questões. O professor está sobrecarregado: precisamos ser professor, psicólogo, pai, conselheiro, amigo. O sistema pede um resultado irreal, o qual conseguimos atender parcialmente, na medida do possível.

Juliana Negri (JN)

Gabriel Sibo (GS):

JN: Primeiramente, gostaria que você se apresentasse falando seu nome, sua idade, onde você trabalha e para que série você leciona.

GS: Bom, sou o professor Gabriel, sou de São Paulo mesmo, trabalho com as três séries do Ensino Médio do Estado, além de uma turma do oitavo ano.

JN: Há quanto tempo você dá aula?

GS: Se eu contar residência pedagógica e PIBID, estou há 10 anos atuando como professor.

JN: Você já ouviu falar na metodologia da análise de erros? Já estudou sobre isso ou teve alguma formação específica nessa área?

GS: Sim. Desde a faculdade já tinha ouvido falar disso e busco sempre frisar isso: utilizar as dúvidas do aluno para levantar questionamentos e chegar na resposta certa dessa maneira.

JN: Já aconteceu de você estar corrigindo uma prova e apareceu um raciocínio incorreto mas proveitoso para reestruturar uma próxima aula? Ou quem sabe um erro cometido pela maioria dos estudantes que teve esse efeito?

GS: Sim, a ideia seria basicamente essa. Não só na prova, mas quando você passa pela sala de aula, consegue perceber onde os alunos estão tendo dificuldade. Por exemplo, numa prova paulista, percebi que muitos alunos erraram uma questão sobre razões trigonométricas. O segundo passo é perguntar: "Por que eles erraram isso?". Será que eles erraram por não entenderem o conceito de razão trigonométrica ou será que foi outro fator? Aí, você abre uma janela para questionar. Talvez a razão não seja única, às vezes a questão esteja realmente muito exigente. Durante minhas aulas, se eu vejo, por exemplo, que muitos deles erraram multiplicações, eu utilizo uma aula para explicar novamente, passo a passo, como ela pode ser realizada, a fim de que eles consigam acompanhar melhor as próximas aulas. Uma coisa que eu gosto de fazer também na avaliação, é corrigir a prova do aluno como um todo, e não questão por questão. Então você pega duas questões que são parecidas e, se perceber que um aluno acertou uma questão e a outra ele aplicou um raciocínio incorreto, consegue pensar em mais possibilidades, como distração ou nervosismo.

JN: Então você acredita que quando o professor corrige a primeira questão de todo mundo, em seguida a segunda questão, e assim por diante, ele perde a noção de como está sendo o desempenho de cada um deles, num geral?

GS: Exato. Dependendo da quantidade de alunos, esse método pode dificultar essa visão geral. Uma possibilidade, caso queira fazer desse jeito, é grifar e indicar cada ponto de atenção que ele deve priorizar, facilitando para o professor e para que o próprio aluno saiba onde está errando.

JN: Em sala de aula, você considera que os alunos têm resistência a assumir suas dúvidas ou dificuldade em procurar sua ajuda?

GS: Isso sempre. Vai ter o aluno que tem vergonha e aquele que, quando você faz um questionamento, ele tende a buscar a resposta no meio digital, pela internet, sem sequer refletir sobre a pergunta, e isso gera muitos malefícios, pois ele não está tirando uma dúvida, está querendo uma resposta pronta.

JN: Você disse que trabalha com Ensino Fundamental e Médio. Acredita que a idade tem relação com essa insegurança de buscar o professor? Como você enxerga esse comportamento nos adolescentes e nos mais novos?

GS: Os adolescentes têm um pouco mais de vergonha, sim. No Ensino Médio, existem alunos mais abertos do que outros, mas sinto que a comunicação com o professor é menor. Uma estratégia que gosto de adotar é nunca dar aula parado. Sempre circulo entre os alunos para ver de perto como eles estão fazendo as questões e se estão fazendo.

JN: Então acredita que uma postura que o professor pode ter para contribuir para que os alunos fiquem mais à vontade é estar perto para que aquele estudante consiga tirar uma dúvida diretamente com você sem que a sala precise ouvir?

GS: Sim, é um jeito de que aqueles que são mais tímidos não precisem se expor para a classe.

JN: Agora, voltando um pouco para a questão da metodologia, acredita que a cultura da escola (mais precisamente quando se trata da flexibilização de cronogramas pré-planejados) pode contribuir para a realização dela? Como você percebe o lugar em que trabalha nesse sentido?

GS: É complicado. Tem uma frase da qual eu discordo totalmente: "a Escola também é uma empresa". Trabalhar ou pensar que o ensino é uma linha de produção não faz o menor sentido. Não estamos trabalhando com máquinas, estamos lidando com pessoas. Dentro da escola, nós temos metas, temos objetivos. Eles querem, por exemplo, que você siga um currículo inteiro num tempo determinado porque vai ter uma prova a ser aplicada e todos aqueles conteúdos vão cair. Então, não. Não acho que eles nos ajudam a trabalhar com o erro do aluno e nem ajudam eles a irem devagar no próprio tempo. Querem que tudo seja trabalhado no tempo que o Estado determina.

JN: Logo, professor, você considera que o desenvolvimento de uma metodologia baseada na análise de erros seria interessante e benéfica?

GS: Com certeza. Temos que levar em conta que cada um tem seu tempo para aprender, uns apresentarão mais facilidade do que outros, e não tem nada de errado em você focar num conteúdo que é pré-requisito, se é que posso chamar assim. Por exemplo, se, numa aula do Ensino Médio, estou apresentando funções exponenciais e percebo que os alunos estão cometendo muitos erros em potenciação, é correto, ao meu ver, focar no ensino da potenciação. Porque se eu jogar só uma função com um conceito que eles não dominam, não iria fazer o menor sentido para eles. É ruim pensar que, fazendo isso, você estará fugindo do currículo e, em seguida, será cobrado por isso. Trabalhando num sistema que preza por metas, mas não por qualidade, consigo perceber a realidade da educação no estado de São Paulo. Não sei se você está a par dessa informação, mas a rede estadual de São Paulo caiu para a décima posição no Brasil (FONTE), e vale lembrar que estamos falando do estado mais rico do país, aquele que, teoricamente, tem capacidade para investir bem mais em educação do que outros. Tudo isso, no meu entender, tem causa na intenção de transformar o ensino numa linha de produção.

JN: Certo. Professor, você tem algo a mais para acrescentar sobre esse assunto num geral?

GS: Queria reforçar que acho que devemos trabalhar com a metodologia da análise de erros, mesmo que dentro de nossas limitações. Um bom exemplo que aconteceu recentemente comigo foi, numa aula de revisão sobre arcos de circunferência. Quando perguntei a eles o que era uma circunferência, um dos alunos levantou a mão e disse que era um círculo. Ao invés de simplesmente dizer: “você está errado”, busquei levantar o questionamento para a sala: “mas, então, será que o círculo e a circunferência representam a mesma coisa? Qual característica poderia diferenciar essas duas palavras?”. Nunca ridicularizar a dúvida ou erro de um aluno: é isso que conseguimos fazer enquanto profissionais.

Pessoa A: Juliana Negri (JN)

Pessoa B: João Moura Júnior (JJ)

JN: Para começarmos, gostaria que você me dissesse seu nome, sua idade e onde trabalha.

JJ: Meu nome é João Moura Júnior, sou professor, escritor e empresário. Moro em Sorocaba, mas morei em Winter Garden, Estados Unidos, por muito tempo. Sou escritor prolífico de 22 livros, entre eles, 5 de Matemática. O mais recente se chama "O menino que calculava sonhos", inspirado no Malba Tahan. Dei aula há muitos anos, nos anos 90, mas sei que mudou muito de hoje para cá. Tenho um centro tecnológico educacional "Evolução", que é um centro não só voltado para o futuro, mas também um centro que tem graduação, pós graduação, MBA. Além disso, dou aula voluntária para crianças que possuem discalculia, mas já trabalhei com disléxicos também. Dou palestras em escolas públicas, universidades; recentemente dei palestra na Uniso: "As novas tecnologias e a Matemática do futuro."

JN: Legal. E no Ensino Médio, você tem experiência?

JJ: Lecionei bastante tempo, 1°, 2° e 3° ano, ainda quando era segundo grau. Hoje chamamos de Ensino Médio.

JN: E você já ouviu falar da metodologia da análise de erros? Já recebeu algum tipo de formação específica nessa área?

JJ: Para você ter uma noção, estou fazendo uma especialização em estatística descritiva, mas tudo que é referente à novas metodologias de ensino é muito abrangente. Não me especializei nessa área.

JN: Durante as suas aulas, você já utilizou respostas e resoluções que estavam incorretas dos alunos para poder reestruturar as aulas que viriam em seguida? Já aproveitou os erros que os alunos cometeram pra mudar alguma coisa?

JJ: Já tivemos várias situações. Primeiramente, gostaria de enfatizar que acredito haver dois tipos de professores: existe o professor e existe o profissional da área de educação. O professor é aquele indivíduo que tem uma visão mais abrangente do estudante. Ele nunca encara o estudante como um ser "sem luz", primeiro passo, ele encara como estudante. Então, muitas das vezes, quando dão algumas respostas fundamentadas, não é por falta de saber , mas é por falta de orientação do próprio dia-a-dia. Então, o professor tem que ver esses tipos de respostas e aproveitar alguma delas para que conduza a ele o acerto. Por exemplo, no fundamental, o estudante estava fazendo um exercício sobre o teorema de Pitágoras, na hora que você fala que o somatório dos quadrados dos catetos é igual o quadrado da hipotenusa, você tem uma fórmula mecânica e o estudante te dá informações desencontradas porque ele tem um problema de interpretação da fórmula. Por exemplo, certa vez, um estudante me deu uma resposta na qual ele sabia que $a^2 + b^2 = c^2$ dentro da fórmula mecânica, mas ele fez mecanicamente, sem entender a criação dos fatos. Se você tem uma parede reta e uma base junta dessa parede reta e você traça imaginavelmente uma linha entre a base e um ponto qualquer da base até o final da parede, você tem essa linha imaginária e nós estamos falando de hipotenusa, essa parede eu estou chamando de cateto e a base, que é o chão, eu chamo de outro cateto. Então, quando você começa a explicar o que é cateto para o estudante, o que é hipotenusa, não mecanicamente, mas sim analiticamente, ele começa a ter uma visão da matemática totalmente diferente e aqueles erros que ele cometia mecanicamente, são superados por uma visão mais da prática: começa a imaginar as paredes, o chão, a linha que tá sendo um traçada entre um ponto qualquer do chão até um ponto qualquer dessa parede, percebe um ângulo reto na base e o ponto inicial da parede. Quando você começa a mostrar isso, prática,levanta ele da cadeira, chega com ele perto de uma parede, mostra o a base o chão, mostra uma linha imaginária, ele começa a entender que aqueles erros que ele está cometendo são erros tolos, não do aluno, mas sim do professor, ao não possibilitar essa visão para ele.

JN: Essa fala me fez lembrar de casos em que eu acompanhava uma aula sobre Teorema de Pitágoras e o triângulo retângulo sempre aparecia numa posição específica. Quando o professor rotacionou esse triângulo, já não ficava evidente a eles que era um triângulo retângulo, e pensavam que já não poderiam mais utilizar Pitágoras.

JJ: Exatamente, e esse é um exemplo que ocorre comumente. Vamos dizer que existe um erro no pensamento humano relacionado à matemática. Quando você entra numa sala de aula e você pergunta para 40 estudantes que estão numa sala: “Quem é que gosta de matemática, erga a mão”. A maioria não ergue. Se você perguntar quem não gosta de matemática, a maioria ergue a mão. Na realidade, o problema não está em gostar ou deixar de gostar. O problema está na pergunta. A pergunta não deveria ser quem gosta ou deixa de gostar, mas sim quem conhece matemática. Quando você pergunta: “quem conhece matemática?” a maioria vai erguer a mão e dizer eu não conheço. E aí tá a oportunidade do professor fazer o convite: “Então você quer conhecer? Eu vou te ensinar”. A fusão dos dois do interesse dos dois: interesse em conhecer e interesse em ensinar, vai gerar o conhecimento. Então, a maioria dos estudantes não conhece matemática e fala que não gosta por não conhecer.

JN: Você acha que os adolescentes (pode comparar com as crianças adulto que você já trabalhou) têm resistência em assumir que tem dúvidas ou dificuldade em procurar ajuda? A idade pode ter relação com isso?

JJ: Costumo dizer que nós humanos temos três fases. Vou usar um pouco da psicologia voltada para a educação. Essas fases são de suma importância, que muitas vezes passam despercebidas e geram o perfeito causa/consequência. Quando a criança tem uma dificuldade ou não ergue a mão, boa parte se parece com o personagem Joselino Barbacena, o qual, quando o professor se dirigia a ele para fazer qualquer tipo de pergunta, se escondia debaixo da mesa, com medo. Nós temos a fase do 0 aos 7, dos 7 aos 14 e dos 14 aos 21. Do zero ao sete é a construção de valores, onde você tem a honra, onde você entende o que é ética, o seu pai é teu herói, sua mãe é tua heroína… fase esponja. Dos sete aos quatorze, é uma fase que você começa a olhar o mundo com outros olhos, em que muitas das vezes você começa a entrar no processo de mudanças dentro do seu próprio organismo. Dos quatorze aos vinte e um, existe uma mudança mais brusca, onde eu entendo e eu sei o que eu tenho que seguir dentro da minha vida. Dos 21 pra frente, começam as mudanças mediante tudo que se absorveu nessas três fases. Ou você vira uma pessoa madura de verdade, ou trabalhando com a inconsequência. Mas vamos lá na pergunta que você me fez. Por exemplo, vamos colocar um estudante do ensino médio que está com 15 anos de idade. Ele já está entrando na terceira fase. Esse estudante corre risco de, dependendo do que ele aproveitou nas primeiras duas fases, levar a vida educacional dele como a maioria leva: zero preocupação. Para fazer com que o aluno engaje na aula, o professor deve estar numa posição que diga: "eu tenho interesse em você", "não tenha vergonha", "erga a mão". Ao meu ver, todo professor, antes de começar suas aulas, deveria dizer em alto e bom tom para a turma: "não acreditem em nada do que eu estiver proferindo daqui pra frente. Vão pesquisar.", uma vez que não queremos que eles repliquem o pensamento de um professor e enxerguem a dúvida como uma ferramenta de construção de ideias. Tirar a ideia de que a fala do professor é a verdade absoluta e autoridade máxima na sala. Porém, nem todos são professores, como eu disse, muitos estão ali porque são meros profissionais da educação.

JN: Considera que existe uma vergonha entre os estudantes por medo de virarem "chacota"?

JJ: Sem dúvida. Por isso que volto a dizer que o professor tem que ser orientador, de pedir para que os alunos ergam a mão lá em cima, sem medo da exposição, uma vez que sua dúvida pode muito bem ser a dúvida daquele que está fazendo chacota de você. Nessa fase, às vezes estão passando por um começo de namoro, em que a garota ou garoto do qual ou da qual gosta está em sala também… existem vários fatores para essa timidez. O professor deve deixar claro: “Fulano, mesmo que você ache que está falando algo que não tem nada a ver, diga. Vamos esclarecer, vamos aprender juntos. Nós temos que nos posicionar na afirmação de que estamos aprendendo também. Eu levo uma frase de Sócrates que acho que tem a ver com isso: “Só sei que nada sei”; sei que nada sei porque existe o ignorante, que é aquele que diz que sabe algo que acredita saber, e aquele que sabe que pouquinho sabe, talvez não seja tão ignorante assim.

JN: Voltando um pouco pra pra metodologia do do ensino baseada na análise de erros. Uma vez que o objetivo é identificar e entender linhas de raciocínio, onde os alunos estão errando com maior frequência e, após isso, tomar ações. Para você, quais são os desafios para que a gente, enquanto professor, consiga implementar essa metodologia em sala de aula?

JJ: Eu penso da seguinte forma: já fui professor da rede pública, na periferia, onde existiam 40 alunos por sala, e já dei aula em escolas privadas que possuíam de 14 a 20 alunos por turma. Vejo que existem vários fatores, mas, o principal, é a falta de habilidade em conduzir o tempo. Não adianta conhecer e adquirir habilidades se não tiver atitude; não são cursos que vão colocar você a ter atitude, muitas das vezes, atitude vem de berço, vem conselho, vem de orientadores, vem da família. O professor deve conseguir perceber quem é o estudante com dificuldade, se ele comeu, se não comeu, se tem um problema de relacionamento na família; deve fazer com que o tempo deles seja mais valoroso.

Pessoa A: Juliana Negri (JN)

Pessoa B: Fábio Marson Ferreira (FF)

JN: Professor, eu gostaria, por favor, que o sr. começasse a entrevista se apresentando: falando seu nome, sua idade e onde você trabalha.

FF: Eu sou Fábio Marson Ferreira, tenho 59 anos de idade. Sou professor na Escola Móbile, São Paulo, há 20 anos. Nesse período, dei aulas no 1°, 2° e 3° anos do Ensino Médio.

JN: Há quanto tempo você dá aula?

FF: Contando o período de tempo que dei aula em Campinas, totalizam-se 25 anos de sala de aula, aproximadamente.

JN: Você sempre trabalhou como professor?

FF: Sim. Sempre trabalhei como professor em escolas, além de ter dado muita aula particular nesse período, também.

JN: E o sr. já ouviu falar na metodologia do ensino baseada na análise de erros?

FF: Já ouvi falar, sim.

JN: Em algum momento teve uma formação específica nesse tema?

FF: Certamente. Aqui na Móbile, principalmente, ao longo desses anos todos, tudo que temos hoje, construído em termo do sistema de correção de provas, também vem no sentido de instrumentalizar uma possibilidade de análise de erros. Até antes dos carimbos, nós falávamos sobre rubrica de correção como uma forma de uniformizar a correção, de maneira que sejamos justos. Não posso aplicar pesos diferentes para diferentes alunos. Num segundo momento, surgiu a ideia de: "Espere um momento. A partir do momento em que a gente cria esses carimbos e você consegue classificar os erros dos alunos de alguma maneira, conseguimos quantificar os tipos de erros que eles estão cometendo e, eventualmente, tomar ações para mitigá-los". Por exemplo, se está aparecendo muitos erros algébricos, conseguimos fazer oficinas específicas. A princípio, o que a gente sempre tem é uma sensação: "os alunos cometem muitos erros algébricos" - especulações. Se conversarmos com os professores de Física, eles vão apontar o dedo para a Matemática: "eles cometem muitos erros algébricos". Os professores da Química: "eles têm dificuldade com simplificação de contas e eles acabam errando porque trabalham com números muito grandes". Enfim, antes dos carimbos, não tínhamos condição de ter uma quantificação disso. Era tudo baseado numa impressão.

JN: Até porque são muitos alunos e muitas turmas, certo?

FF: Com certeza. E outra coisa: pode parecer exagero, mas 5 ou 10 anos passam muito rápido. Nós, como professores, começamos a misturar as turmas, temos dificuldade para relacionar cada aluno com seu respectivo ano, etc. Se você tem a possibilidade de fazer um registro, ano a ano, identificando a turma e que tipo de erro eles cometem, acredito que seja uma ferramenta bem poderosa.

JN: Você disse que esses levantamentos servem para que possam tomar ações, como oficinas. Porém, você já usou esses resultados para reestruturar aulas que viriam em seguida?

Por exemplo: “eu acredito que não dá para continuar esse assunto porque eles ainda não dominam o anterior”.

FF: Sim, desde sempre. Também, na matemática, por conta dessas interfaces com outras disciplinas, desde o começo que estou aqui, sou chamado para resolver outros problemas. Logo no começo do meu trabalho aqui na Móbile, havia uma questão com notação científica na Química e na Física. Os professores dessas disciplinas reclamavam que eles não sabiam fazer as operações algébricas necessárias, mas também acreditavam que eles próprios não eram de todo responsáveis por ensiná-los a somar dois números em notação científica com potências de 10 diferentes, multiplicar, etc; eles acreditavam que nós da matemática que deveríamos dar conta. Me lembro desde o começo: eu era muito instado para preparar fichas, para dar oficinas, etc. E aí, é claro que, eventualmente, imagine um professor de Química falando sobre mol, número de Avogadro, que já temos, de cara, $6,023 \cdot 10^{23}$. Nesse momento, ele já encontrava dificuldades em avançar com o conteúdo, pois a parte algébrica não ia para frente. Na Matemática, sim, eventualmente temos que dar uma paradinha no conceito e falar: “Essa turma (às vezes, é uma questão mais pontual) tem uma dificuldade maior”, “A turma passada fluiu mais tranquilamente.”. Enfim, isso ocorre por conta de especificidades. Por exemplo, temos turmas na pandemia que ficaram marcadas por pouco tempo de trabalho, um trabalho bem mais distanciado, dificultado, e elas chegam para nós com mais dificuldade do que estávamos acostumados.

JN: Você considera que a Matemática é uma disciplina acumulativa? No sentido de ser fundamental compreender muito bem um conteúdo anterior para aprender o próximo?

FF: Acredito que a Matemática tem esse caráter, sim. A geometria, por exemplo, acho que o próprio ensino faz com que você vá expandindo os conceitos, construindo uma coisa em cima da outra, passando do unidimensional para o bidimensional e, depois, para o tridimensional, etc.

JN: Legal. Agora, vamos falar um pouco sobre o comportamento dos alunos. Você considera que eles, no Ensino Médio, têm dificuldade em assumir dúvidas e dificuldades para procurar sua ajuda?

FF: Eu acho que eles não têm dificuldade em ter consciência de quem possuem muitas dúvidas, mas eles têm dificuldade em lidar com isso, em encontrar caminhos para resolver. Por exemplo, ontem mesmo, eu estava falando qualquer coisa e lancei uma pergunta para a classe, e essa classe é mais quieta, eles respondem pouco, não se expõem muito, e aí uma aluna respondeu. A resposta foi bem baixa, então eu pedi pra ela repetir, e eu acho que ela tinha acertado a resposta, mas ela falou que não ia falar porque achava que tinha errado. Eu disse que ali era o lugar de errar, a escola é o lugar de errar. Aqui você vai errar, e a gente vai acertar, e você vai aprendendo. Isso faz parte do processo. Então, eles têm essa resistência, sim, e acho que mais do que nunca a escola, como um lugar de errar, foi perdendo esse caráter. Vejo que, hoje, os colegas, as turmas, são muito mais críticos do que na minha época, colocam o jovem em situações mais... São cobrados mais ali, às vezes até de maneira efusiva. Isso pode criar resistência na pessoa em se manifestar, em cometer um erro na frente dos outros, e de saber, de perceber que comete erros, que têm dificuldades, e de como proceder para procurar ajuda. Então, eu acho que a dificuldade eles até percebem que possuem, mas existem resistências internas por conta do meio ambiente. Isso é muito ruim, eu acho que isso é muito ruim.

JN: Você disse que, hoje em dia, parece que é mais difícil os alunos assumirem seus erros. Então, gostaria de perguntar se você acha que a idade tem relação com isso. O fator mais influente seria a idade ou a geração?

FF: Eu acho que tem uma questão geracional bastante importante. Com a minha idade, eu me lembro que eu era um aluno muito extrovertido, mas era uma questão minha. Eu sempre falava, eu sempre respondia. Mesmo errando, eu não estava nem aí. Eu estava aprendendo e eu percebia que eu estava aprendendo. Eu não tinha medo de falar na frente dos outros. Hoje a gente vê pessoas que realmente têm uma dificuldade muito grande de se expor, de se colocar na frente dos outros. Eu acho que a questão da idade, a gente está tratando de adolescentes, do Ensino Médio, então eles têm uma necessidade de aceitação muito forte. Eles têm que ser aceitos ali no grupo deles. E aí, de repente, eles têm um pouco de medo de se expor, estar errado, virar chacota e etc. Então, sim, eu acho que isso tem dois fatores. E a gente percebe que até quando eles estão certos, eles viram chacota: "Por que se expôs?", "Parece que você está querendo agradar o professor". E não é nada disso. Voltando, eu era meio que um ponto fora da curva. Eu sempre fui um cara que, na sala de aula, me sentia muito à vontade. Eu me aproximava muito dos professores, eu gostava muito. Então, quando os professores chamavam alguém para participar, eu era o primeiro a levantar a mão. Para as disciplinas que eu gostava, eu estudava antes em casa. Não era exatamente um excelente aluno, mas as coisas que eu gostava de estudar, eu aproveitava bem a aula, eu ia preparado, eu estudava um pouquinho, lia um pouquinho, coisas assim.

JN: Como o professor pode contribuir para que os alunos se sintam mais à vontade?

FF: Bom, em primeiro lugar, não confirmando todas essas coisas negativas, porque tem professor que faz isso, que tira um sarro do aluno que errou, que faz uma brincadeira que nem sempre cai muito bem. Então, o professor deve ser acolhedor, acolher aquela resposta, se tiver errado, ele discutir o erro. De repente, pode devolver a pergunta para a classe, para que a classe também avalie a resposta daquele aluno, para que o "errar" seja desmistificado e normalizado como parte do processo. Também, deve criar momentos em que os alunos participem ativamente da aula, colocando suas opiniões. Ao meu ver, na matemática não existe muito esse espaço para discussão no sentido de uma ideia contra a outra, as coisas já são mais estabelecidas, mas é possível, por exemplo, discutir sobre diferentes tipos de resolução. Encorajar a classe a responder: "Alguém fez diferente? Poderia compartilhar conosco?", muitos alunos participam nesse momento. Após isso, pode-se fazer uma fala sobre a importância de eles perceberem que existem muitos modos de pensar matemática, existem muitas maneiras diferentes para resolver o mesmo problema, existe muita imaginação e criatividade envolvidas. Nesse momento, em que apresentamos diferentes resoluções, alguns alunos chegam em mim e perguntam: "Professor, eu posso continuar fazendo do meu jeito?", e aí eu respondo: "Claro que pode. Estamos apresentando a vocês ferramentas poderosas da matemática, as quais podem ser mais eficientes, dependendo do problema." É importante também que eles se desapeguem ao mesmo modo de resolver as questões que estão acostumados e abram a mente para outras possibilidades. Em alguns casos, eles podem até ser bem criativos e acessar vários conhecimentos. Um exemplo foi na aplicação da minha última prova, em que existia uma questão cuja instrução era apenas: "resolva o sistema linear 3x3". Teve aluno que usou regra de Cramer; houveram alunos que fizeram substituições de forma completamente diferente uns dos outros; outros usaram Cramer e substituição, outros fizeram escalonamento… E esse é um ponto muito importante, porque dificulta para a gente que está corrigindo. Ou seja, eu tenho que olhar para um método que não é aquele do meu gabarito, e aí vai me dar trabalho, eu não vou saber se está certo simplesmente "batendo o olho", mesmo que a solução esteja igual, pois eu preciso avaliar se o processo faz sentido. Por que às vezes os professores resistem a isso? "Tem que fazer desse jeito". Lembro-me até hoje, no meu primeiro ano na Móbile, de uma menina vinda de outro colégio. Estávamos falando sobre resolução de equação de segundo grau, naquele momento, sobre Bháskara, para depois falarmos sobre fatoração, etc. A menina levanta a mão e fala assim: "Professor, eu preciso resolver por Bháskara?", eu respondi que não, que se ela soubesse resolver por outros caminhos, poderia, como soma e produto e fatoração. Então, ela me disse que preferia fazer por soma e produto, mas que o antigo professor considerava apenas se o fizesse pelo Bháskara. A conclusão que eu chego a partir disso é que, talvez, o próprio professor não domine os outros métodos de resolução e não quer estar aberto para alguém que resolve por outros meios. Por via de regra, eu acho que é um defeito quando os professores exigem o desenvolvimento de um exercício considerando apenas um método como válido, porque aí fica inegavelmente mais fácil para ele corrigir as provas.

JN: Na escola, utilizamos a ferramenta do Looker. Acho que seria interessante se você pudesse explicar como ela funciona, por favor.

FF: Bom, o Looker é uma ferramenta do Google que extrai dados e permite que você faça inúmeras relações: gráficos de notas por aluno, por turma, começar a cruzar informações. é uma ferramenta muito útil para fazermos diagnósticos. É possível verificar se, de um ano para o outro, estamos tendo algum tipo de aumento de frequência num carimbo específico, se de uma turma para outra existem muitas diferenças de desempenho em algum requisito. Então ele é a ferramenta que permite com que você faça a análise quantitativa com dados reais.

JN: Gostaria de falar um pouco sobre a cultura escolar. Percebemos que a escola tem essa preocupação em estudar os erros a partir do momento em que ela aderiu a esse sistema. Você acha que o cronograma condiz com essa preocupação? Acredita que vocês têm tempo suficiente para analisar esses erros e pensar em replanejamento de aulas?

FF: Não, eu acho que o Looker é tão poderoso e ele está tão bem estruturado aqui na escola (créditos ao pessoal da Tecnologia Educacional) que se cria uma quantidade tão grande de dados e relações, mas que não temos uma fração do tempo que precisaríamos para mergulhar nisso e realmente extrair alguma coisa. A gente consegue fazer coisas pontuais. A coordenação educacional, por vezes, pede para que nós nos atentemos a algum ponto muito específico, então, momentaneamente, tiramos um tempo para fazermos alguns relatórios e pensarmos em alguns encaminhamentos. Porém, a quantidade de dados é, sim, muito grande e usamos muito pouco.

JN: No período que estamos agora, segundo semestre do terceiro ano, nosso cronograma é uma revisão dos conteúdos de 1° e 2° ano do Ensino Médio, certo? Você acha que essa revisão ajuda os alunos a sanarem suas dúvidas, evitando a recorrência de erros?

FF: A revisão é o seguinte: ela não é tanto o momento para o aluno resolver problemas muito graves na base dele. É um processo que pode sinalizar onde estão as dificuldades e onde ele pode buscar soluções. Estamos falando de um menino ou menina do terceiro ano do Ensino Médio, ou seja, espera-se que possuam o maior grau de autonomia dentre os estudantes da escola básica. Se ele tem uma base boa numa determinada matéria, acredito que a revisão é o momento dele voar, quando ele vê 4 exercícios de análise combinatória, eletromagnetismo, pesados, e uma aula de 50 minutos ser o suficiente para que ele consiga resolver as questões com o apoio do professor e assistentes. Agora, caso ele possua dificuldades de base, não acredito que a revisão seja muito útil, pois, mesmo que haja apoio dos profissionais ali, pode ocorrer o efeito contrário, como ansiedade, o que é preocupante.

JN: Por fim, queria saber que dicas daria para um professor que trabalha numa escola que não tem esse tipo de ferramenta, não tem uma tecnologia que faça essa análise muito detalhada dos alunos, sobre a postura que ele pode estabelecer em sala de aula para poder instigar os alunos a tirarem suas dúvidas e trabalhar com elas?

FF: Ele sempre deve trazer a dificuldade deles à baila; procurar identificar se é algo muito recorrente; enquanto faz as correções, de repente pode categorizar dois ou três tipos de erros numa questão. Comece devagar. De algum modo, procurar, também, quantificar. Não acho que seja necessário ter os dados da escola inteira, mas para duas ou três turmas, isso é importante para perceber se não tem algo mais preocupante. Além disso, a conversa com outros colegas professores se faz muito necessária, mesmo que eles sejam de outras áreas do conhecimento, pois dificuldades algébricas são percebidas em Física, Química, Biologia, por exemplo, e não só isso, mas a didática que outros colegas trazem pode te dar uma ideia a como conduzir determinado assunto que encontrou obstáculos de aprendizagem. Reforço que as “impressões” não são o caminho: “eu acho que a turma tal é melhor”, “eu acho que eles têm mais dificuldade nisso do que aquilo”, é importante trabalhar com dados consistentes. Existe uma coisa que precisamos deixar clara: estamos numa escola que está no topo da pirâmide no que diz respeito a recursos disponíveis e estudantes privilegiados. Por isso, é importante pensar nos professores que estão na rede pública, cujas escolas possuem muitos problemas de base, e acho que se torna muito mais fácil identificar esses problemas, pois estão mais evidentes. Aqui, eu concluo que essas ferramentas são tão sofisticadas e abarcam uma quantidade tão grande de dados, porque precisamos cavar muito para encontrar os problemas. Devemos levar em conta que não temos alunos que não conseguem realizar operações básicas, as dificuldades são mais pontuais no sentido de interpretação de um algoritmo mais complexo, por exemplo.

JN: Gostaria de compartilhar uma observação minha enquanto estagiária: na "salinha", convivemos muito com monitores de todas as outras disciplinas e acompanho muito, por exemplo, monitores de História e Geografia montando questões. E aí eu percebi: até quando são questões teste, as alternativas guiam o professor de alguma forma para entender o que aquele aluno pensou sobre aquele texto, o que ele entendeu sobre aquele momento histórico; e isso falta no nosso ensino de matemática. Quando produzimos uma questão teste e as alternativas são apenas números, se torna muito difícil para nós entendermos qual foi o raciocínio do aluno para que ele chegasse naquele resultado.

FF: Se a gente fizer uma questão de múltipla escolha em que eu selecione as alternativas para que eu consiga reconhecer os tipos de erros que estão cometendo, na verdade, eu estou induzindo o aluno ao erro. "Esqueceu de dividir por dois", "errou o sinal". Se coloco na alternativa $\frac{2}{5}$ e $-\frac{2}{5}$ e ele marca errado, na verdade, o que provavelmente aconteceu foi que ele chegou nos $\frac{2}{5}$ e eu o induzi, pelo fator tempo (pressa) que as provas estabelecem, a marcar essa alternativa, sem que percebesse que seu raciocínio ainda não tinha sido finalizado. Uma das dificuldades em ensinar Matemática é essa. Por exemplo, na questão da última prova que pedia para que ele descobrisse o valor de m de modo que o sistema linear fosse SPD. A partir do momento em que coloco como alternativas $m = 6$ ou $m \neq 6$ na tentativa de saber se ele sabe em qual situação o determinante deve ser igual ou diferente de zero, eu posso estar levando-o ao engano, ele pode ter chego em 6 e, tendo uma alternativa $m = 6$, marcaria essa. Por isso, considero que os testes não nos possibilitam uma visão clara dos saberes dos alunos, enfraquecemos sua capacidade de produção e organização do pensamento escrito. As questões dissertativas nos ajudam mais nesse sentido.