

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**Redução de Ordem de Modelos Quadrático-Bilineares MIMO via  
Subespaços de Krylov**

Elcio Fiordeliso Junior

São Paulo  
2017



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**Redução de Ordem de Modelos Quadrático-Bilineares MIMO via  
Subespaços de Krylov**

Trabalho de formatura apresentado à Escola Politécnica  
da Universidade de São Paulo para a obtenção do título  
de Graduação em Engenharia

Elcio Fiordeliso Junior

Orientador: Décio Crisol Donha

São Paulo  
2017

Fiordeliso Junior, Elcio

Redução de Ordem de Modelos Quadrático-Bilineares MIMO via Subespaços de Krylov, por E. Fiordeliso Junior. São Paulo: EPUSP, 2017. 170 pp. + apêndices

Trabalho de formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1. Redução de Ordem 2. Sistemas não-lineares 3. Subespaços de Krylov  
I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica I.t.

# Lista de Figuras

2.1	Comparação esquemática de vetor (a), matriz (b) e tensor (c). . . .	28
	a . . . . .	28
	b . . . . .	28
	c . . . . .	28
2.2	Esquemas das fibras de modos 1 (a), 2 (b), e 3 (c) de um tensor. . .	29
	a . . . . .	29
	b . . . . .	29
	c . . . . .	29
3.1	Esboço da projeção de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ sobre $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ por $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ . . .	52
3.2	Circuito elétrico de uma escada RC. . . . .	76
3.3	Escada RC com $u(t) = e^{-t}$ . . . . .	77
3.4	Escada RC com $u(t) = (\cos(2\pi \frac{t}{10}) + 1)/2$ . . . . .	80
3.5	Equação de Burgers com $u(t) = e^{-t}$ . . . . .	81
3.6	Controle de contorno da equação de Burgers com $u(t) = \cos(\pi t)$ . . .	83
3.7	Caso não-controlado da eq. de Burgers com $v_0(x) = 1 + \sin((2x + 1)\pi)$ . .	86
3.8	Controle de contorno de Chafee-Infante com $u(t) = \frac{1}{2}(\cos(\pi t) + 1)$ . .	88

3.9	Caso não-controlado de Chafee-Infante com $v_0(x) = \frac{1}{10} + \frac{7}{10} \cdot \sin^2((2x + 1)\pi)$ . . . . .	90
5.1	Circuito elétrico da escada RC MIMO. . . . .	128
5.2	Escada RC MIMO reduzidas com os mesmos pontos. . . . .	130
5.3	Escada RC MIMO com as mesmas ordens reduzidas. . . . .	133
5.4	Escada RC MIMO com ordens reduzidas similares. . . . .	134
5.5	Escada RC MIMO com ordens reduzidas similares e $u_1(t) = u_2(t) = e^{-t}$ . . . . .	136
5.6	Escada RC MIMO de ordem alta e seus modelos reduzidos. . . . .	137
5.7	Escada RC MIMO e suas reduções ortogonais. . . . .	139
5.8	Erros correspondentes às reduções tensoriais com interpolação tangencial. . . . .	142
5.9	Escada RC MIMO e seu ROM com interpolação tangencial. . . . .	143
5.10	Escada RC MIMO e seu ROM com interpolação tangencial, $u(t) = [1 \ 1]^T$ . . . . .	145
5.11	Escada RC MIMO e suas reduções ortogonais com interpolação tangencial. . . . .	146
5.12	Erros relativos para várias ordens reduzidas. . . . .	148
5.13	Escada RC MIMO e seus vários modelos reduzidos. . . . .	150
5.14	Resposta na frequência da primeira função de transferência do modelo de FitzHugh-Nagumo. . . . .	153
5.15	Resposta na frequência da segunda função de transferência do modelo de FitzHugh-Nagumo. . . . .	154
5.16	Espaço de fases de $v(0, t)$ e $w(0, t)$ e seus erros. . . . .	155
5.17	Espaço de fases tridimensional de $v(x, t)$ e $w(x, t)$ . . . . .	157

5.18 Espaço de fase tridimensional de $v(x, t)$ e $w(x, t)$ . . . . .	158
---	-----



# Lista de Tabelas

2.1	Equações variacionais obtidas comparando-se potências iguais de $\alpha$ .	40
3.1	Vantagens e desvantagens da [32]	56
3.2	Vantagens e desvantagens do BT [33]	57
3.3	Comparação entre os $e_{rel}$ e $n_r$ das abordagens hermitiana, de multimomentos e POD	84
3.4	Tempos de redução da POD, técnica hermitiana e dos multimomentos	84
5.1	Comparação entre $e_{rel,1}$ e $e_{rel,2}$ de ambas as técnicas de redução	135
5.2	Ordens reduzidas escolhidas para a comparação final.	149
5.3	Comparação dos tempos de simulação do FOM e dos ROMs.	149
5.4	Pontos de expansão e direções tangenciais da redução do modelo de FitzHugh-Nagumo.	156
5.5	Pontos de expansão e direções tangenciais para a redução do modelo de FitzHugh-Nagumo.	159



# Lista de Teoremas

2.1	Definição (Produto de Kronecker [1, 23]) . . . . .	26
2.1	Exemplo (Produto de Kronecker de uma matriz identidade com uma arbitrária) . . . . .	26
2.2	Exemplo (Produto de Kronecker de um vetor com ele mesmo) . . . . .	26
2.2	Definição (Tensor) . . . . .	28
2.3	Definição ( <i>Matricization</i> de modo $\mu$ de um tensor [6, 23]) . . . . .	29
2.3	Exemplo (As <i>matricizations</i> de um tensor de terceira ordem) . . . . .	29
2.1	Corolário ( <i>Matricizations</i> de um vetor) . . . . .	30
2.1	Observação (Soma das <i>matricizations</i> de tensores) . . . . .	30
2.4	Definição (Multiplicação de tensores matricial de modo $\mu$ ) . . . . .	31
2.2	Corolário ( <i>Matricizations</i> de um tensor definido por uma multiplicação matricial [6, 23]) . . . . .	31
2.3	Corolário (Tensores simétricos) . . . . .	31
2.5	Definição (Sistema polinomial) . . . . .	33
2.4	Exemplo (Sistema polinomial) . . . . .	33
2.5	Exemplo (Polinomialização de algumas não-linearidades) . . . . .	34
2.6	Exemplo (Procedimento de polinomialização) . . . . .	35

2.2	Observação (Sobre a não-unicidade do procedimento de polinomialização) . . . . .	36
2.3	Observação (Uma condição necessária para a equivalência das formas polinomial e original) . . . . .	36
2.4	Observação (Polinomialização de funções compostas [19]) . . . . .	36
2.7	Exemplo (Procedimento de quadrático-bilinearização) . . . . .	37
2.5	Observação (Sobre a não-unicidade da matriz Hessiana) . . . . .	38
2.6	Observação (O significado das equações variacionais e de suas respostas) . . . . .	40
2.7	Observação (Resposta a uma soma de exponenciais) . . . . .	42
2.8	Observação (Sobre a natureza da função de transferência de segunda ordem) . . . . .	47
3.1	Definição (Projetor [33]) . . . . .	52
3.2	Definição (Projeções ortogonais e oblíquas [33]) . . . . .	53
3.1	Observação (Forma dos sistemas QB reduzidos) . . . . .	55
3.2	Observação (Sobre as matrizes reduzidas de um sistema MIMO) . . . . .	55
3.3	Observação (Dependência de entradas de treinamento) . . . . .	56
3.4	Observação (Sobre a grande memória requerida pelo BT) . . . . .	57
3.3	Definição (Momentos de uma função de transferência) . . . . .	58
3.4	Definição (Momentos de uma função de transferência de ordem $k$ ) . . . . .	59
3.1	Exemplo (Cálculo dos momentos QB de ordem $(3, 1)$ ) . . . . .	61
3.5	Definição (Subespaço de Krylov [2, 18, 33]) . . . . .	65
3.2	Exemplo (Simetrização de um sistema quadrático [6, 7]) . . . . .	67
3.1	Teorema (Coincidência de multimomentos via Krylov [6]) . . . . .	69

3.2	Teorema (Interpolação de Hermite oblíqua via subespaços de Krylov [7]) . . . . .	70
3.5	Observação (Por que somente duas funções de transferência são o bastante?) . . . . .	90
4.1	Exemplo (As duas representações do termo bilinear de um sistema QB MIMO) . . . . .	94
4.1	Observação (A matriz $\bar{\mathbf{N}}$ vista como um tensor) . . . . .	95
4.2	Observação (Núcleos multivariáveis de sistemas MIMO) . . . . .	97
4.3	Observação (Derivadas com respeito a $s_2$ ) . . . . .	100
4.4	Observação (Sobre a razão pela qual $\mathbf{G}_2$ somente é calculada em $(s_1, s_2) = (\sigma, \sigma)$ ) . . . . .	101
4.5	Observação (Matriz Hessiana simétrica) . . . . .	101
4.2	Exemplo (O produto de Kronecker não é comutativo para matrizes) .	101
4.1	Teorema (Coincidência de Momentos Oblíqua Tensorial por Blocos Krylov) . . . . .	104
4.2	Teorema (Coincidência de Momentos Oblíqua Pseudolinear com Blocos Krylov) . . . . .	110
4.3	Teorema (Coincidência de Momentos Oblíqua Tensorial com Direções Tangenciais) . . . . .	113
4.4	Teorema (Coincidência de Momentos Oblíqua Pseudolinear com Direções Tangenciais) . . . . .	120
4.5	Teorema (Coincidência de Multimomentos via Subespaços de Krylov para sistemas MIMO) . . . . .	123
4.6	Observação (Sobre a razão pela qual $\mathbf{W}$ não pode ser construída analogamente à abordagem hermitiana) . . . . .	125

4.7	Observação (Projeção Ortogonal com Base Tensorial)	126
-----	--	-----

# Lista de Algoritmos

2.1	Procedimento de polinomialização [19] . . . . .	36
2.2	Procedimento de quadrático-bilinearização [19] . . . . .	38
3.1	Construção da matriz Hessiana reduzida [6, 7] . . . . .	68
3.2	Construção das matrizes de redução de coincidência de multimomentos	69
4.1	Construção das matrizes de redução para coincidência de multimomentos de um sistema MIMO . . . . .	123



# Lista de Símbolos

## Símbolos tipográficos

§ capítulo, seção e subseção

■ fim de demonstração

△ fim de observação ou exemplo

▲ fim de definição

## Símbolos matemáticos

$j$  unidade imaginária

$\mathbf{I}_m$  matriz identidade de ordem  $m$

$\mathbf{O}_{mn}$  matriz de zeros de dimensão  $(m, n)$

$\mathbf{1}_m$  vetor de 1's de dimensão  $m$

$\mathcal{H}$  tensor de ordem  $k > 2$

$\mathbf{A}_s$  notação alternativa para  $(\mathbf{A} - s\mathbf{E})$

$\Lambda(\mathbf{A})$  autovalores de  $\mathbf{A}$

$\mathbf{f}_k$  núcleo de ordem  $k$

$\mathbf{F}_k$  matriz ou vetor de transferência de estados de ordem  $k$

$G_k$  função de transferência de ordem  $k$

$\mathbf{G}_k$  matriz de transição de ordem  $k$

$\ker(\mathbf{A})$  núcleo da matriz  $\mathbf{A}$

$\text{Im}(\mathbf{A})$  imagem da matriz  $\mathbf{A}$

$n$  ordem cheia

$n_r$  ordem reduzida

## Resumo

O propósito desta tese é elaborar técnicas de redução de ordem via Krylov para sistemas quadrático-bilineares MIMO. Esta é uma classe especial de modelos não-lineares que são quadráticos com relação às variáveis de estado e bilinear nas entradas. Para que este objetivo seja alcançado, foi necessário, primeiramente, aprender como sistemas não-lineares gerais podem ser trazidos a este formato. A investigação da teoria de sistemas deste tipo de modelo e de como ele pode ser reduzido via subespaços de Krylov logo se fez necessária, de modo que as técnicas de redução em estado da arte pudessem ser completamente entendidas. Depois disso, esses métodos já existentes foram implementados e sua validade, conferida. Uma comparação entre essas reduções independentes de entrada, e a *decomposição ortogonal própria* (POD), um método já amplamente usado, mas dependente de entradas de treinamento, pode ser feita também. Com a ajuda desta comparação, pode-se ver o porquê de o uso de subespaços de Krylov para aproximar o comportamento de transferência do sistema ser considerado um grande avanço. O passo seguinte foi, então, estender estes conceitos ao caso MIMO, investigando sua teoria e explicando suas complicações. O produto final deste processo foi a elaboração de quatro novas técnicas de redução de ordem para sistemas MIMO. Estes métodos puderam ser testados com a ajuda de dois modelos quadrático-bilineares de benchmark e uma análise extensa pode ser executada. Pode-se checar que a abordagem mais apropriada a processos industriais é a tensorial com interpolação tangencial. Essa técnica foi capaz de entregar modelos reduzidos estáveis e cuja ordem não era tão elevada. Por fim, um resumo de tudo o que foi feito e as conclusões do trabalho foram apresentadas, bem como um panorama do que ainda pode ser feito em trabalhos futuros no campo de redução de ordem de modelos quadrático-bilineares.

## Abstract

The foundation of the present thesis is to elaborate Krylov-based model order reduction techniques for MIMO quadratic-bilinear systems. This is a special class of nonlinear models that are quadratic with respect to the state variables and bilinear on the inputs. In order to achieve this goal, it was necessary to, firstly, learn how general nonlinear systems can be brought to this format. Then, the investigation of the system theory regarding this type of models and how MOR via Krylov subspaces work made themselves necessary, so that the state of the art reduction techniques could be completely understood. Afterwards, these already existing reduction approaches were implemented and put to test in order to check their validity. A comparison between these input-independent reduction techniques and the proper orthogonal decomposition (POD), an already broadly used input-dependent reduction routine for nonlinear systems, was also carried out. With the aid of this comparison, it could be seen why using Krylov subspaces to approximate the transfer behavior of such systems would mean a great advancement. The next step was to extend these concepts into the MIMO case, investigating its system theory and explaining why it is more complicated. The final product of this process was the elaboration of four new reduction approaches for MIMO systems: two of them can bring all the moments of the first two transfer functions of quadratic-bilinear systems to match and the other two make sure that a linear combination of these transfer matrix entries are matched. These approaches could be, then, tested with the help of two quadratic-bilinear benchmark models and an extensive analysis could be carried out. It could be seen that the approach that is most suitable for industrial purposes was the tensor-based technique with tangential interpolation. This reduction method could deliver stable models whose reduced order was not very large. Lastly, a summary of what was done and the conclusions taken from the work were presented, as well as an outlook of what there is more to be done in future works in the field of quadratic-bilinear model order reduction.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>3</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>5</b>
<b>Lista de Teoremas</b>	<b>10</b>
<b>Lista de Algoritmos</b>	<b>11</b>
<b>Resumo</b>	<b>15</b>
<b>Abstract</b>	<b>16</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>21</b>
1.1 Motivação . . . . .	21
1.2 Objetivos da tese . . . . .	22
1.3 Síntese do trabalho . . . . .	23
<b>2 Considerações Preliminares</b>	<b>25</b>
2.1 Princípios Matemáticos . . . . .	25
2.1.1 Produto de Kronecker . . . . .	25

2.1.2	Tensores . . . . .	27
2.2	Uma Representação Diferente de um Sistema Não-Linear . . . . .	32
2.2.1	Procedimento de Polinomialização . . . . .	32
2.2.2	Procedimento de Quadrático-Bilinearização . . . . .	37
2.3	Teoria de Sistemas Quadrático-Bilineares SISO . . . . .	39
2.3.1	Análise Variacional e Modelos em Espaço de Estados Alternativos	39
2.3.2	Abordagem das Exponenciais Crescentes . . . . .	41
2.3.3	Funções de Transferências de Sistemas Quadrático-Bilineares .	44
2.3.4	Uma breve digressão sobre núcleos multivariáveis: De onde eles vêm? . . . . .	48
<b>3</b>	<b>Redução de Ordem de Sistemas Quadrático-Bilineares SISO</b>	<b>51</b>
3.1	Redução de Ordem Projetiva . . . . .	51
3.1.1	Fundamentos da Projeção do Vetor de Estados . . . . .	52
3.1.2	Matrizes Reduzidas de Sistemas Quadrático-Bilineares . . . . .	54
3.1.3	Métodos de Redução Comuns . . . . .	55
3.1.4	Métodos dos Subespaços de Krylov . . . . .	58
3.2	Estado da Arte . . . . .	65
3.2.1	Considerações Preliminares . . . . .	66
3.2.2	Coincidência de Multimomentos . . . . .	69
3.2.3	Coincidência de Momentos Hermitiana . . . . .	70
3.2.4	Uma Breve Discussão Sobre as Técnicas em Estado da Arte .	74
3.3	Exemplos Numéricos . . . . .	75

3.3.1	Escada RC Não-Linear . . . . .	75
3.3.2	Equação de Burgers . . . . .	79
3.3.3	Equação de Chafee-Infante . . . . .	87
3.4	Formulação do Problema . . . . .	91
<b>4</b>	<b>Modelos Quadrático-Bilineares MIMO</b>	<b>93</b>
4.1	Teoria de sistemas de modelos MIMO . . . . .	93
4.1.1	Fundamentos de sistemas QB MIMO . . . . .	94
4.1.2	Funções de Transferência de Sistemas MIMO QB . . . . .	96
4.2	Abordagens de Redução de Ordem de Sistemas QB MIMO . . . . .	100
4.2.1	Primeiras Considerações das Funções de Transferência do Sistema . . . . .	101
4.2.2	Matrizes Reduzidas de Modelos Quadrático-Bilineares MIMO	103
4.2.3	Abordagem Tensorial com Blocos Krylov . . . . .	104
4.2.4	Abordagem Pseudolinear com Blocos Krylov . . . . .	110
4.2.5	Abordagem Tensorial com Direções Tangenciais . . . . .	113
4.2.6	Abordagem Pseudolinear com Direções Tangenciais . . . . .	120
4.2.7	Extensão da Abordagem dos Multimomentos para o Caso MIMO123	
4.3	Sobre as Técnicas Desenvolvidas . . . . .	124
4.3.1	Abordagens Tensoriais . . . . .	124
4.3.2	Abordagens Pseudolineares . . . . .	126
<b>5</b>	<b>Resultados Numéricos</b>	<b>127</b>
5.1	Escada RC Não-Linear MIMO . . . . .	127

5.1.1	Descrição do Modelo . . . . .	127
5.1.2	Abordagens com Blocos de Direção . . . . .	129
5.1.3	Interpolação Tangencial . . . . .	141
5.1.4	Abordagens com Blocos vs. Direções Tangenciais . . . . .	148
5.2	Modelo de FitzHugh-Nagumo . . . . .	150
5.2.1	Descrição do Modelo . . . . .	151
5.2.2	Resultados das Simulações . . . . .	152
5.3	Considerações Gerais . . . . .	159
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>161</b>
6.1	Resumo . . . . .	161
6.2	Conclusões . . . . .	162
6.3	Panorama . . . . .	163
<b>A</b>	<b>Notação</b>	<b>165</b>
A.1	Operadores especiais e símbolos . . . . .	165
A.2	Lista de abreviações . . . . .	165
	<b>Bibliografia</b>	<b>170</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Neste capítulo, uma breve introdução ao tema e aos objetivos deste projeto é apresentada. Primeiramente, uma motivação para redução de ordem de modelos dinâmicos em geral é dada e, depois, os objetivos desta tese em específico são tratados. Por fim, uma breve síntese do trabalho é dada.

### 1.1 Motivação

Simulações numéricas de sistemas dinâmicos constituem um aspecto crucial na modelagem e no controle de fenômenos físicos. Com o passar do tempo e o avançar da tecnologia, torna-se inevitável adotar modelos mais precisos e complexos. O preço a se pagar é, no entanto, o custo computacional relacionado às suas simulações, que podem levar um longo tempo para serem rodadas ou até mesmo serem completamente impraticáveis.

Neste sentido, a redução de ordem (MOR, do inglês *model order reduction*) torna-se uma ferramenta muito importante, já que seu objetivo é reduzir sistemas de ordem alta a modelos menores e, portanto, mais simples de modo tal que eles ainda consigam entregar respostas confiáveis. Deste modo, modelos complexos podem ser executados com mais eficiência, economizando tempo e esforço computacional.

Tipicamente, modelos de grande escala podem ser obtidos pela discretização espacial de equações diferenciais parciais (PDEs). Tais modelos discretizados podem ser obtidos, por exemplo, de um procedimento de elementos finitos. Além disso, a ordem de modelos matemáticos de circuitos elétricos que contêm muitas malhas também pode crescer a estas ordens de grandeza. Um exemplo disso é no desenvolvimento de processadores, onde tais sistemas de alta ordem aparecem com frequência.

Muitas técnicas de MOR que preenchem os requisitos anteriormente citados foram desenvolvidas para sistemas lineares invariantes no tempo (LTI), mas é sabido que nem todos os modelos se comportam dessa maneira. Um dos jeitos para se lidar com sistemas que possuem características não-lineares é a sua linearização. Como toda simplificação, este processo adiciona ao modelo erros que se tornam maiores na medida que a não-linearidade do sistema for mais forte. Além disso, pode ser importante, em certos casos, que o modelo mantenha características que são inerentes a sistemas não-lineares, como a aparição de ciclos limite, por exemplo.

Deve estar evidente, portanto, que desenvolvimento de técnicas que são capazes de lidar com a redução de sistemas não-lineares é necessária. Neste domínio, há alguns campos de pesquisa que trabalham certas classes de sistema de modo a simplificar modelos não-lineares introduzindo erros menores ou até nenhum erro. Este é o caso de sistemas quadrático-bilineares (QB), já que uma grande gama de sistemas não-lineares pode ser trazida a este formato sem a introdução de erros a suas dinâmicas.

Nesta tese, as propriedades principais e a redução de ordem de sistemas quadrático-bilineares são apresentadas. Isso representa não só uma grande melhora na performance de simulações confiáveis e rápidas com sistemas de não-linearidade acentuada, mas também na compreensão de seus comportamentos.

## 1.2 Objetivos da tese

Esta tese é focada no estudo de sistemas quadrático-bilineares e em como eles podem ser reduzidos. Além disso, a extensão de métodos de redução que já existem também

é um dos principais objetivos. Em particular, a expansão dos métodos de redução via subespaços de Krylov para o caso MIMO, que não havia sido tratado até o presente trabalho, é de sumo interesse. Os problemas computacionais e as particularidades que se relacionam à implementação destes conceitos também serão discutidos.

Não menos importante é a investigação da teoria por trás destes sistemas e como ela pode ser interpretada. Neste sentido, este trabalho também pode servir como base para desenvolvimentos futuros nesta área.

## 1.3 Síntese do trabalho

Esta última seção do primeiro capítulo é dedicada à descrição do que cada capítulo do relatório contém.

O segundo capítulo desta tese trata dos conhecimentos preliminares que precisam ser apresentados e consolidados antes de abordar o problema de redução de ordem de sistemas QB em si. Isso contempla os princípios e operações matemáticas que são usados extensivamente ao longo deste trabalho, bem como a maneira na qual sistemas não-lineares gerais podem ser trazidos à forma QB e a teoria de sistemas por trás dessa classe de sistemas no caso SISO.

O terceiro capítulo, redução de ordem (MOR) de sistemas QB SISO via subespaços de Krylov é estudada. Nele, uma explicação geral de como este tipo de MOR funciona e uma comparação deste com outras modalidades de MOR serão vistas. Depois, as técnicas em estado da arte são descritas e testadas, enfatizando suas qualidades e limitações. Elas também são ilustradas com a ajuda de exemplos numéricos e aplicados a sistemas de benchmark: escada RC não-linear, equação de Burgers e a equação de Chaffee-Infante. Uma vez vistas suas características, a formulação exata do problema poderá ser feita.

No capítulo 4, tudo o que foi implementado e explicado para sistemas SISO é expandido ao caso MIMO. A teoria de sistemas e redução de ordem de plantas quadrático-

bilineares MIMO, que são os principais produtos deste trabalho, são os aspectos mais relevantes cobertos neste capítulo. Uma breve discussão com respeito aos pontos fortes e fracos destas novas técnicas também é dada na última seção deste capítulo, comparando as abordagens tensorial e pseudolinear separadamente.

No capítulo de número 5, uma extensiva análise de todos os métodos de redução desenvolvidos é dada por meio de resultados numéricos. A fim de usar os métodos desenvolvidos, o modelo da escada RC precisou ser adaptado ao caso MIMO e o modelo de FitzHugh-Nagumo foi usado, ilustrando os resultados desta tese. Estes resultados também servem como análise das vantagens e desvantagens de cada uma das técnicas de uma maneira experimental.

O sexto e último capítulo contempla as observações finais do trabalho. Um resumo de todo o período da tese, as conclusões advindas de seu desenvolvimento e um panorama para trabalhos futuros são finalmente dados.

# Capítulo 2

## Considerações Preliminares

Neste capítulo, as considerações preliminares à redução de ordem de sistemas quadrático-bilineares são descritas.

Primeiramente, os princípios matemáticos que são usados de maneira particularmente frequente nesta tese são abordados. Depois, a teoria de sistemas é desenvolvida com a ajuda dos conceitos previamente estabelecidos. Ademais, uma explicação de redução de ordem (MOR) projetiva é dada, o que leva aos métodos que já estavam disponíveis no momento em que esta tese começou a ser escrita sob a denominação “Estado da Arte”.

### 2.1 Princípios Matemáticos

Ainda antes de entrar diretamente a teoria de sistemas, que consegue explicar os fenômenos em MOR, é necessário ter alguns conceitos matemáticos em mente.

#### 2.1.1 Produto de Kronecker

O produto de Kronecker é uma operação definida para qualquer par de matrizes sem restrição. Como ele é extensivamente usado ao longo deste relatório, algumas

considerações sobre ele devem ser feitas para um bom entendimento dos cálculos e derivações que virão. Ao fim desta seção, é possível encontrar exemplos notáveis de usos do produto de Kronecker e seus corolários. Contudo, é necessário iniciar com a definição rigorosa desta operação.

**Definição 2.1** (Produto de Kronecker [1, 23]). Sejam  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times q}$  matrizes. O produto de Kronecker  $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \in \mathbb{R}^{mp \times nq}$  entre elas é definido como

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = (a_{ij} \cdot \mathbf{B}) = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

▲

*Exemplo 2.1* (Produto de Kronecker de uma matriz identidade com uma arbitrária). Seja  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  uma matriz,  $\mathbf{I}_m$  a matriz identidade de ordem  $m$  e  $\mathbf{O}_{mn} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  uma matriz de zeros.

$$(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \dots & \mathbf{O}_{mn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O}_{mn} & \dots & \mathbf{A} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

△

*Exemplo 2.2* (Produto de Kronecker de um vetor com ele mesmo). Seja  $\mathbf{x}$  um vetor de monômios de primeira ordem com  $n$  entradas  $x_i$ , com  $i = 1, \dots, n$ . O produto de

Kronecker  $(\mathbf{x} \otimes \mathbf{x})$  é um vetor com todas as possíveis combinações de monômios de segunda ordem formadas pelos elementos de  $\mathbf{x}$ .

$$(\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \mathbf{x} \\ x_2 \mathbf{x} \\ \vdots \\ x_n \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 \\ x_1 x_3 \\ \vdots \\ x_n x_{n-1} \\ x_n^2 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

△

Uma das propriedades mais importantes do produto de Kronecker é uma que diz respeito à multiplicação de matrizes, como representado pela equação (2.4).

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{AC}) \otimes (\mathbf{BD}) \quad (2.4)$$

### 2.1.2 Tensores

Tensores são nada mais do que a extensão natural do conceito de matriz. Enquanto uma matriz pode ser interpretada como uma concatenação de vetores, um tensor pode ser visto como uma composição de matrizes. [23]

Para ilustrar este conceito, Fig. 2.1 mostra uma comparação entre essas entidades matemáticas.

Em realidade, qualquer uma das entidades da Fig. 2.1 podem ser chamados de tensores. A única diferença entre elas jaz em suas ordens: um vetor é um tensor de ordem 1, uma matriz é um tensor de ordem 2 e o elemento mais à direita é um tensor de

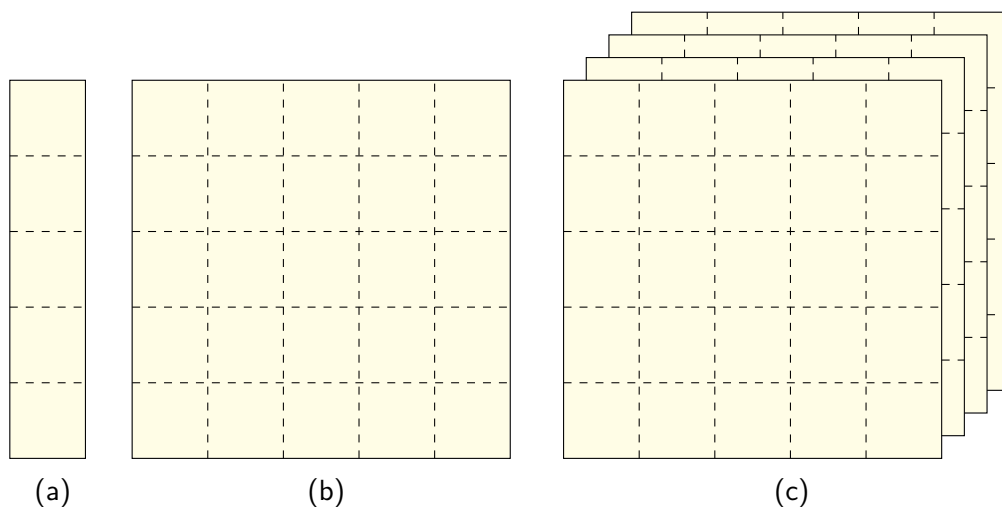


Figura 2.1: Comparação esquemática de vetor (a), matriz (b) e tensor (c).

ordem 3. Com isso em mente, torna-se possível escrever a definição de um tensor, obtido originalmente de [24].

**Definição 2.2** (Tensor). Um tensor  $\mathcal{X}$  de ordem  $d$  e tamanho  $n_1 \times \dots \times n_d$  é uma série ordenada de dimensão  $d$  e entradas  $\mathcal{X}_{i_1, \dots, i_d}$ , onde  $i_\mu \in \{1, \dots, n_\mu\}$  para todo  $\mu = 1, \dots, d$ . ▲

Em outras palavras, um tensor  $\mathcal{X}$  é um elemento do conjunto  $\mathbb{R}^{n_1 \times \dots \times n_d}$  e cada uma de suas entradas pode ser representada por  $\mathcal{X}_i$ , com  $i \in \mathcal{I} = \{1, \dots, n_1\} \times \dots \times \{1, \dots, n_d\}$  com  $i = (i_1, \dots, i_d)$  uma  $d$ -upla.

A Definição 2.2 descreve a formulação geral de um tensor. Contudo, serão de interesse somente tensores de ordem até 3, i.e., escalares, vetores, matrizes e tensores de terceira ordem. Deste modo, todas as referências a tensores deste ponto para frente neste relatório serão relacionados aos de ordem 3.

Além disso, é possível definir operadores tensoriais. De maior importância são as operações básicas de adição e multiplicação por escalar, seguindo as relações seguintes [24]:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{X} + \mathcal{Y} \iff \mathcal{Z}_i = \mathcal{X}_i + \mathcal{Y}_i, \quad \text{para } \mathcal{Z}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}} \quad (2.5)$$

$$\mathcal{Z} = \alpha \cdot \mathcal{X} \iff \mathcal{Z}_i = \alpha \cdot \mathcal{X}_i \quad \text{para } \mathcal{Z}, \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}, \alpha \in \mathbb{R} \quad (2.6)$$

Isso significa que a adição entre dois tensores e a multiplicação de um tensor por um escalar são feitas elemento a elemento.

Contudo algumas outras operações têm definições menos diretas. Esse é o caso com a multiplicação de tensores, que necessita, por sua vez, da definição de um outro operador: a *matricization*.

Para definir este operador, é necessário imaginar o tensor em termos de suas fibras de modo  $\mu$ . No caso de um tensor de terceira ordem, as colunas representam as fibras de modo 1. De maneira similar, as fibras de modo 2 são as linhas e as de modo 3, as que vão na direção da profundidade do tensor.

A Fig. 2.2 mostra a disposição das fibras de um tensor de ordem 3.

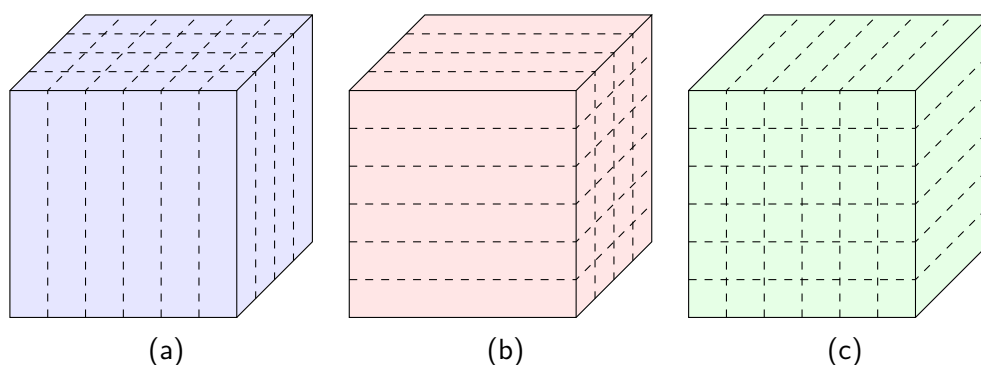


Figura 2.2: Esquemas das fibras de modos 1 (a), 2 (b), e 3 (c) de um tensor.

**Definição 2.3** (*Matricization* de modo  $\mu$  de um tensor [6, 23]). Seja  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$  um tensor de ordem 3. Sua *matricization* de modo  $\mu$   $\mathbf{X}^{(\mu)} \in \mathbb{R}^{n_\mu \times \frac{(n_1 n_2 n_3)}{n_\mu}}$  é definida como a concatenação de cada uma destas fibras de modo  $\mu$  em formas de coluna. ▲

A fim de clarificar esta definição, o exemplo de um tensor e suas 3 *matricizations* diferentes é dado.

*Exemplo 2.3* (As *matricizations* de um tensor de terceira ordem). Seja dado  $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{3 \times 3 \times 2}$  como representado pelas duas camadas que seguem:

$$\mathcal{H}_{(:, :, 1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \mathcal{H}_{(:, :, 2)} = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \end{bmatrix}$$

- *matricization 1*

$$\mathbf{H}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 5 & 6 & 13 & 14 & 15 \\ 7 & 8 & 9 & 16 & 17 & 18 \end{bmatrix}$$

- *matricization 2*

$$\mathbf{H}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & 16 \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & 17 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}$$

- *matricization 3*

$$\mathbf{H}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 3 & 6 & 9 \\ 10 & 13 & 16 & 11 & 14 & 17 & 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}$$

△

**Corolário 2.1** (*Matricizations* de um vetor). Se um vetor  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  é visto como um tensor  $\mathcal{Z} \in \mathbb{R}^{n \times 1 \times 1}$ , então suas representações de modo 2 e 3 são iguais a  $\mathbf{z}^T$ .

*Observação 2.1* (Soma das *matricizations* de tensores). Se um tensor  $\mathcal{Z}$  pode ser representado pela soma de outros dois, a saber  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$ , suas *matricizations* de modo  $\mu$  também podem ser representadas pelas somas das *matricizations*  $\mu$  de  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$ .

$$\mathcal{Z} = \mathcal{X} + \mathcal{Y} \iff \mathbf{Z}^{(\mu)} = \mathbf{X}^{(\mu)} + \mathbf{Y}^{(\mu)} \quad (2.7)$$

△

Tendo definido as *matricizations*  $\mu$  de uma matriz, é possível definir o conceito de multiplicação de tensores [6, 23].

**Definição 2.4** (Multiplicação de tensores matricial de modo  $\mu$ ). Sejam  $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$  um tensor de terceira ordem e  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{r \times n_\mu}$  uma matriz. O tensor  $\mathcal{Y}$  resultante da multiplicação matricial de modo  $\mu$  de  $\mathbf{U}$  com  $\mathcal{H}$  é definido na equação (2.8).

$$\mathcal{Y} = \mathcal{H} \times_\mu \mathbf{U} \iff \mathbf{Y}^{(\mu)} = \mathbf{U}\mathbf{H}^{(\mu)} \quad (2.8)$$

▲

**Corolário 2.2** (*Matricizations* de um tensor definido por uma multiplicação matricial [6, 23]). Sejam  $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$  um tensor de terceira ordem e  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{r_1 \times n_1}$ ,  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{r_2 \times n_2}$  e  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{r_3 \times n_3}$  matrizes, o produto  $\mathcal{Y} = \mathcal{H} \times_1 \mathbf{U} \times_2 \mathbf{V} \times_3 \mathbf{W} \in \mathbb{R}^{r_1 \times r_2 \times r_3}$  pode ser interpretado como nas equações (2.9) a (2.11).

$$\mathbf{Y}^{(1)} = \mathbf{U}\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{W}^T \otimes \mathbf{V}^T) \quad (2.9)$$

$$\mathbf{Y}^{(2)} = \mathbf{V}\mathbf{H}^{(2)}(\mathbf{W}^T \otimes \mathbf{U}^T) \quad (2.10)$$

$$\mathbf{Y}^{(3)} = \mathbf{W}\mathbf{H}^{(3)}(\mathbf{V}^T \otimes \mathbf{U}^T) \quad (2.11)$$

**Corolário 2.3** (Tensores simétricos). Sejam  $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{n \times n \times n}$  um tensor simétrico de terceira ordem, i.e., suas *matricizations* de modos 2 e 3 são iguais, e  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  vetores. É válido que o produto de Kronecker destes vetores multiplicado pela *matricization* de modo 1 é comutativa, como representado na equação (2.12).

$$\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) \quad (2.12)$$

Com estas considerações matemáticas, torna-se possível tratar o processo de quadrático-bilinearização e a teoria de sistemas com mais detalhes.

## 2.2 Uma Representação Diferente de um Sistema Não-Linear

Como já mencionado em capítulos anteriores, sistemas quadrático-bilineares podem reproduzir, sem nenhum erro, o comportamento de uma grande gama de sistemas não-lineares. Para ser mais preciso, qualquer sistema que contém não-linearidades cujas derivadas são contínuas podem ser reescrito em termos quadrático-bilineares, como em (2.13) e (2.14):

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{H}(\mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t)) + \sum_{j=1}^m \mathbf{N}_j \mathbf{x}(t) u_j(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.13)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (2.14)$$

Gu [19] desenvolveu uma maneira algorítmica para se fazer este procedimento, que pode ser dividido em dois estágios: os processos de polinomialização e de quadrático-bilinearização. É necessário apontar que é somente preciso capturar a essência de tais métodos e que este relatório não os contempla com a exaustividade e a minúcia de Gu.

### 2.2.1 Procedimento de Polinomialização

A fim de se trazer o sistema não-linear à forma quadrático-bilinear, é necessário representá-lo, em primeiro lugar, na forma polinomial. A técnica utilizada para tal é bastante simples, mas tem a desvantagem de adicionar mais equações diferenciais ao sistema.

Seja descrito um sistema não-linear que é linear em suas entradas e saídas por (2.15) and (2.16):

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.15)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (2.16)$$

Para um grande conjunto de funções não-lineares  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ , cada linha do sistema de equações diferenciais ordinárias (ODE) pode ser reescrita, substituindo a não-linearidade por uma combinação linear de um conjunto de funções elementares, como em (2.17).

$$\mathbf{e}_i \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}_{i,0}^T \mathbf{x} + a_{i,1} g_1(\mathbf{x}) + a_{i,2} g_2(\mathbf{x}) + \cdots + a_{i,k} g_k(\mathbf{x}) + \mathbf{b}_i \mathbf{u}, \quad \forall i \quad (2.17)$$

O objetivo do procedimento de polinomialização é trazer esse conjunto de equações não-lineares à forma polinomial, como de acordo em Definição 2.5 [19].

**Definição 2.5** (Sistema polinomial). Um sistema é dito polinomial se todos os seus termos são polinomiais com respeito às suas variáveis de estado (i.e., se todas as suas não-linearidades forem polinomiais) e lineares com respeito às entradas. ▲

*Exemplo 2.4* (Sistema polinomial). O sistema  $\dot{x} = x^3 + x^2 u$  é polinomial, mas os sistemas  $\dot{x} = x^3 + x u^2$  e  $\dot{x} = \cos(x^3) + x^2 u$  não são. △

Há duas abordagens para se polinomializar um sistema não-linear: adicionando-se equações algébricas polinomiais ou utilizando a derivada de Lie [19]. O primeiro método consegue lidar com apenas um conjunto restrito de não-linearidades, enquanto o segundo é capaz de polinomializar um espectro maior de sistemas. Este, portanto, será o foco dos esforços que seguem.

O procedimento pode ser resumido a três passos [19]:

1. introduzir uma nova variável de estado  $v_i = g_i(\mathbf{x})$ ;
2. substituir  $g_i(\mathbf{x})$  por  $v_i$  nas equações originais;

3. adicionar  $\dot{v}_i = \frac{dg_i}{dx} \dot{\mathbf{x}}$  como uma equação diferencial polinomial nova, onde  $\frac{dg_i}{dx}$  consiste em funções polinomiais de  $\mathbf{x}$  e  $v$ .

As equações diferenciais resultantes são, portanto:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_i = \mathbf{a}_{i,0}^T \mathbf{x} + a_{i,1} v_1 + \cdots + a_{i,k} v_k + \mathbf{b}_i \mathbf{u} \quad (2.18)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v}_i = \mathcal{L}_{\dot{\mathbf{x}}} g_i(\mathbf{x}) = \frac{dg_i(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} (\mathbf{a}_{i,0}^T \mathbf{x} + a_{i,1} v_1 + \cdots + a_{i,k} v_k + \mathbf{b}_i \mathbf{u}), \quad (2.19)$$

onde  $\mathcal{L}_{\alpha(x)} \beta(x) = \frac{d\beta(x)}{dx} \cdot \alpha(x)$  denota a derivada de Lie. Exemplo 2.5 ilustra como algumas não-linearidade contínuas podem ser polinomializadas via derivação com respeito à sua variável de posição  $x$ .

*Exemplo 2.5* (Polinomialização de algumas não-linearidades). Os pontos que seguem apresentam algumas não-linearidades comuns que podem ocorrer em sistemas dinâmicos e como suas derivadas no espaço podem ser representadas na forma polinomial.

- $e^{\alpha x}$  (Curva corrente-tensão típica de um diodo) [19]:

$$v = e^{\alpha x} \Rightarrow v' = \alpha e^{\alpha x} = \alpha v \quad (2.20)$$

- $\frac{1}{x+k}$  [19]:

$$v = \frac{1}{x+k} \Rightarrow v' = -\frac{1}{(x+k)^2} = -v^2 \quad (2.21)$$

- $x^\alpha$  (Partindo de um monômio de ordem  $n$  a um de ordem 2) [19]:

$$v_1 = x^\alpha \Rightarrow v_1' = \alpha x^{\alpha-1} = \alpha v_1 \underbrace{x^{-1}}_{v_2} = \alpha v_1 v_2 \quad (2.22)$$

$$v_2 = x^{-1} \Rightarrow v_2' = -x^{-2} = -v_2^2 \quad (2.23)$$

- $\ln(x)$  [19]:

$$v_1 = \ln(x) \Rightarrow v_1' = x^{-1} = v_2 \quad (2.24)$$

$$v_2 = x^{-1} \Rightarrow v_2' = -x^{-2} = -v_2^2 \quad (2.25)$$

- $\tan^{-1}(kx)$  (Pode representar uma curva de saturação):

$$v_1 = \tan^{-1}(kx) \Rightarrow v_1' = \frac{k}{\underbrace{k^2x^2 + 1}_{v_2}} \quad (2.26)$$

$$v_2 = \frac{k}{k^2x^2 + 1} \Rightarrow v_2' = -\frac{2k^3x}{((kx)^2 + 1)^2} = -2kxv_2^2 \quad (2.27)$$

△

E, para ilustrar como essas derivadas podem ser utilizadas no processo de polinomialização como um todo, o Exemplo 2.6 é desenvolvido [19].

*Exemplo 2.6* (Procedimento de polinomialização). Considere a ODE que segue:

$$\dot{x} = \frac{1}{1 + e^x} \quad (2.28)$$

É possível polinomializá-la introduzindo as novas variáveis:

$$v_2 = e^x \quad (2.29)$$

$$v_1 = \frac{1}{1 + v_2} \quad (2.30)$$

e determinar suas respectivas derivadas com respeito ao tempo:

$$\dot{x} = v_1 \quad (2.31)$$

$$\dot{v}_1 = -v_1^2 \dot{v}_2 = -v_2 v_1^3 \quad (2.32)$$

$$\dot{v}_2 = v_2 \dot{x} = v_2 v_1 \quad (2.33)$$

△

O Algoritmo 2.1 mostra a polinomialização de ODEs não-lineares de uma maneira simples e metódica.

---

**Algoritmo 2.1:** Procedimento de polinomialização [19]

---

**Entrada:**  $\mathbf{X} = [\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n]$ , a lista de expressões simbólicas das ODEs

**Saída:**  $\mathbf{Y}_{var}$ , o conjunto de novas variáveis;  $\mathbf{Y}_{expr}$ , o conjunto de expressões para as novas variáveis;  $\mathbf{X}$ , o conjunto de expressões simbólicas das novas ODEs.

1 **inicio**

2     Inicializar  $\mathbf{Y}_{var} \leftarrow \{\}$ ,  $\mathbf{Y}_{expr} \leftarrow \{\}$ ;

3     **enquanto** há em  $\mathbf{X}$  pelo menos uma função não-polinomial de  $\mathbf{x}$  ou de qualquer uma das variáveis em  $\mathbf{Y}_{var}$  **faça**

4         Pegue de  $\mathbf{X}$  uma função não linear  $g(\mathbf{x})$  que não é uma função polinomial de  $\mathbf{x}$ ;

5         Defina uma nova variável de estado  $v = g(\mathbf{x})$ ;

6         Adicione  $v$  a  $\mathbf{Y}_{var}$  e  $g(\mathbf{x})$  a  $\mathbf{Y}_{expr}$ ;

7         Calcule a expressão simbólica de  $\dot{v} = \frac{dg}{d\mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}$ ;

8         Adicione a expressão simbólica de  $\dot{v}$  a  $\mathbf{X}$ ;

9         Em  $\mathbf{X}$ , substitua as ocorrências das expressões em  $\mathbf{Y}_{expr}$  pelas variáveis correspondentes em  $\mathbf{Y}_{var}$ ;

---

*Observação 2.2* (Sobre a não-unicidade do procedimento de polinomialização). É importante ressaltar que esse processo não é único e diferentes substituições podem levar a diferentes representações do sistema e a diferentes quantidades de equações diferenciais ao final do processo.  $\triangle$

*Observação 2.3* (Uma condição necessária para a equivalência das formas polinomial e original). Também relevante é o fato de que os sistemas original e polinomial têm a mesma dinâmica, i.e., para uma dada entrada, a mesma saída é esperada. Entretanto, é necessário ajustar as condições iniciais do sistema, uma vez que o número de variáveis de estado cresceu. Antes da polinomialização, o vetor de condições iniciais era simplesmente  $\mathbf{x}(0)$ , ao passo que, depois do procedimento, tornou-se  $[\mathbf{x}^T(0) \ \mathbf{v}^T(0)] = [\mathbf{x}^T(0) \ \mathbf{g}^T(\mathbf{x}(0))]$ .  $\triangle$

*Observação 2.4* (Polinomialização de funções compostas [19]). Uma composição de funções também pode ser transformada em expressões polinomiais segundo este pro-

cedimento. Por exemplo, a composição  $(g_1 \circ g_2)(\mathbf{x}) = g_1(g_2(\mathbf{x}))$  pode ser substituída introduzindo as variáveis  $v_2 = g_2(\mathbf{x})$  e  $v_1 = g_1(v_2)$ .  $\Delta$

### 2.2.2 Procedimento de Quadrático-Bilinearização

Com o sistema polinomial em mãos, é possível representá-lo de forma quadrático-bilinear. De maneira similar ao procedimento feito em § 2.2.1, a ideia é substituir as expressões cujas ordens são maiores que dois por uma nova variável de estado e adicioná-la ao conjunto inicial de equações.

Para que esse método possa ser melhor demonstrado e ilustrado, o Exemplo 2.7 é feito.

*Exemplo 2.7* (Procedimento de quadrático-bilinearização). Seja o sistema em (2.34) polinomial.

$$\dot{x} = x^3 + u \quad (2.34)$$

Substituindo-se sua variável de terceira ordem, é possível reescrever o sistema.

$$v = x^2 \quad (2.35)$$

$$\dot{x} = xv + u \quad (2.36)$$

$$\dot{v} = 2x(xv + u) = 2x^2v + 2xu = 2v^2 + 2xu \quad (2.37)$$

Definindo-se o vetor de estado como  $\mathbf{x} = [x \ v]^T$ , é possível trazer o sistema à forma quadrático-bilinear, como na equação (2.13).

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{bmatrix} x^2 \\ xv \\ xv \\ v^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} u + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u \quad (2.38)$$

Assim, o sistema pode ser representado como quadrático-bilinear.  $\triangle$

*Observação 2.5* (Sobre a não-unicidade da matriz Hessiana). É digno de nota mencionar que há infinitas representações para o mesmo sistema quadrático-bilinear, uma vez que a matriz  $\mathbf{H}$  (Hessiana) não é única. No Exemplo 2.7, a matriz Hessiana pode ser escrita de qualquer outro modo desde que  $h_{12} + h_{13} = 1$  e  $h_{22} + h_{23} = 0$ , onde  $h_{ij}$  denotam os elementos na  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna da matriz  $\mathbf{H}$ .  $\triangle$

Então, o Algoritmo 2.2 pode ser escrito, generalizando os passos feitos em Exemplo 2.7 de maneira metódica.

---

**Algoritmo 2.2:** Procedimento de quadrático-bilinearização [19]

---

**Entrada:**  $\mathbf{X} = [\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n]$ , a lista de expressões simbólicas das ODEs

**Saída:**  $\mathbf{Y}_{var}$ , o conjunto de novas variáveis;  $\mathbf{Y}_{expr}$ , o conjunto de expressões das novas variáveis;  $\mathbf{X}$ , a lista de expressões simbólicas das ODEs polinômiais.

**1 início**

2 Inicialize  $\mathbf{Y}_{var} \leftarrow \{\}$ ,  $\mathbf{Y}_{expr} \leftarrow \{\}$ ;

3 **enquanto** há em  $\mathbf{X}$  pelo menos um termo não-linear ou não-quadrático de  $\mathbf{x}$  ou de qualquer outra variável em  $\mathbf{Y}_{var}$  **faça**

4     Pegue um monômio  $m(\mathbf{x})$  de  $\mathbf{X}$  com grau maior que 2;

5     Ache uma decomposição de  $m(\mathbf{x})$ , i.e., ache  $g(\mathbf{x})$  e  $h(\mathbf{x})$  que satisfaçam  $m(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \times h(\mathbf{x})$ ;

6     Defina uma nova variável de estado  $v = g(\mathbf{x})$ ;

7     Adicione  $v$  a  $\mathbf{Y}_{var}$  e  $g(\mathbf{x})$  a  $\mathbf{Y}_{expr}$ ;

8     Compute a expressão simbólica de  $\dot{v} = \frac{dg}{d\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}$ ;

9     Adicione a expressão simbólica de  $\dot{v}$  a  $\mathbf{X}$ ;

10    **para todos os monômios**  $m(\mathbf{x})$  **faça**

11        **se**  $m(\mathbf{x})$  é linear ou quadrático em termos de  $\mathbf{x}$  ou de qualquer outra variável em  $\mathbf{Y}_{var}$  **então**

12            Substitua  $m(\mathbf{x})$  como um termo linear ou quadrático;

---

## 2.3 Teoria de Sistemas Quadrático-Bilineares SISO

A descrição de qualquer sistema dinâmico é feita por uma de duas maneiras: modelos em espaço de estados ou em função de transferência. Sob qualquer modalidade, é importante estudar como esses modelos funcionam e como eles são derivados, de modo a poder desenvolver métodos de redução de ordem que são não somente factíveis, mas também plausíveis.

Com este propósito, a teoria de sistemas de modelos não-lineares gerais é explicada nesta seção, seguido de aplicações em modelos quadrático-bilineares.

### 2.3.1 Análise Variacional e Modelos em Espaço de Estados Alternativos

O modelo em espaço de estados generalizado de sistemas quadrático-bilineares já foi mostrado na equação (2.13). Contudo, os métodos desenvolvidos até a confecção deste trabalho foram feitos apenas para sistemas SISO. Deste modo, o foco é, primeiramente, saber como eles funcionam, para depois abordar sistemas MIMO em um capítulo futuro.

As equações (2.39) e (2.40) mostram sistemas QB SISO convencionais.

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{H}(\mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t)) + \mathbf{N}\mathbf{x}(t)u(t) + \mathbf{b}u(t) \quad (2.39)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \quad (2.40)$$

Há, no entanto, uma outra maneira de representar tais sistemas em espaço de estados, que se provará útil para demonstrações futuras, em particular quando a série de funções de transferência destes sistemas foi derivada. Esta outra representação é obtida via análise variacional, que quebra a representação convencional em uma série de subsistemas cuja soma comporá a resposta total do modelo a uma dada entrada.

A ideia principal deste procedimento é assumir que a resposta do sistema a uma entrada de forma  $\alpha u(t)$  possa ser escrita em termos de uma soma de sub-respostas  $\alpha^i \mathbf{x}_i$  [4, 6, 7, 15, 19, 30], como a seguir [31, §3.4]

$$\mathbf{x}(t) = \alpha \mathbf{x}_1 + \alpha^2 \mathbf{x}_2 + \alpha^3 \mathbf{x}_3 + \dots \quad (2.41)$$

E, substituindo esta expressão na equação (2.39) e comparando seus termos com potências iguais de  $\alpha$ , pode-se obter as equações diferenciais descritas na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Equações variacionais obtidas comparando-se potências iguais de  $\alpha$ .

Potência de $\alpha$	Equação Diferencial
$\alpha^1$	$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{b}u(t)$
$\alpha^2$	$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{H}(\mathbf{x}_1(t) \otimes \mathbf{x}_1(t)) + \mathbf{N}\mathbf{x}_1(t)u(t)$
$\alpha^k, k \geq 3$	$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}_k(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_k(t) + \sum_{\substack{i,j \geq 1 \\ i+j=k}} \mathbf{H}(\mathbf{x}_i(t) \otimes \mathbf{x}_j(t)) + \mathbf{N}\mathbf{x}_{k-1}(t)u(t)$

A representação obtida tomando-se todas as infinitas equações variacionais na Tabela 2.1 ([31, §3.4] e [7]) dá uma alternativa exata à primeira equação em (2.39). Como se pode ver, as equações variacionais são uma maneira muito menos prática de descrever um sistema QB. Apesar disso, elas são úteis, para se derivar as funções de transferência do sistema.

*Observação 2.6* (O significado das equações variacionais e de suas respostas). É possível notar que o primeiro subsistema depende linearmente da entrada e consiste, portanto, em um sistema linear comum. O segundo, entretanto, deve ser analisado com mais atenção.

O termo bilinear deste subsistema,  $\mathbf{N}\mathbf{x}_1(t)u(t)$ , é composto por uma multiplicação de  $\mathbf{x}_1(t)$ , que depende linearmente de  $u(t)$ , e  $u(t)$  propriamente. Isso implica que este termo depende de uma certa maneira quadraticamente da entrada. O mesmo acontece com o termo quadrático,  $\mathbf{H}(\mathbf{x}_1(t) \otimes \mathbf{x}_1(t))$ , que depende quadraticamente de  $\mathbf{x}_1(t)$  e, portanto, da entrada também.

Esta interpretação é relevante, pois ela explica o porquê de o segundo subsistema reagir a uma entrada  $\alpha u(t)$  com a resposta  $\alpha^2 \mathbf{x}_2(t)$ , como estabelecido como uma premissa da análise variacional.

Tal análise pode ser analogamente estendida para todos os subsistemas de ordem superior remanescentes. △

### 2.3.2 Abordagem das Exponenciais Crescentes

Funções de transferência são uma maneira de representar o comportamento entrada-saída de um sistema. Ela é definida, geralmente, como a transformada de Laplace da saída do sistema sobre a transformada de Laplace de sua respectiva entrada, como descrito na equação (2.42).

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}(y(t))}{\mathcal{L}(u(t))} = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (2.42)$$

Outro conceito interessante é a função de transferência dos estados, onde a saída é substituída pelo vetor de estados  $\mathbf{x}(t)$  do modelo.

Em se falando de subsistemas de ordem superior, como obtidos pelas equações variacionais, a definição deste conceito diverge da clássica. Isso ocorre, pois essas funções têm que levar os expoentes de  $\alpha$  em consideração, de modo que possam representar respostas adequadas do sistema em questão.

Torna-se necessário, então, adaptar este conceito, analisando seus fundamentos. Uma maneira de fazê-lo é com a abordagem de exponenciais crescentes.

### Núcleo monovariável

Para que se possa entender este método completamente, assume-se um sistema não-linear homogêneo de núcleo  $\mathbf{f}_1(t)$ , de modo que a resposta de seus estados  $\mathbf{x}_1(t)$  a uma certa entrada  $u(t)$  seja dada por [31, §1.1] na seguinte equação:

$$\mathbf{x}_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_1(\sigma)u(t - \sigma)d\sigma \quad (2.43)$$

Se a entrada for uma exponencial crescente, i.e.  $u(t) = e^{\lambda t}$ ,  $\lambda > 0$ , e  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ,  $t < 0$ , tem-se a relação (2.44).

$$\mathbf{x}_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_1(\sigma)e^{\lambda(t-\sigma)}d\sigma = \underbrace{\int_0^{\infty} \mathbf{f}_1(\sigma)e^{-\lambda\sigma}d\sigma}_{\mathcal{L}(\mathbf{f}_1(t))=\mathbf{F}_1(\lambda)} \cdot e^{\lambda t} = \mathbf{F}_1(\lambda) \cdot e^{\lambda t} \quad (2.44)$$

Assim, é possível obter a função de transferência dos estados de um dado sistema analisando-se sua resposta a uma exponencial crescente [31, §2.4].

*Observação 2.7* (Resposta a uma soma de exponenciais). Se, ao invés disso, a entrada for a soma de exponenciais crescentes  $u(t) = \sum_{i=1}^k e^{\lambda_i t}$ , então, segundo [31, §2.4], a resposta dos estados terá a forma

$$\mathbf{x}_1(t) = \sum_{i=1}^k \mathbf{F}_1(\lambda_i) \cdot e^{\lambda_i t} \quad (2.45)$$

△

### Núcleo multivariável

No caso de sistemas não-lineares e, em especial, quadrático-bilineares, núcleos monovariáveis não são suficientes para representar toda a resposta dinâmica do sistema a uma entrada. Logo o uso de núcleos multivariáveis. Eles são obtidos dos subsistemas de ordem superior que a Tabela 2.1 mostra. Entretanto, não é de interesse desta tese chegar aos núcleos em si, mas somente em suas transformadas de Laplace ou, em outras palavras, suas funções de transferência.

Para a resposta temporal de  $n$ -ésima ordem, obtém-se a equação (2.46) [31, §2.4].

$$\mathbf{x}_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_k(\sigma_1, \dots, \sigma_k) \cdot u(t - \sigma_1) \dots u(t - \sigma_k) \cdot d\sigma_1 \dots d\sigma_k \quad (2.46)$$

No entanto, fixar a entrada  $u(t) = e^{\lambda t}$  não é suficiente para se descrever o sistema como um todo no domínio da frequência, uma vez que a resposta no tempo seria da forma  $\mathbf{x}_k(t) = \mathbf{F}_k(\lambda, \dots, \lambda) \cdot e^{k\lambda t}$ . É possível notar que a função de transferência de  $k$ -ésima ordem depende de somente uma variável, e não de  $k$ , como se pode esperar. Neste sentido, deve-se ter uma soma de exponenciais crescentes de modo a garantir que a transformada de Laplace do núcleo deste sistema dependa do número certo de variáveis.

Por motivos de simplicidade, o único subsistema de ordem superior que será tratado neste relatório é o segundo. A justificativa e a validade desta simplificação ainda será discutida em capítulos futuros, mas é suficiente saber, por ora, que as únicas funções de transferência relevantes ao problema são as duas primeiras.

Tomando, então, o segundo subsistema e aplicando-lhe a entrada  $u(t) = e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}$ , pode-se chegar às relações que seguem:

$$\mathbf{x}_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_2(\sigma_1, \sigma_2) \prod_{j=1}^2 [e^{\lambda_1(t-\sigma_j)} + e^{\lambda_2(t-\sigma_j)}] d\sigma_1 d\sigma_2 \quad (2.47)$$

$$= \sum_{k_1=1}^2 \sum_{k_2=1}^2 \mathbf{F}_2(\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}) \exp\left(\sum_{j=1}^2 \lambda_{k_j} t\right) \quad (2.48)$$

Mesmo que a equação (2.48) possa parecer complicada, ela não diz nada mais de que a função de transferência simétrica de segunda ordem, ou seja,  $\mathbf{F}_2(\lambda_1, \lambda_2)$ , corresponde aos coeficientes que multiplicam o termo  $e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}$  em  $\mathbf{x}_2(t)$  dividido por dois.

Agora, é possível aplicar este conhecimento a sistemas QB.

### 2.3.3 Funções de Transferências de Sistemas Quadrático-Bilineares

Como já mencionado em § 2.3.1, um sistema QB pode ser dividido em infinitos subsistemas. As equações (2.49) e (2.50) mostram seus dois primeiros.

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{b}u(t) \quad (2.49)$$

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{H}(\mathbf{x}_1(t) \otimes \mathbf{x}_1(t)) + \mathbf{N}\mathbf{x}_1(t)u(t) \quad (2.50)$$

Como a intenção desta seção é derivar as funções de transferência de até segunda ordem, uma soma de duas exponenciais crescentes é definida como entrada do sistema, i.e.,  $u(t) = e^{s_1 t} + e^{s_2 t}$ .

#### Subsistema de Primeira Ordem

O subsistema de primeira ordem é uma planta linear comum, de modo que suas funções de transferência são relativamente fáceis de serem obtidas. No entanto, para que essa abordagem possa ser bem compreendida, elas também são derivadas com a ajuda da abordagem de exponenciais crescentes. Segundo a dada entrada, os estados do sistema – e suas respectivas derivadas no tempo – são esperadas como nas equações (2.51) e (2.52).

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{F}_1(s_1)e^{s_1 t} + \mathbf{F}_1(s_2)e^{s_2 t} \quad (2.51)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = s_1 \cdot \mathbf{F}_1(s_1)e^{s_1 t} + s_2 \cdot \mathbf{F}_1(s_2)e^{s_2 t} \quad (2.52)$$

Inserindo estes termos na equação da dinâmica do sistema,  $\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{b}u(t)$ , obtém-se

$$\mathbf{E}(s_1\mathbf{F}_1(s_1)e^{s_1 t} + s_2\mathbf{F}_1(s_2)e^{s_2 t}) = \mathbf{A}(\mathbf{F}_1(s_1)e^{s_1 t} + \mathbf{F}_1(s_2)e^{s_2 t}) + \mathbf{b}(e^{s_1 t} + e^{s_2 t}) \quad (2.53)$$

Esta relação deve ser válida para todos os valores de  $(s_1, s_2)$ . Logo, duas equações separadas podem ser obtidas quando os coeficientes que multiplicam cada termo  $e^{s_i t}$ ,  $i = 1, 2$  são comparados. Chega-se a

$$\mathbf{E}s_1\mathbf{F}_1(s_1) = \mathbf{A}\mathbf{F}_1(s_1) + \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{F}_1(s_1) = -(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E})^{-1}\mathbf{b} \quad (2.54)$$

$$\mathbf{E}s_2\mathbf{F}_1(s_2) = \mathbf{A}\mathbf{F}_1(s_2) + \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{F}_1(s_2) = -(\mathbf{A} - s_2\mathbf{E})^{-1}\mathbf{b} \quad (2.55)$$

A partir destas equações, é possível chegar às funções de transferência com respeito às saídas do sistema.

$$G_1(s_1) = -\mathbf{c}^T(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E})^{-1}\mathbf{b} \quad (2.56)$$

$$G_1(s_2) = -\mathbf{c}^T(\mathbf{A} - s_2\mathbf{E})^{-1}\mathbf{b} \quad (2.57)$$

Ou simplesmente a equação (2.58).

$$G_1(s) = -\mathbf{c}^T(\mathbf{A} - s\mathbf{E})^{-1}\mathbf{b} \quad (2.58)$$

Este resultado corresponde à já conhecida função de transferência de sistemas lineares, como previsto.

### Subsistema de Segunda Ordem

O subsistema de segunda ordem não é mais um sistema linear, de modo que a única maneira de derivar suas funções de transferência é por meio da abordagem das exponenciais crescentes. Os termos nas equações (2.59) - (2.62) podem ajudar a fazê-lo.

$$\mathbf{x}_2(t) = 2\mathbf{F}_2(s_1, s_2)e^{(s_1+s_2)t} + \mathbf{F}_2(s_1, s_1)e^{2s_1t} + \mathbf{F}_2(s_2, s_2)e^{2s_2t} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_2(t) &= 2(s_1 + s_2)\mathbf{F}_2(s_1, s_2)e^{(s_1+s_2)t} + 2s_1\mathbf{F}_2(s_1, s_1)e^{2s_1t} \\ &\quad + 2s_2\mathbf{F}_2(s_2, s_2)e^{2s_2t} \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) \otimes \mathbf{x}_1(t) &= [\mathbf{F}_1(s_1) \otimes \mathbf{F}_1(s_1)]e^{2s_1t} + [\mathbf{F}_1(s_1) \otimes \mathbf{F}_1(s_2)]e^{(s_1+s_2)t} \\ &\quad + [\mathbf{F}_1(s_2) \otimes \mathbf{F}_1(s_1)]e^{(s_1+s_2)t} + [\mathbf{F}_1(s_2) \otimes \mathbf{F}_1(s_2)]e^{2s_2t} \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\mathbf{x}_1(t)u(t) = \mathbf{F}_1(s_1)e^{2s_1t} + [\mathbf{F}_1(s_1) + \mathbf{F}_1(s_2)]e^{(s_1+s_2)t} + \mathbf{F}_1(s_2)e^{2s_2t} \quad (2.62)$$

Inserindo-os à equação diferencial  $\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{H}(\mathbf{x}_1(t) \otimes \mathbf{x}_1(t)) + \mathbf{N}\mathbf{x}_1(t)u(t)$  com os termos  $\mathbf{x}_1(t)$  e  $u(t)$  previamente definidos, chega-se a:

$$\begin{aligned} &2\mathbf{E}((s_1 + s_2)\mathbf{F}_1(s_1, s_2)e^{(s_1+s_2)t} + s_1\mathbf{F}_2(s_1, s_1)e^{2s_1t} + s_2\mathbf{F}_2(s_2, s_2)e^{2s_2t}) = \\ &= \mathbf{A}(2\mathbf{F}_2(s_1, s_2)e^{(s_1+s_2)t} + \mathbf{F}_2(s_1, s_1)e^{2s_1t} + \mathbf{F}_2(s_2, s_2)e^{2s_2t}) + \\ &+ \mathbf{H}([\mathbf{F}_1(s_1) \otimes \mathbf{F}_1(s_1)]e^{2s_1t} + [\mathbf{F}_1(s_1) \otimes \mathbf{F}_1(s_2)]e^{(s_1+s_2)t} + \\ &+ [\mathbf{F}_1(s_2) \otimes \mathbf{F}_1(s_1)]e^{(s_1+s_2)t} + [\mathbf{F}_1(s_2) \otimes \mathbf{F}_1(s_2)]e^{2s_2t}) + \\ &+ \mathbf{N}(\mathbf{F}_1(s_1)e^{2s_1t} + [\mathbf{F}_1(s_1) + \mathbf{F}_1(s_2)]e^{(s_1+s_2)t} + \mathbf{F}_1(s_2)e^{2s_2t}) \end{aligned} \quad (2.63)$$

Agora, estas equações devem ser válidas para todo os  $s_1$  e  $s_2$ , tal que se possa comparar os coeficientes que multiplicam os termos  $e^{s_it}$ . Particularmente, são de interesse os termos que multiplicam  $e^{(s_1+s_2)t}$ , que correspondem à função de transferência simétrica  $\mathbf{F}_2(s_1, s_2)$ . Logo, pegando-se somente estes termos de interesse, escreve-se:

$$\begin{aligned}
2\mathbf{E}(s_1 + s_2)\mathbf{F}_2(s_1, s_2) &= 2\mathbf{A}\mathbf{F}_2(s_1, s_2) + \\
&+ \mathbf{H}(\mathbf{F}_2(s_1) \otimes \mathbf{F}_1(s_2) + \mathbf{F}_1(s_2) \otimes \mathbf{F}_1(s_1)) + \mathbf{N}(\mathbf{F}_1(s_1) + \mathbf{F}_1(s_2)) \quad (2.64)
\end{aligned}$$

Isolando o termo  $\mathbf{F}_2(s_1, s_2)$  e usando a notação  $\mathbf{A}_s = \mathbf{A} - s\mathbf{E}$ , a equação (2.65) é obtida.

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_2(s_1, s_2) &= -\frac{1}{2}\mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1}[\mathbf{H}(\mathbf{A}_{s_1}^{-1}\mathbf{b} \otimes \mathbf{A}_{s_2}^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{A}_{s_2}^{-1}\mathbf{b} \otimes \mathbf{A}_{s_1}^{-1}\mathbf{b}) \\
&\quad - \mathbf{N}(\mathbf{A}_{s_1}^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{A}_{s_2}^{-1}\mathbf{b})] \quad (2.65)
\end{aligned}$$

Assim, a função de transferência do segundo subsistema é dada pela multiplicação de  $\mathbf{F}_2(s_1, s_2)$  com o vetor de saídas  $\mathbf{c}^T$  pela esquerda.

$$\begin{aligned}
G_2(s_1, s_2) &= -\frac{1}{2}\mathbf{c}^T\mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1}[\mathbf{H}(\mathbf{A}_{s_1}^{-1}\mathbf{b} \otimes \mathbf{A}_{s_2}^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{A}_{s_2}^{-1}\mathbf{b} \otimes \mathbf{A}_{s_1}^{-1}\mathbf{b}) \\
&\quad - \mathbf{N}(\mathbf{A}_{s_1}^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{A}_{s_2}^{-1}\mathbf{b})] \quad (2.66)
\end{aligned}$$

*Observação 2.8* (Sobre a natureza da função de transferência de segunda ordem). Agora é o momento exato para se fazer uma observação sobre a natureza da função de transferência de segunda ordem. Como mencionado na equação (2.41), o segundo subsistema responde ao quadrado da amplitude das entradas. Utilizando-se deste fato e da equação (2.46), que explicita a resposta no tempo de um subsistema de ordem maior que um, a função de transferência de segunda ordem pode ser vista como a resposta de segunda ordem  $y_2(t)$  dividida pelo quadrado da entrada no domínio da frequência. Ainda será visto que esse quadrado corresponde, em realidade, ao produto de Kronecker das entradas. Isso pode ser visto matematicamente como a seguir:

$$Y_2(s_1, s_2) = G_2(s_1, s_2) \cdot [U(s_1) \otimes U(s_2)] \quad (2.67)$$

Observação 2.6 também pode ajudar para a compreensão dos conceitos previamente citados.  $\triangle$

Com estas funções de transferência em mãos, torna-se possível derivar e compreender técnicas de redução de ordem via subespaços de Krylov para sistemas QB. É relevante, no entanto, primeiramente saber como esse método funciona em seu princípio e qual é a ideia por trás destes subespaços.

### 2.3.4 Uma breve digressão sobre núcleos multivariáveis: De onde eles vêm?

De § 2.3.2 em diante, foi tomado como pressuposto que núcleos multivariáveis existem e, de fato, a derivação das funções de transferência de segunda ordem de um sistema QB foi completamente baseada nisso. Contudo, em nenhum lugar foi explicado de onde tais núcleos vêm. Isso foi feito intencionalmente, uma vez que não é necessário saber sua proveniência para entender a ideia geral da abordagem de exponenciais crescentes.

Entretanto, é importante saber de onde eles vêm para entender considerações futuras. Reconsiderando, como um exemplo, as duas primeiras equações variacionais apresentadas na Tabela 2.1 e reescritas nas equações (2.68) e (2.69), a origem destes núcleos multivariáveis pode ser investigada.

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{b}u(t) \quad (2.68)$$

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{H}(\mathbf{x}_1(t) \otimes \mathbf{x}_1(t)) + \mathbf{N}\mathbf{x}_1(t)u(t) \quad (2.69)$$

Como o primeiro subsistema é linear, sua resposta no tempo pode ser facilmente calculada com a ajuda da matriz de transição  $\Phi(t) = e^{(\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}t)}$ , como representado a seguir:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{(\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}\sigma)}}_{\Phi(\sigma)} \mathbf{E}^{-1}\mathbf{b} \cdot u(t-\sigma) d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\Phi(\sigma)\mathbf{E}^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{f}_1(\sigma)} \cdot u(t-\sigma) d\sigma \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_1(\sigma) \cdot u(t-\sigma) d\sigma
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Este resultado pode ser trabalhado para ser inserido na equação do segundo subsistema. A equação (2.71) mostra o produto de Kronecker que é necessário.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1(t) \otimes \mathbf{x}_1(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_1(\sigma) \cdot u(t-\sigma) d\sigma \otimes \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_1(\sigma) \cdot u(t-\sigma) d\sigma \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_1(\sigma_1) \otimes \mathbf{f}_1(\sigma_2) \cdot u(t-\sigma_1)u(t-\sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Rearranjando (2.69) e sabendo que  $\mathbf{x}_2(t)$  não depende de  $\mathbf{x}_1(t)$ , chega-se a um sistema que pode ser interpretado como linear na entrada  $\mathbf{u}^*(t) = [u(t) \ 1]^T$ , como reescrito a seguir:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}_2(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{H}(\mathbf{x}_1(t) \otimes \mathbf{x}_1(t)) + \mathbf{N}\mathbf{x}_1(t)u(t) \Rightarrow \\
\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}_2(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}_2(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{N}\mathbf{x}_1(t) & \mathbf{H}(\mathbf{x}_1(t) \otimes \mathbf{x}_1(t)) \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^*(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} u(t) \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}^*(t)}
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Logo, é possível prosseguir de mesmo modo como feito com o primeiro subsistema, ou seja, calculando sua resposta no tempo via matriz de transição. Os resultados estão na equação (2.71).

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{(\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}\sigma)}}_{\Phi(\sigma)} \mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}^*(\sigma) \cdot \mathbf{u}^*(t-\sigma) d\sigma \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\sigma)\mathbf{E}^{-1}[\mathbf{H}(\mathbf{x}_1(t) \otimes \mathbf{x}_1(t)) + \mathbf{N}\mathbf{x}_1(t)u(t-\sigma)] d\sigma \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\sigma)\mathbf{E}^{-1} \left[ \mathbf{H} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_1(\sigma_1) \otimes \mathbf{f}_1(\sigma_2) \cdot u(t-\sigma_1)u(t-\sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{N} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_1(\sigma_1) \cdot u(t-\sigma_1) d\sigma_1 \right) u(t-\sigma) \right] d\sigma \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\sigma)\mathbf{E}^{-1}\mathbf{H}(\mathbf{f}_1(\sigma_1) \otimes \mathbf{f}_1(\sigma_2)) \cdot u(t-\sigma_1)u(t-\sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\sigma)\mathbf{E}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{f}_1(\sigma_1) \cdot u(t-\sigma_1)u(t-\sigma) d\sigma_1 d\sigma \quad (2.73)
\end{aligned}$$

Finalmente, pode-se definir o núcleo de segunda ordem [31, §§3.4] como

$$\mathbf{f}_2(\sigma_1, \sigma_2) = \Phi(\sigma_2)\mathbf{E}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{f}_1(\sigma_1) + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\sigma)\mathbf{E}^{-1}\mathbf{H}(\mathbf{f}_1(\sigma_1) \otimes \mathbf{f}_1(\sigma_2)) d\sigma \quad (2.74)$$

De modo que a resposta do subsistema de segunda ordem possa ser escrita como representado na equação (2.75) [31, §3.4].

$$\mathbf{x}_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_2(\sigma_1, \sigma_2)u(t-\sigma_1)u(t-\sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 \quad (2.75)$$

Este procedimento pode ser feito com virtualmente todos os subsistemas de ordem superior restantes. Nesta tese, no entanto, somente os dois primeiros são de maior importância.

## Capítulo 3

# Redução de Ordem de Sistemas Quadrático-Bilineares SISO

Neste capítulo, as técnicas de redução de ordem (MOR) via Krylov para sistemas QB já existentes serão apresentadas, bem como suas aplicações e limitações.

Este capítulo dará, portanto, um panorama de como os subespaços de Krylov foram adaptados ao problema quadrático-bilinear. Ele também tratará as questões ainda abertas que motivaram esta tese.

Primeiramente, MOR projetiva será tratada de uma maneira geral e, a seguir, os métodos de Krylov serão abordados. Nas seções seguintes, as técnicas em estado da arte são examinadas e, por fim, a formulação exata do problema desta tese é declarado.

### 3.1 Redução de Ordem Projetiva

Como o nome já insinua, MOR projetiva consiste em técnicas de redução de ordem que se baseiam em projeções do vetor de estados sobre um subespaço de dimensão menor que consiga reproduzir a dinâmica do sistema original de modo satisfatório. Hoje em dia, há muitos métodos que usam essa ideia para se obter modelos menores, mas cada uma dessas práticas chega ao espaço de estados reduzido por critérios diferentes.

Essa tese é focada em métodos que usam subespaços de Krylov, mas um breve panorama de outras técnicas de projeção também é dado.

### 3.1.1 Fundamentos da Projeção do Vetor de Estados

Antes de entrar nos métodos propriamente ditos, uma compreensão clara sobre projeções do vetor de estados deve ser dada. Neste sentido, o conceito de projetor é definido.

**Definição 3.1** (Projetor [33]). Uma matriz  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é chamada de projetor se  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ . ▲

Então, se for necessário obter a projeção  $\mathbf{x}_p$  de um vetor  $\mathbf{x}$  em  $\text{Im}(\mathbf{P})$ , deve-se somente efetuar a operação  $\mathbf{x}_p = \mathbf{P}\mathbf{x}$ .

A Definição 3.1 não provê, entretanto, qualquer informação sobre como a matriz de projeção é formada, sendo dadas a direção de projeção e a base do subespaço sobre o qual o vetor deve ser projetado. Para que seja possível descobrir este procedimento, supõe-se que  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n_r}$  é uma matriz cujas colunas formam a base do subespaço sobre o qual a projeção é feita e  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times n_r}$ , a matriz cujas colunas formam a base do subespaço ortogonal à direção de projeção.

A Fig. 3.1 ilustra esta suposição mostrando um exemplo de um vetor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  sendo projetado com  $\mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ .

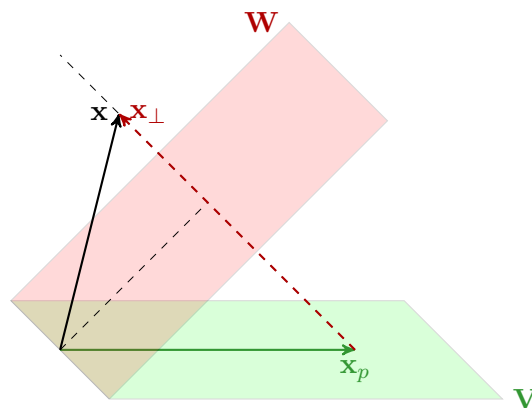


Figura 3.1: Esboço da projeção de  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  sobre  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$  por  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$

Como  $\mathbf{x}_p$  está dentro do subespaço de base  $\mathbf{V}$ , é possível escrever:

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{V}\mathbf{r} \quad (3.1)$$

Esta equação é válida para um vetor ainda desconhecido  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{n_r}$ . Para que se possa calculá-lo, é necessário considerar a soma vetorial e que  $\mathbf{x}_\perp$  é ortogonal a  $\mathbf{W}$ .

$$\mathbf{x}_\perp = \mathbf{x} - \mathbf{x}_p \quad (3.2)$$

$$\mathbf{W}^T \mathbf{x}_\perp \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \quad (3.3)$$

Uma combinação das equações (3.1), (3.2) e (3.3) leva à expressão do vetor  $\mathbf{r}$ , que é dada a seguir:

$$\mathbf{r} = (\mathbf{W}^T \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{x} \quad (3.4)$$

Desse modo, a expressão para o projetor  $\mathbf{P}$  pode ser determinada.

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{V}\mathbf{r} = \underbrace{\mathbf{V}(\mathbf{W}^T \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T}_{\mathbf{P}} \mathbf{x} \quad (3.5)$$

É possível notar que esta equação dá uma expressão para  $\mathbf{P}$  que satisfaz Definição 3.1, confirmando, de fato, que se trata de um projetor. não menos importante é o fato que  $\text{Im}(\mathbf{P}) = \text{Im}(\mathbf{V})$  e  $\text{ker}(\mathbf{P}) = \text{Im}(\mathbf{W})$ .

**Definição 3.2** (Projeções ortogonais e oblíquas [33]). A projeção é dita *ortogonal* se os subespaços de projeção forem iguais, i.e.,  $\mathbf{W} = \mathbf{V}$ , e *oblíqua* caso contrário. ▲

Uma pergunta natural que pode ocorrer é como usar essas matrizes  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{W}$  em sistemas quadrático-bilineares e como determiná-las de modo que o modelo reduzido entregue uma boa aproximação. Esta é a tarefa dos métodos de redução, que, sob certos critérios determina algoritmos que ajudam na escolha de matrizes adequadas.

### 3.1.2 Matrizes Reduzidas de Sistemas Quadrático-Bilineares

Uma representação em espaço de estados de um modelo SISO de ordem cheia (FOM, do inglês *full-order model*) é dada, mais uma vez, pelas equações:

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{H}(\mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t)) + \mathbf{N}\mathbf{x}(t)u(t) + \mathbf{b}u(t) \quad (3.6)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \quad (3.7)$$

Para que se chegue às formas reduzidas das matrizes que definem o sistema, é preciso aplicar a suposição de que  $\mathbf{x}(t)$  pode ser aproximado por uma projeção em um subespaço de dimensão menor  $n_r$  [6, 7]. Isso pode ser escrito matematicamente como  $\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{V}\mathbf{x}_r(t)$ , com  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n_r}$  e  $\mathbf{x}_r \in \mathbb{R}^{n_r}$  chegando a (3.8) e (3.9).

$$\mathbf{E}\mathbf{V}\dot{\mathbf{x}}_r(t) = \mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{x}_r(t) + \mathbf{H}(\mathbf{V}\mathbf{x}_r(t) \otimes \mathbf{V}\mathbf{x}_r(t)) + \mathbf{N}\mathbf{V}\mathbf{x}_r(t)u(t) + \mathbf{b}u(t) + \boldsymbol{\varepsilon}(t) \quad (3.8)$$

$$y_r(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{V}\mathbf{x}_r(t) \quad (3.9)$$

Mas, como projeções de Petrov-Galerkin são definidas pela ortogonalidade do erro com a matriz de projeção, a equação (3.10) pode ser escrita, onde o erro é  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E}\mathbf{V}\dot{\mathbf{x}}_r(t) - \mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{x}_r(t) - \mathbf{H}(\mathbf{V}\mathbf{x}_r(t) \otimes \mathbf{V}\mathbf{x}_r(t)) - \mathbf{N}\mathbf{V}\mathbf{x}_r(t)u(t) - \mathbf{b}u(t)$ .

$$\boldsymbol{\varepsilon} \perp \mathbf{W} \implies \mathbf{W}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \quad (3.10)$$

Logo, seguindo de (3.10) e da definição do erro, a forma reduzida de sistemas quadrático-bilineares por uma projeção de Petrov-Galerkin pode ser escrita como

$$\mathbf{E}_r \dot{\mathbf{x}}_r(t) = \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{H}_r(\mathbf{x}_r(t) \otimes \mathbf{x}_r(t)) + \mathbf{N}_r \mathbf{x}_r(t)u(t) + \mathbf{b}_r u(t) \quad (3.11)$$

$$y_r(t) = \mathbf{c}_r^T \mathbf{x}_r(t) \quad (3.12)$$

As equações (3.11) e (3.12) foram escritas tomando-se as relações representadas nas equações (3.13) a (3.18).

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{A} \mathbf{V} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{H}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{H} (\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) \quad (3.15)$$

$$\mathbf{N}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{N} \mathbf{V} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{b}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{b} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{c}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{c} \quad (3.18)$$

*Observação 3.1* (Forma dos sistemas QB reduzidos). Cabe observar que a forma de um sistema quadrático-bilinear é mantida quando ele é reduzido. Esta é uma vantagem desta representação com relação a sistemas não-lineares gerais  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ , que não têm nenhuma estrutura.  $\triangle$

*Observação 3.2* (Sobre as matrizes reduzidas de um sistema MIMO). Essas matrizes reduzidas são válidas apenas para sistemas quadrático-bilineares SISO, que são representados nas equações (3.6) e (3.7). Para sistemas MIMO, a representação pode ser diferente e será tratada com mais profundidade em § 4.  $\triangle$

Agora, basta elaborar o método que escolhe as matrizes de redução  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{W}$  de maneira satisfatória.

### 3.1.3 Métodos de Redução Comuns

Não existe um único jeito de escolher matrizes de redução  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{W}$  adequadas. Bem como virtualmente tudo na engenharia, há não nenhum método cujas vantagens ultrapassam as dos outros de maneira absoluta e cujas desvantagens são desprezíveis para todos os casos. A eleição do melhor método depende, portanto, da aplicação do sistema e de sua estrutura.

Dentre os métodos de redução de ordem mais conhecidos estão a decomposição própria ortogonal (POD, do inglês *Proper Orthogonal Decomposition*), o truncamento balanceado (BT, do inglês *Balanced Truncation*) e os métodos de subespaços de Krylov. Uma vez que o objetivo desta tese é contemplar a última destas técnicas, uma breve descrição de cada

uma das duas primeiras é dada, a título de exemplo. Enquanto isso, a técnica de Krylov, que é o tema central desta tese, tem uma subsecção separada para si.

### Decomposição Própria Ortogonal

Os passos básicos de uma decomposição própria ortogonal são [3, 21, 25]:

1. Escolher sinais de treinamento adequados  $\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t), \dots, \mathbf{u}_t(t)$ ;
2. Tirar “fotos” (estados estáticos) da trajetória de ordem cheia simulada e salvá-las nas colunas de uma matrix  $\mathbf{X}$ ;
3. Fazer uma decomposição em valores singulares dessa matrix de estados estáticos  $\mathbf{X}$ , como segue:

$$\mathbf{X} = \mathbf{M}\mathbf{\Sigma}\mathbf{N}^T \approx \mathbf{M}_r\mathbf{\Sigma}_r\mathbf{N}_r^T \quad (3.19)$$

4. Calcular as matrizes de projeção  $\mathbf{V} = \mathbf{M}_r$  e  $\mathbf{W} = \mathbf{N}_r$ .

A partir destes passos, é possível saber as vantagens e desvantagens deste método, que são listadas na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Vantagens e desvantagens da [32]

Vantagens	Desvantagens
<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Método direto e derivado de dados</li> <li>▪ Limite para o erro de aproximação</li> <li>▪ Ótimo, no sentido de mínimos quadrados</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Simulação do sistema cheio para diferentes entradas é necessária</li> <li>▪ Decomposição da matrix de estados estáticos <math>\mathbf{X}</math></li> <li>▪ Depende de sinal de treinamento</li> </ul>

*Observação 3.3* (Dependência de entradas de treinamento). Dado que a POD não leva em consideração nenhuma classe de sistema – linear, Port-Hamiltoniano, etc. –, ela depende de um ou um conjunto de sinais de treinamento para conseguir reduzir o sistema. Logo,

nada pode garantir uma boa aproximação das respostas temporais dos sistemas reduzido e original quando a entrada real na planta for diferente das de treinamento. Isso pode ser apontado como a maior desvantagem deste método de redução.  $\triangle$

### Truncamento Balanceado

Em contraste com a POD, que não depende da classe do sistema a ser reduzido, o truncamento balanceado depende [28]. Logo, para o bem da concisão desta tese, nenhuma equação característica deste métodos é passada, mas somente sua ideia geral:

1. Resolver uma equação de Lyapunov com respeito às entradas do sistema e à sua controlabilidade;
2. Resolver uma equação de Lyapunov com respeito às saídas do sistema e à sua observabilidade;
3. Fazer uma decomposição de Cholesky em cada uma das matrizes resultante e uma decomposição em valores singulares na multiplicação das duas;
4. Eliminar as colunas correspondentes aos menores valores singulares.

De maneira similar ao feito na seção de POD, a Tabela 3.2 ilustra as vantagens e desvantagens do método:

Tabela 3.2: Vantagens e desvantagens do BT [33]

Vantagens	Desvantagens
<ul style="list-style-type: none"><li>▪ Este método pode ser feito automaticamente</li><li>▪ Preserva a estabilidade do sistema original</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>▪ Computacionalmente caro</li><li>▪ Requer grande memória RAM</li></ul>

*Observação 3.4* (Sobre a grande memória requerida pelo BT). A necessidade de guardar muitas matrizes e fazer fatorações de grande escala faz este método ser muito caro e exigente em se tratando de memória. Isso representa um limite superior à ordem do sistema

original, que não deve ultrapassar um valor com o qual as memórias de computadores comuns podem lidar.  $\triangle$

Muitas outras técnicas de redução também podem ser usadas, mas estas já atingiram o objetivo de ilustrar o quão diferentes os critérios de redução e métodos resultantes podem ser. A partir da próxima seção, entretanto, somente métodos com subespaços de Krylov serão explorados e analisados.

### 3.1.4 Métodos dos Subespaços de Krylov

Uma outra abordagem para se reduzir sistemas dinâmicos é por meio de suas funções de transferência. Ela representa nada mais do que o comportamento entrada-saída de um dado modelo no domínio da frequência.

O objetivo principal das abordagens de Krylov é aproximar a função de transferência do modelo de ordem cheia (FOM). Isso significa que, em teoria, a qualidade da redução não depende da entrada e, por conseguinte, nenhum sinal de treinamento é necessário.

A ideia básica desta classe de métodos de redução é a *coincidência de momentos*. Mas, antes de tratar de como se faz os momentos coincidirem, é necessário definir este conceito, em primeiro lugar.

#### Momentos de Sistemas Não-Lineares

**Definição 3.3** (Momentos de uma função de transferência). Seja  $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , ou simplesmente  $G(s)$ , uma função de transferência de um sistema dinâmico arbitrário.  $G(s)$  pode ser escrita como uma expansão em série de Taylor ao redor de um ponto de expansão – ou *shift* –  $s_0$ , resultando na equação que segue:

$$G(s) = G(s_0) + \frac{G'(s_0)}{1!}(s - s_0) + \frac{G''(s_0)}{2!}(s - s_0)^2 + \dots \quad (3.20)$$

O *momento* de ordem  $l$  de  $G(s)$  é o coeficiente que multiplica o termo  $\frac{(s-s_0)^l}{l!}$  na expansão.  $\blacktriangle$

Em outras palavras, os momentos de uma função de transferência são suas derivadas em  $s_0$ .

É possível notar que Definição 3.3 leva somente sistemas lineares em consideração, uma vez que estes são os únicos que têm funções de transferência  $G(s)$  claramente definidas. Ambos os conceitos – função de transferência e momentos – podem ser, entretanto, estendidos a sistemas não-lineares.

Como já visto em § 2.3.3, sistemas quadrático-bilineares têm funções de transferência. Elas podem ter, no entanto, mais de uma variável de Laplace, o que foge da Definição 3.3. Apesar disso, a noção de série de Taylor pode ser estendida a funções multivariáveis, bem como os momentos.

**Definição 3.4** (Momentos de uma função de transferência de ordem  $k$ ). Seja  $G_k(s_1, \dots, s_k)$  uma função de transferência multivariável de ordem  $k$  de um sistema dinâmico não-linear arbitrário. Seus momentos  $m(l_1, \dots, l_k)$  de ordem  $l = l_1 + \dots + l_k$  ao redor dos pontos  $(s_{01}, \dots, s_{0k})$  podem ser entendidos como suas derivadas parciais de ordem  $l$  ao redor de  $(s_{01}, \dots, s_{0k})$ . Matematicamente, a equação (3.21) pode elucidar esta definição:

$$m(l_1, \dots, l_k) = \frac{\partial^l}{\partial s_1^{l_1} \dots \partial s_k^{l_k}} G_k(s_{01}, \dots, s_{0k}), \quad l_1 + \dots + l_k = l \quad (3.21)$$

▲

### Cálculo Explícito de Momentos Quadrático-Bilineares

Com (3.21) e focando, agora, em sistemas QB, é possível derivar os momentos quadrático-bilineares.

Como já mencionado algumas vezes, apenas as duas primeiras funções de transferência de sistemas quadrático-bilineares são de interesse nesta tese. Logo, apenas os seus momentos serão explicitamente derivados. Entretanto, como o primeiro subsistema é puramente linear – já muito estudado na literatura – nenhum esforço será dado à derivação de seus coeficientes. Assim, apenas os momentos da segunda função de transferência serão tratados.

Para que possa calculá-los, é necessário saber as derivadas de  $\mathbf{A}_s$ , que é dada pela equação que segue:

$$\frac{\partial^i}{\partial s^i} \mathbf{A}_s^{-1}(s) = i! (\mathbf{A}_s^{-1} \mathbf{E})^i \mathbf{A}_s^{-1} \quad (3.22)$$

Como exemplo, sua primeira derivada é calculada em (3.23).

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathbf{A}_s^{-1}(s) = \mathbf{A}_s^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_s^{-1} \quad (3.23)$$

Assim, a primeira derivada de  $G_2(s_1, s_2)$  – da equação (2.66) – com respeito a  $s_1$  pode ser calculada.

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_2}{\partial s_1} = & -\frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{H} [\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b} \otimes \mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{b} + \mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{b} \otimes \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b}] \\ & -\frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{H} [\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b} \otimes \mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{b} + \mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{b} \otimes \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b}] \\ & +\frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{N} [\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b} + \mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{b}] \\ & +\frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{N} [\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b}] \end{aligned} \quad (3.24)$$

A primeira derivada com respeito a  $s_2$  pode ser calculada analogamente.

Pode-se observar que os primeiros dois termos dependem somente do comportamento quadrático do sistema, enquanto que os dois últimos, somente do bilinear. Logo, os momentos de um sistema QB podem ser separados em suas parcelas quadrática e bilinear, explicitamente dadas em (3.25):

$$m^{qb} = m = m^q + m^b \quad (3.25)$$

Observando o padrão da fórmula da primeira derivada, as expressões para os termos de ordem superior podem ser alcançadas.

$$\begin{aligned}
m^a(l_1, l_2) &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{l_1} \sum_{j=0}^{l_2} -(l_1 + l_2 - i - j)! i! j! \binom{l_1}{i} \binom{l_2}{j} \cdot \\
&\quad \left[ \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{E})^{l_1+l_2-i-j} \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{H}((\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{E})^i \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b} \otimes (\mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{E})^j \mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{b}) \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{E})^{l_1+l_2-i-j} \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{H}((\mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{E})^j \mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{b} \otimes (\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{E})^i \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b}) \right]
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
m^b(l_1, l_2) &= \sum_{i=0}^{l_1} \frac{1}{2} (l_1 + l_2 - i)! i! \binom{l_1}{i} \\
&\quad \cdot \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{E})^{l_1+l_2-i} \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{N}(\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{E})^i \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{l_2} \frac{1}{2} (l_1 + l_2 - j)! j! \binom{l_2}{j} \\
&\quad \cdot \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{E})^{l_1+l_2-j} \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{N}(\mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{E})^j \mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{b}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

A fim de se fazer essas variáveis mais tangíveis e compreensíveis, as derivadas de ordem até  $(l_1, l_2) = (3, 1)$  são explicitamente calculadas em Exemplo 3.1.

*Exemplo 3.1* (Cálculo dos momentos QB de ordem  $(3, 1)$ ). Para uma melhor compreensão do processo, só os momentos quadráticos serão tratados em primeiro lugar e somente depois serão desenvolvidos os bilineares. Além disso, é tido como premissa que a matriz Hessiana é simétrica, o que implica que o produto de Kronecker é comutativo. Isso será explicitamente tratado na próxima seção. Em outras palavras,  $\mathbf{H}(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = \mathbf{H}(\mathbf{y} \otimes \mathbf{x})$ . Apesar de o uso desta propriedade poder levar a uma simplificação, ela será usada para deixar os seguintes cálculos mais compactos. A expressão de  $\frac{\partial G_2}{\partial s_1} = m(1, 0)$ , como na equação (3.24), é tomada como ponto de partida das derivações.



$$\begin{aligned}
m^q(3, 1) = & -1 \cdot \mathbf{c}^T \cdot 4! \cdot (\mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{E})^4 \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{H}[\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b} \otimes \mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{b}] \\
& - 1 \cdot \mathbf{c}^T \cdot 3! \cdot (\mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{E})^3 \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{H}[\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b} \otimes \mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{b}] \\
& - 3 \cdot \mathbf{c}^T \cdot 3! \cdot (\mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{E})^3 \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{H}[\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b} \otimes \mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{b}] \\
& - 3 \cdot \mathbf{c}^T \cdot 2! \cdot (\mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{E})^2 \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{H}[\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b} \otimes \mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{b}] \\
& - 3 \cdot \mathbf{c}^T \cdot 2! \cdot (\mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{E})^2 \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{H}[2! \cdot (\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{E})^2 \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b} \otimes \mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{b}] \\
& - 3 \cdot \mathbf{c}^T \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{H}[2! \cdot (\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{E})^2 \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b} \otimes \mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{b}] \\
& - 1 \cdot \mathbf{c}^T \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{H}[3! \cdot (\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{E})^3 \mathbf{E}_{s_1}^{-1} \mathbf{b} \otimes \mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{b}] \\
& - 1 \cdot \mathbf{c}^T \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{H}[3! \cdot (\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{E})^3 \mathbf{E}_{s_1}^{-1} \mathbf{b} \otimes \mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{b}]
\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
m^b(1, 0) = & + 1 \cdot 1/2 \cdot \mathbf{c}^T \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{N}[\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b} + \mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{b}] \\
& + 1 \cdot 1/2 \cdot \mathbf{c}^T \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{N}[\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b}]
\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
m^b(2, 0) = & + 1 \cdot 1/2 \cdot \mathbf{c}^T \cdot 2! \cdot (\mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{E})^2 \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{N}[\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b} + \mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{b}] \\
& + 1 \cdot 1/2 \cdot \mathbf{c}^T \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{N}[\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b}] \\
& + 1 \cdot 1/2 \cdot \mathbf{c}^T \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{N}[\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b}] \\
& + 1 \cdot 1/2 \cdot \mathbf{c}^T \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{N}[2! \cdot (\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{E})^2 \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b}] \\
= & + 1 \cdot 1/2 \cdot \mathbf{c}^T \cdot 2! \cdot (\mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{E})^2 \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{N}[\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b} + \mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{b}] \\
& + 2 \cdot 1/2 \cdot \mathbf{c}^T \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{N}[\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b}] \\
& + 1 \cdot 1/2 \cdot \mathbf{c}^T \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{N}[2! \cdot (\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{E})^2 \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b}]
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
m^b(3, 0) &= + 1 \cdot 1/2 \cdot \mathbf{c}^T \cdot 3! \cdot (\mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{E})^3 \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{N}[\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b} + \mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{b}] \\
&\quad + 1 \cdot 1/2 \cdot \mathbf{c}^T \cdot 2! \cdot (\mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{E})^2 \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{N}[\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b}] \\
&\quad + 2 \cdot 1/2 \cdot \mathbf{c}^T \cdot 2! \cdot (\mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{E})^2 \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{N}[\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b}] \\
&\quad + 2 \cdot 1/2 \cdot \mathbf{c}^T \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{N}[2! \cdot (\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{E})^2 \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b}] \\
&\quad + 1 \cdot 1/2 \cdot \mathbf{c}^T \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{N}[2! \cdot (\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{E})^2 \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b}] \\
&\quad + 1 \cdot 1/2 \cdot \mathbf{c}^T \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{N}[3! \cdot (\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{E})^3 \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b}] \\
&= + 1 \cdot 1/2 \cdot \mathbf{c}^T \cdot 3! \cdot (\mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{E})^3 \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{N}[\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b} + \mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{b}] \\
&\quad + 3 \cdot 1/2 \cdot \mathbf{c}^T \cdot 2! \cdot (\mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{E})^2 \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{N}[\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b}] \\
&\quad + 3 \cdot 1/2 \cdot \mathbf{c}^T \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{N}[2! \cdot (\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{E})^2 \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b}] \\
&\quad + 1 \cdot 1/2 \cdot \mathbf{c}^T \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{N}[3! \cdot (\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{E})^3 \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b}] \tag{3.34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m^b(3, 1) &= + 1 \cdot 1/2 \cdot \mathbf{c}^T \cdot 4! \cdot (\mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{E})^4 \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{N}[\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b} + \mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{b}] \\
&\quad + 1 \cdot 1/2 \cdot \mathbf{c}^T \cdot 3! \cdot (\mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{E})^3 \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{N}[\mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{b}] \\
&\quad + 3 \cdot 1/2 \cdot \mathbf{c}^T \cdot 3! \cdot (\mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{E})^3 \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{N}[\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b}] \\
&\quad + 3 \cdot 1/2 \cdot \mathbf{c}^T \cdot 2! \cdot (\mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{E})^2 \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{N}[2! \cdot (\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{E})^2 \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b}] \\
&\quad + 1 \cdot 1/2 \cdot \mathbf{c}^T \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{N}[3! \cdot (\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{E})^3 \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b}] \tag{3.35}
\end{aligned}$$

Com as expressões (3.28) a (3.35), as fórmulas dos momentos QB de ordem superior puderam entendidas melhor. △

O cálculo completo e explícito dos momentos QB não é necessário para garantir a coincidência deles por meio de subespaços de Krylov, mas eles podem ser úteis, caso seja de interesse testar se eles realmente coincidem.

### Coincidência de Momentos

Como já citado anteriormente, o objetivo de técnicas de redução baseadas em Krylov é aproximar funções de transferência por meio de coincidência de momentos. Mais uma vez, o nome é bastante sugestivo e insinua que um certo número de momentos dos sistemas de ordem cheia (FOM) e reduzida (ROM, do inglês *reduced order model*) coincidem.

É possível imaginar, entretanto, que os momentos que se quer que coincidam precisem ser calculados e forçados a serem iguais, mas este não é o caso. Existe uma classe de técnicas de redução que faz uso de subespaços de Krylov para construir matrizes de projeção de modo tal que as condições de coincidência de momentos sejam satisfeitas sem calculá-los.

Para contextualizar o que são os subespaços de Krylov, sua definição é dada.

**Definição 3.5** (Subespaço de Krylov [2, 18, 33]). Sejam  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$  uma matriz e um vetor, respectivamente. O subespaço de Krylov de ordem  $q$  relacionado ao par  $(\mathbf{M}, \mathbf{v})$  é definido a seguir:

$$\mathcal{K}_q(\mathbf{M}, \mathbf{v}) = \text{span}\{\mathbf{v}, \mathbf{M}\mathbf{v}, \mathbf{M}^2\mathbf{v}, \dots, \mathbf{M}^{q-1}\mathbf{v}\} \quad (3.36)$$

▲

Nem todos os teoremas que serão tratados nesta tese garantirão coincidência de momentos por meio de subespaços de Krylov reais, como na Definição 3.5. Mas, como eles são usados para construir matrizes de projeção que garantem coincidência de momentos no caso linear, este termo se consagrou como sinônimo de coincidência de momentos.

Na seção seguinte, dois teoremas de redução de sistemas QB em estado da arte são apresentados e provados. Depois disso, exemplos numéricos são mostrados para se checar sua validade.

## 3.2 Estado da Arte

Os métodos em estado da arte que existem nos dias de hoje para se reduzir sistemas QB cobrem somente modelos no caso SISO. Essas técnicas são apresentadas nesta seção para que se possa haver uma familiarização com elas e saber quais são seus pontos fortes e suas limitações.

### 3.2.1 Considerações Preliminares

Algumas considerações preliminares sobre o tensor Hessiano e os esforços computacionais do cálculo de  $(\mathbf{V} \otimes \mathbf{V})$  devem ser citados antes de se entrar nas técnicas de redução em si.

#### Simetria do Tensor Hessiano

A partir de agora, será útil considerar a matriz Hessiana como uma *matricization* de modo 1 de um tensor Hessiano  $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{n \times n \times n}$ , i.e.  $\mathbf{H}^{(1)} = \mathbf{H}$ . Logo, a notação de *matricization* de um tensor será amplamente usada, bem como suas propriedades. Em sistemas MIMO, não somente a matriz Hessiana será enxergada como um tensor, como também a bilinear  $\bar{\mathbf{N}}$ . Esta última, entretanto, será devidamente endereçada em um capítulo que segue.

Ambas as seguintes rotinas de redução são válidas, levando em consideração o Corolário 2.3, que é uma propriedade de tensores simétricos, ou seja, tensores cujas *matricizations* 2 e 3 são iguais. Deste modo, é necessário que  $\mathbf{H}$  seja simétrico, em termos tensoriais. No entanto, nem todos os modelos possuem essa propriedade, o que pode soar como um fator limitante para estes métodos de redução. É possível, contudo, simetrizar essa matriz sem afetar a dinâmica do sistema e, depois, realizar as reduções.

Analisando a parte quadrática da dinâmica do sistema QB e usando Corolário 2.1 em combinação com Corolário 2.2, chega-se à equação (3.37).

$$\mathbf{q} = \mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) = [\mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(2)}(\mathbf{x} \otimes \mathbf{I})]^T = [\mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(3)}(\mathbf{x} \otimes \mathbf{I})]^T \quad (3.37)$$

Se as *matricizations* de modos 2 e 3 de  $\mathcal{H}$  são definidas tal como em (3.38), a dinâmica do sistema – ou o vetor  $\mathbf{q}$  – não é alterada.

$$\mathbf{H}_{sym}^{(2)} := \frac{1}{2}(\mathbf{H}^{(2)} + \mathbf{H}^{(3)}) =: \mathbf{H}_{sym}^{(3)} \quad (3.38)$$

Então, é possível substituir a matriz Hessiana original do sistema pela *matricization* 1 do tensor definido em (3.38) sem interferir no comportamento original do modelo QB. Os corolários que seguem da propriedade de simetria do tensor Hessiano serão utilizados

extensivamente nos processos de redução não somente de sistemas SISO, mas também no caso MIMO.

Para se ilustrar como o processo de simetrização não afeta a dinâmica do sistema original, o Exemplo 3.2 é dado.

*Exemplo 3.2* (Simetrização de um sistema quadrático [6, 7]). A equação (3.39) descreve um sistema puramente quadrático.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1x_2 \\ x_1x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}} \quad (3.39)$$

Uma vez que a segunda e a terceira entrada do vetor  $\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}$  são iguais, a dinâmica do sistema original não é alterada desde que as somas  $h_{12} + h_{13} = b + c$  e  $h_{22} + h_{23} = f + g$  sejam mantidas, como mencionado na Observação 2.5.

As *matricizations* de modo 2 e 3 podem ser escritas como em (3.40) e (3.41).

$$\mathbf{H}^{(2)} = \begin{bmatrix} a & e & c & g \\ b & f & d & h \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$\mathbf{H}^{(3)} = \begin{bmatrix} a & e & b & f \\ c & g & d & h \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

E a nova versão simetrizada de  $\mathbf{H}^{(2)} = \mathbf{H}^{(3)}$  pode ser calculada:

$$\mathbf{H}_{sym}^{(2)} = \mathbf{H}_{sym}^{(3)} = \begin{bmatrix} a & e & \frac{b+c}{2} & \frac{f+g}{2} \\ \frac{b+c}{2} & \frac{f+g}{2} & d & h \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Chegando, então, à versão simétrica da matriz Hessiana:

$$\mathbf{H}_{sym}^{(1)} = \mathbf{H}_{sym} = \begin{bmatrix} a & \frac{b+c}{2} & \frac{b+c}{2} & d \\ e & \frac{f+g}{2} & \frac{f+g}{2} & h \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Pode-se notar que as somas dos elementos na segunda e terceira coluna são iguais às do sistema original o que significa que as dinâmicas permanecem inalteradas.  $\triangle$

### Esforços Computacionais

Em geral, os esforços computacionais relacionados à redução de sistemas não-lineares são maiores do que os enfrentados na redução de lineares. Em particular, sistemas quadrático-bilineares podem ser muito caros computacionalmente devido à redução da matriz Hessiana.

Como explicitado em (3.15), é necessário calcular o produto de Kronecker  $\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}$  para se obter a matriz reduzida  $\mathbf{H}_r$ . A performance e a alocação em memória deste produto são, no entanto, impraticáveis para a maioria dos computadores modernos, uma vez que  $\dim(\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) = (n^2, n_r^2)$  e, diferentemente da matriz esparsa  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}$  é cheia. Logo, é preciso haver uma outra maneira de se calcular esta operação sem fazer o produto de Kronecker explicitamente.

O Algoritmo 3.1 pode ser rodado para isso, aplicando-se propriedades tensoriais para se computar a matriz Hessiana reduzida.

---

#### **Algoritmo 3.1:** Construção da matriz Hessiana reduzida [6, 7]

---

**Entrada:** Matriz Hessiana de ordem cheia  $\mathbf{H}$  e as matrizes de redução  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{W}$

**Saída:** Matriz Hessiana reduzida  $\mathbf{H}_r$

**1 início**

- 2 Compute  $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{n_r \times n \times n}$  via  $\mathbf{Y}^{(1)} = \mathbf{W}^T \mathbf{H}$ ;
  - 3 Compute  $\mathcal{Z} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r \times n}$  via  $\mathbf{Z}^{(2)} = \mathbf{V}^T \mathbf{Y}^{(2)}$ ;
  - 4 Compute  $\mathcal{H}_r \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r \times n_r}$  via  $\mathbf{H}_r^{(3)} = \mathbf{V}^T \mathbf{Z}^{(3)}$
- 

Por meio deste método, o cálculo de um modelo com ordem reduzida se torna computacionalmente mais barato. Apesar de a operação mais cara –  $\mathbf{Y}^{(1)} = \mathbf{W}^T \mathbf{H}$  – poder ter

até  $n \cdot n_r$  entradas, a matriz resultante é esparsa e não requer tanta memória quanto o procedimento direto.

### 3.2.2 Coincidência de Multimomentos

**Teorema 3.1** (Coincidência de multimomentos via Krylov [6]). *Admite-se que  $\Sigma^{QB} = (\mathbf{E}, \mathbf{A}, \mathbf{H}, \mathbf{N}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T)$  denote um sistema de equações diferenciais algébricas quadrático-bilineares (QBDAE) de dimensão  $n$ . Sejam  $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$  com  $q_2 \leq q_1$ . Assume-se que um sistema reduzido de QBDAEs é construído por uma projeção do tipo Petrov-Galerkin:  $\mathbf{E}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$ ,  $\mathbf{A}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{A} \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$ ,  $\mathbf{H}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{H} (\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r^2}$ ,  $\mathbf{N}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{N} \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$ ,  $\mathbf{b}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n_r}$ ,  $\mathbf{c}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n_r}$ , onde  $\text{span}(\mathbf{V})$  e  $\text{span}(\mathbf{W})$  são bases ortonormais dos espaços construídos pelo Algoritmo 3.2.*

---

**Algoritmo 3.2:** Construção das matrizes de redução de coincidência de multimomentos

---

**Entrada:** As matrizes do sistema QB  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ , o ponto de expansão – ou shift –  $\sigma$ , as ordens reduzidas da primeira função de transferência,  $q_1$ , e da segunda função de transferência,  $q_2$

**Saída:** Matrizes de redução  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{W}$

1 **início**

2      $\mathbf{V}_1 = \mathcal{K}_{q_1}(\mathbf{A}_{2\sigma}^{-1} \mathbf{E}, \mathbf{A}_{2\sigma}^{-1} \mathbf{b});$

3      $\mathbf{W}_1 = \mathcal{K}_{q_1}(\mathbf{A}_{2\sigma}^{-T} \mathbf{E}^T, \mathbf{A}_{2\sigma}^{-T} \mathbf{c});$

4     **para**  $i = 1 : q_2$  **faça**

5          $\mathbf{V}_2^i = \mathcal{K}_{q_2-i+1}(\mathbf{A}_{2\sigma}^{-1} \mathbf{E}, \mathbf{A}_{2\sigma}^{-1} \mathbf{N} \mathbf{V}_1(:, i));$

6          $\mathbf{W}_2^i = \mathcal{K}_{q_2-i+1}(\mathbf{A}_{2\sigma}^{-T} \mathbf{E}^T, \mathbf{A}_{2\sigma}^{-T} \mathbf{N}^T \mathbf{W}_1(:, i));$

7         **para**  $j = 1 : \min(q_2 - i + 1, i)$  **faça**

8              $\mathbf{V}_3^{i,j} = \mathcal{K}_{q_2-i+1}(\mathbf{A}_{2\sigma}^{-1} \mathbf{E}, \mathbf{A}_{2\sigma}^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{V}_1(:, i) \otimes \mathbf{V}_1(:, j)));$

9              $\mathbf{W}_3^{i,j} = \mathcal{K}_{q_2-i+1}(\mathbf{A}_{2\sigma}^{-T} \mathbf{E}^T, \mathbf{A}_{2\sigma}^{-T} \mathbf{H}^{(2)}(\mathbf{V}_1(:, i) \otimes \mathbf{W}_1(:, j)));$

10      $\text{span}(\mathbf{V}) = \text{span}(\mathbf{V}_1) \cup \bigcup_i \text{span}(\mathbf{V}_2^i) \cup \bigcup_{i,j} \text{span}(\mathbf{V}_3^{i,j});$

11      $\text{span}(\mathbf{W}) = \text{span}(\mathbf{W}_1) \cup \bigcup_i \text{span}(\mathbf{W}_2^i) \cup \bigcup_{i,j} \text{span}(\mathbf{W}_3^{i,j});$

---

São válidas, então:

$$\frac{\partial^i G_1}{\partial s_1^i}(\sigma) = \frac{\partial^i G_{1,r}}{\partial s_1^i}(\sigma), \quad i = 0, \dots, q_1 - 1 \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial^i G_1}{\partial s_1^i}(2\sigma) = \frac{\partial^i G_{1,r}}{\partial s_1^i}(2\sigma), \quad i = 0, \dots, q_1 - 1 \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial s_1^i \partial s_2^j} G_2(\sigma, \sigma) = \frac{\partial^{i+j}}{\partial s_1^i \partial s_2^j} G_{2,r}(\sigma, \sigma), \quad i + j \leq 2q_2 - 1 \quad (3.46)$$

A demonstração deste teorema não adiciona muito à discussão da extensão ao caso MIMO. Ela será omitida, portanto, a fim de se deixar esta tese mais sucinta, mas ela é completamente desenvolvida em [6]

### 3.2.3 Coincidência de Momentos Hermitiana

**Teorema 3.2** (Interpolação de Hermite oblíqua via subespaços de Krylov [7]). *Sejam  $\mathbf{E}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$  não-singular,  $\mathbf{A}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{A} \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$ ,  $\mathbf{H}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{H}(\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r^2}$ ,  $\mathbf{N}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{N} \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$ ,  $\mathbf{b}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n_r}$  e  $\mathbf{c}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n_r}$  com  $\mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times n_r}$  de posto máximo tais que as equações (3.47) e (3.48) são válidas com  $\sigma_i \notin \{\Lambda(\mathbf{A}, \mathbf{E}), \Lambda(\mathbf{A}_r, \mathbf{E}_r)\}$  e  $i = 1 \dots, k$ .*

$$\text{span}(\mathbf{V}) \supset \text{span}_{i=1, \dots, k} \{ \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}, \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1} [\mathbf{H}(\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b} \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}) - \mathbf{N} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}] \} \quad (3.47)$$

$$\text{span}(\mathbf{W}) \supset \text{span}_{i=1, \dots, k} \{ \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{c}, \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} [\mathbf{H}^{(2)}(\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b} \otimes \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{c}) - \frac{1}{2} \mathbf{N}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{c}] \} \quad (3.48)$$

Assim, as equações (3.49) a (3.52) também valem, para  $j = 1, 2$ .

$$G_1(\sigma_i) = G_{1,r}(\sigma_i) \quad (3.49)$$

$$G_1(2\sigma_i) = G_{1,r}(2\sigma_i) \quad (3.50)$$

$$G_2(\sigma_i, \sigma_i) = G_{2,r}(\sigma_i, \sigma_i) \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial s_j}(\sigma_i, \sigma_i) = \frac{\partial G_{2,r}}{\partial s_j}(\sigma_i, \sigma_i) \quad (3.52)$$

*Demonstração.* Para se demonstrar o Teorema 3.2, uma série de relações será derivada e, combinando-as entre si e com o sistema original, a coincidência dos momentos poderá ser

garantida. Definem-se os projetores  $\mathbf{\Pi}_1 = \mathbf{V}(\mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{E}$  e  $\mathbf{\Pi}_2 = \mathbf{W}(\mathbf{V}^T \mathbf{E}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{E}^T$ . Pode-se observar que  $\text{Im}(\mathbf{\Pi}_1) = \text{Im}(\mathbf{V})$  e  $\text{Im}(\mathbf{\Pi}_2) = \text{Im}(\mathbf{W})$ .

Do primeiro vetor em  $\text{span}(\mathbf{V})$ , chega-se à relação (3.53).

$$\begin{aligned}
\mathbf{V} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \underbrace{\mathbf{b}_r}_{\mathbf{W}^T \mathbf{b}} &= \mathbf{V} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{A}_{\sigma_i} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{V} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{A}_{\sigma_i} \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b} \\
&= \mathbf{V} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \underbrace{\mathbf{W}^T \mathbf{A}_{\sigma_i} \mathbf{V}}_{\mathbf{A}_{r,\sigma_i}} (\mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b} \\
&= \mathbf{V} \underbrace{\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}}_{\mathbf{I}_{n_r}} (\mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b} \\
&= \underbrace{\mathbf{V} (\mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{E}}_{\mathbf{\Pi}_1} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b} \\
&= \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Nota-se que a última expressão é válida somente em  $\text{Im}(\mathbf{\Pi}_1) = \text{Im}(\mathbf{V})$ .

Analogamente, do primeiro vetor de  $\text{span}(\mathbf{W})$ , a relação (3.54) pode ser obtida.

$$\begin{aligned}
\mathbf{W} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \underbrace{\mathbf{c}_r}_{\mathbf{V}^T \mathbf{c}} &= \mathbf{W} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \mathbf{V}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{c} = \mathbf{W} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \mathbf{V}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^T \mathbf{\Pi}_2 \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{c} \\
&= \mathbf{W} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \underbrace{\mathbf{V}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^T \mathbf{W}}_{\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^T} (\mathbf{V}^T \mathbf{E}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{E}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{c} \\
&= \mathbf{W} \underbrace{\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^T}_{\mathbf{I}_{n_r}} (\mathbf{V}^T \mathbf{E}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{E}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{c} \\
&= \underbrace{\mathbf{W} (\mathbf{V}^T \mathbf{E}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{E}^T}_{\mathbf{\Pi}_2} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{c} \\
&= \mathbf{\Pi}_2 \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{c} = \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{c}
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Do vetor remanescente em  $\text{span}(\mathbf{V})$ , a relação (3.55) também pode ser obtida.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{V} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} \left[ \underbrace{\mathbf{H}_r(\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}_r \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}_r)}_{\mathbf{W}^T \mathbf{H}(\mathbf{V} \otimes \mathbf{V})(\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}_r \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}_r)} - \underbrace{\mathbf{N}_r \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}_r}_{\mathbf{W}^T \mathbf{N} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}_r} \right] \\
&= \mathbf{V} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} \left[ \mathbf{W}^T \mathbf{H} \left( \underbrace{\mathbf{V} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}_r}_{\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}} \otimes \underbrace{\mathbf{V} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}_r}_{\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}} \right) - \mathbf{W}^T \mathbf{N} \underbrace{\mathbf{V} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}_r}_{\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}} \right] \\
&= \mathbf{V} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1} \left[ \mathbf{H}(\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b} \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}) - \mathbf{N} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b} \right] \\
&= \mathbf{V} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} \underbrace{\mathbf{W}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i} \mathbf{\Pi}_1}_{\mathbf{\Pi}_1} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1} \left[ \mathbf{H}(\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b} \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}) - \mathbf{N} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b} \right] \\
&= \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1} \left[ \mathbf{H}(\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b} \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}) - \mathbf{N} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b} \right] \tag{3.55}
\end{aligned}$$

Agora, o último vetor em  $\text{span}(\mathbf{W})$  pode ser trabalhado.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{W} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \left[ \underbrace{\mathbf{H}_r^{(2)}(\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}_r \otimes \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \mathbf{c}_r)}_{\mathbf{V}^T \mathbf{H}^{(2)}(\mathbf{V} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}_r \otimes \mathbf{W} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \mathbf{c}_r)} - \underbrace{\mathbf{N}_r^T \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \mathbf{c}_r}_{\mathbf{V}^T \mathbf{N}^T \mathbf{W} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \mathbf{c}_r} \right] \\
&= \mathbf{W} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{V}^T \underbrace{\left[ \mathbf{H}^{(2)}(\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b} \otimes \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{c}) - \mathbf{N}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{c} \right]}_{\mathbf{K}} \\
&= \mathbf{W} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \underbrace{\mathbf{V}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^T \mathbf{\Pi}_2}_{\mathbf{\Pi}_2} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{K} = \mathbf{\Pi}_2 \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{K} \\
&= \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \left[ \mathbf{H}^{(2)}(\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b} \otimes \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{c}) - \mathbf{N}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{c} \right] \tag{3.56}
\end{aligned}$$

Agora, a coincidência de momentos pode ser provada. Multiplicando-se os ambos os lados do símbolo de igualdade da equação (3.53) por  $\mathbf{c}^T$  pela esquerda, obtém-se:

$$\mathbf{c}_r^T \underbrace{\mathbf{V} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}_r}_{\mathbf{c}_r^T \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}_r} = \mathbf{c}_r^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b} \implies G_{1,r}(\sigma_i) = G_1(\sigma_i) \tag{3.57}$$

De modo parecido, multiplicando ambos os lados da equação (3.54) por  $\mathbf{b}^T$  pela esquerda, chega-se a:

$$\mathbf{b}_r^T \underbrace{\mathbf{W} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \mathbf{c}_r}_{\mathbf{b}_r^T \mathbf{W} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \mathbf{c}_r} = \mathbf{b}_r^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{c} \implies G_{1,r}(2\sigma_i) = G_1(2\sigma_i) \tag{3.58}$$

Mais uma vez, se ambos os lados de (3.55) são multiplicados por  $\mathbf{c}^T$  pela esquerda, o próximo passo da coincidência de momentos pode ser checado.

$$\begin{aligned} \underbrace{\mathbf{c}^T}_{\mathbf{c}_r^T} \mathbf{V} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} [\mathbf{H}_r(\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}_r \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}_r) - \mathbf{N}_r \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}_r] &= \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1} [\mathbf{H}(\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b} \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}) - \mathbf{N} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}] &\implies \\ G_{2,r}(\sigma_i, \sigma_i) &= G_2(\sigma_i, \sigma_i) \end{aligned} \quad (3.59)$$

Para se provar a última relação de coincidência de momentos, a equação (3.56) será usada em combinação com (3.53).

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_r^T \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \overbrace{\mathbf{V}^T \mathbf{E}^T \mathbf{W}}^{\mathbf{E}_r^T} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} [\mathbf{H}_r^{(2)}(\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}_r \otimes \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \mathbf{c}_r) - \frac{1}{2} \mathbf{N}_r^T \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \mathbf{c}_r] &= \\ \mathbf{b}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} [\mathbf{H}^{(2)}(\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b} \otimes \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{c}) - \frac{1}{2} \mathbf{N}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{c}] & \end{aligned} \quad (3.60)$$

Se ambos os lados de (3.60) representam uma *matricization* de modo 2 dos tensores definidos nas equações (3.61) e (3.62), suas *matricizations* de modo 1 têm que ser iguais também.

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \mathcal{H} \times_1 (\mathbf{c}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1}) \times_2 (\mathbf{b}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T}) \times_3 (\mathbf{b}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathcal{N} \times_1 (\mathbf{c}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1}) \times_2 (\mathbf{b}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T}) \times_3 1 \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_r &= \mathcal{H}_r \times_1 (\mathbf{c}_r^T \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1}) \times_2 (\mathbf{b}_r^T \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}_r^T \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T}) \times_3 (\mathbf{b}_r^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathcal{N}_r \times_1 (\mathbf{c}_r^T \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1}) \times_2 (\mathbf{b}_r^T \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}_r^T \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T}) \times_3 1 \end{aligned} \quad (3.62)$$

Usando as relações dentro do Corolário 2.2, mais especificamente as equações (2.9) e (2.10), a equação baseada em suas *matricizations* de modo 1 podem ser mostradas em (3.63).

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_r^T \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} [\mathbf{H}_r(\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}_r \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{E}_r \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}_r) - \frac{1}{2} \mathbf{N}_r \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{E}_r \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}_r] &= \\ = \mathbf{c}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1} [\mathbf{H}(\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b} \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}) - \frac{1}{2} \mathbf{N} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}] & \end{aligned} \quad (3.63)$$

Ainda é necessário usar as equações (3.55) em combinação com (3.54) para se chegar a uma outra igualdade relevante.

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}_r^T \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} \overbrace{\mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V}}^{\mathbf{E}_r^T} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} [\mathbf{H}_r (\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}_r \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}_r) - \mathbf{N}_r \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}_r] \\ & = \mathbf{c}^T \mathbf{A}_{2\sigma}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1} [\mathbf{H} (\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b} \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}) - \mathbf{N} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{b}] \end{aligned} \quad (3.64)$$

Adicionando-se todos os termos de (3.64) e (3.63), chega-se à última condição de coincidência de momentos, como representada na equação (3.65).

$$\frac{\partial G_2}{\partial s_j}(\sigma_i, \sigma_i) = \frac{\partial G_{2,r}}{\partial s_j}(\sigma_i, \sigma_i) \quad (3.65)$$

■

### 3.2.4 Uma Breve Discussão Sobre as Técnicas em Estado da Arte

Com essas duas técnicas em estado da arte para sistemas QB, é possível notar suas diferenças, bem como suas respectivas vantagens e fraquezas. Os pontos que seguem listam algumas dessas características.

- A maneira mais direta de se expandir as técnicas de redução de sistemas bilineares ao problema quadrático-bilinear é o método dos multimomentos.
- A abordagem dos multimomentos lida com as dinâmicas quadrática e bilinear separadamente, enquanto o método hermitiano as considera como somente uma.
- A ordem do sistema reduzido pela abordagem de multimomentos será maior para os mesmos pontos de expansão e momentos coincidentes.
- Quando se usa a abordagem hermitiana, o usuário não tem tanta liberdade para escolher os parâmetros da redução quanto quando se usa a dos multimomentos, uma vez que o número de momentos é fixa.

Pode parecer que a abordagem hermitiana não é tão vantajosa por conta do número de momentos a coincidir por ponto de expansão. No entanto, também pode ser bastante útil que os momentos coincidam em um número maior de pontos do que um número grande de momentos coincidam por ponto. Isso advoga a favor da segunda abordagem, que dá uma ordem menor para o mesmo número de momentos coincidentes.

Pode-se interpretar, então, que considerar as dinâmicas bilinear e quadrática como uma só possibilita que se chegue a um sistema reduzido menor do que quando se considera as duas dinâmicas separadas.

Esta análise será útil para derivar técnicas de redução para sistemas MIMO, uma vez que elas servem como inspiração para esta extensão.

## 3.3 Exemplos Numéricos

Nesta seção, os modelos quadrático-bilineares de benchmark são apresentados, a fim de se simular os teoremas mencionados até este ponto. Em paralelo a eles, uma outra redução é feita com a POD (decomposição ortogonal própria) para que seja possível comparar as vantagens e desvantagens de se utilizar uma MOR via Krylov ou outra que é dependente de sinal de treinamento.

### 3.3.1 Escada RC Não-Linear

Ao contrário dos demais modelos de benchmark, as equações dinâmicas de uma escada RC [4, 13, 12, 19] não são obtidas a partir da discretização espacial de uma equação diferencial parcial (PDE), mas sim de equações diferenciais ordinárias (ODEs) obtidas por meio da lei das malhas de Kirchhoff. Fig. 3.2 mostra o circuito elétrico que representa este modelo fisicamente.

É possível ver que o elemento que torna o modelo não-linear é o diodo, cuja corrente  $i_D$  depende da voltagem entre seus terminais  $v_D$  de acordo com a expressão  $i_D = e^{40v_D} - 1$ . A entrada do sistema é a fonte de corrente  $u(t) = i$  e sua saída é a tensão no primeiro nó

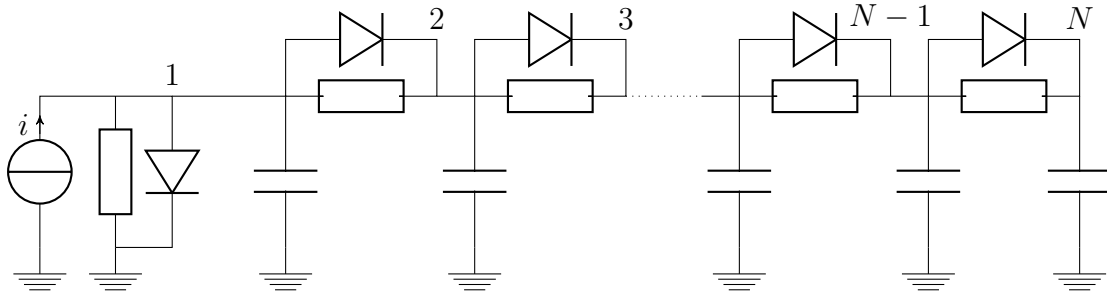


Figura 3.2: Circuito elétrico de uma escada RC.

$y(t) = v_1$  – que somente será tratado mais tarde. As equações (3.66) a (3.68) representam a dinâmica do circuito [12, 19].

$$\dot{v}_1 = -2v_1 + v_2 + 2 - e^{40v_1} - e^{40(v_1-v_2)} + u(t) \quad (3.66)$$

$$\dot{v}_i = -2v_i + v_{i-1} + v_{i+1} + e^{40(v_{i-1}-v_i)} - e^{40(v_i-v_{i+1})} \quad 2 \leq i \leq N-1 \quad (3.67)$$

$$\dot{v}_N = -v_N + v_{N-1} - 1 + e^{40(v_{N-1}-v_N)} \quad (3.68)$$

Se as variáveis de estado forem fixadas como sendo  $v_1$ ,  $v_{i,i+1} = v_i - v_{i+1}$  para  $1 \leq i \leq N-1$  e as não-linearidades forem tratadas como novas variáveis de estado, a saber  $w_1 = e^{40v_1} - 1$  e  $w_i = e^{40v_{i-1,i}} - 1$  para  $2 \leq i \leq N$ , as equações diferenciais com respeito a essas variáveis de estado podem ser escritas como em (3.69) a (3.76), para  $2 \leq i \leq N-2$  e  $3 \leq j \leq N-1$ .

$$\dot{v}_1 = -v_1 - v_{1,2} + 2 - e^{40v_1} - e^{40v_{1,2}} + u(t) \quad (3.69)$$

$$\dot{v}_{1,2} = -v_1 - 2v_{1,2} + v_{2,3} + 2 - e^{40v_1} - 2e^{40v_{1,2}} + e^{40v_{2,3}} + u(t) \quad (3.70)$$

$$\dot{v}_{i,i+1} = -2v_{i,i+1} + v_{i-1,i} + v_{i+1,i+2} e^{40v_{i-1,i}} - 2e^{40v_{i,i+1}} + e^{40v_{i+1,i+2}} \quad (3.71)$$

$$\dot{v}_{N-1,N} = -2v_{N-1,N} + v_{N-2,N-1} + 1 + e^{40v_{N-2,N-1}} - 2e^{40v_{N-1,N}} \quad (3.72)$$

$$\dot{w}_1 = 40(w_1 + 1)(-v_1 - v_{1,2} - w_1 - w_2 + u(t)) \quad (3.73)$$

$$\dot{w}_2 = 40(w_2 + 1)(-v_1 - 2v_{1,2} + v_{2,3} - w_1 - 2w_2 + w_3 + u(t)) \quad (3.74)$$

$$\dot{w}_j = 40(w_j + 1)(-2v_{j-1,j} + v_{j-2,j-1} + v_{j,j+1} - w_{j-1} - 2w_j + w_{j+1}) \quad (3.75)$$

$$\dot{w}_N = 40(w_N + 1)(-2v_{N-1,N} + v_{N-2,N-1} - w_{N-1} - 2w_N) \quad (3.76)$$

Com a adição das novas variáveis de estado, o novo modelo é quadrático-bilinear e sua dimensão torna-se  $2N$ , onde  $N$  é o número de nós.

Fixando o vetor de saída do sistema como  $\mathbf{c} = [1, 0, \dots, 0]^T$  de modo a se obter a tensão no primeiro nó, o modelo está pronto para ser reduzido. A Fig. 3.3 mostra a resposta no tempo de uma escada RC de suas respectivas formas reduzidas. A redução por POD também foi feita para efeito de comparação.

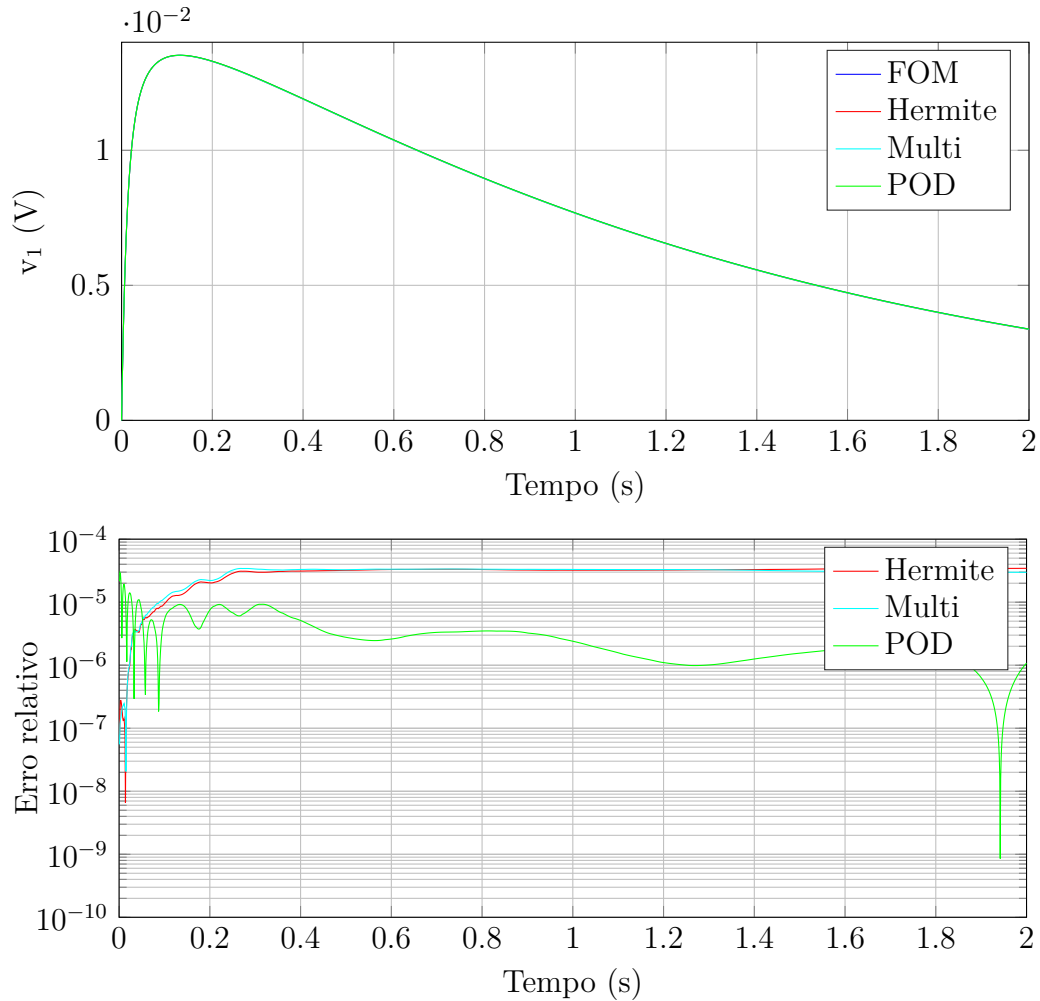


Figura 3.3: Escada RC com  $u(t) = e^{-t}$ .

É importante, também, levar em consideração todos os parâmetros de redução antes de analisar os resultados. Com a intenção de se deixar os ROMs comparáveis, os modelos reduzidos pela técnica hermitiana e de multimomentos foram trabalhados nos mesmos pontos de expansão e com o mesmo número de momentos coincidentes em cada ponto, i.e.  $q_1 = q_2 = 1$  para a abordagem de multimomentos. A lista que segue resume os parâmetros de redução e simulação remanescentes. Também é importante notar que, uma vez que não há nenhum algoritmo que auxilie na escolha dos pontos de expansão de um modelo QB otimamente, eles foram obtidos a partir do IRKA (*Iterative Rational Krylov Algorithm*),

que dita os pontos de redução ótimos para sistemas lineares. Deste modo, garante-se que a redução do primeiro subsistema é ótima em termos de norma  $\mathcal{H}_2$ .

- Entrada:  $u(t) = e^{-t}$
- Integrador: ode15s
- Passo temporal: 1 ms
- Sistema original
  - Ordem cheia:  $n = 1000$
  - Tempo de simulação: 17.6 s
- Abordagem hermitiana
  - Ordem reduzida:  $n_{r,her} = 12$
  - Pontos de expansão: 6 obtidos pelo IRKA
  - Norma do erro relativo:  $1.40 \cdot 10^{-3}$
  - Tempo de simulação: 0.116 s
- Abordagem de multimomentos
  - Ordem reduzida:  $n_{r,multi} = 18$
  - Pontos de expansão: 6 obtidos pelo IRKA
  - Norma do erro relativo:  $1.37 \cdot 10^{-3}$
  - Tempo de simulação: 0.122 s
- POD
  - Ordem reduzida:  $n_{r,POD} = 12$
  - Entrada de treinamento: igual à entrada de simulação  $u_t(t) = e^{-t}$
  - Norma do erro relativo:  $1.81 \cdot 10^{-4}$
  - Tempo de simulação: 0.102 s

Apesar de o tempo de simulação do FOM não ter sido muito alto, a simulação dos ROMs tomam cerca de duas ordens de grandeza a menos que o sistema original, o que já representa um ganho. Em ambientes industriais, os modelos a serem reduzidos podem ser maiores e menos esparsos, o que contribuiria para maiores tempos de simulação do FOM e uma diferença maior entre o tempo de simulação deste e dos ROMs.

Também pode ser checado pela Fig. 3.3 e pela norma do erro relativo que a POD entrega uma redução ligeiramente melhor que os demais métodos. Isso não é surpresa, uma vez que esta redução foi baseada na resposta no tempo do sistema original submetido a uma entrada igual à simulada. Este não é o caso quando as entradas de treinamento e simulação são diferentes. As técnicas de multimomentos e hermitiana não dependem de sinais de treinamento e são, portanto, independentes da entrada.

Para se ilustrar essa propriedade, a Fig. 3.4 mostra os mesmos modelos reduzidos apresentados anteriormente, mas com uma excitação diferente  $u(t) = (\cos(2\pi \frac{t}{10}) + 1)/2$  – o sinal de treinamento da redução por POD permaneceu  $u_t(t) = e^{-t}$ .

Agora, pode-se ver que as reduções independentes de entrada performaram muito melhor que a por POD, mesmo sem a ajuda do gráfico do erro relativo, o que confirma que a qualidade da redução depende, de fato, do sinal de treinamento. Isso serve como uma das maiores motivações para se desenvolver técnicas que aproximam o comportamento entrada-saída de sistemas não-lineares, ao invés de depender de métodos baseados em simulação.

Além desta independência com relação à entrada das rotinas hermitiana e dos multimomentos, pode-se ver, também, que a técnica de multimomentos entrega um modelo reduzido maior para um mesmo número de momentos coincidentes, o que se deve evitar. Isso dá ao primeiro método uma grande vantagem.

### 3.3.2 Equação de Burgers

A seguir, uma equação de Burgers unidimensional no domínio  $\Omega = (0, L) \times (0, T)$  é considerada. Esta equação aparece em muitos problemas de mecânica dos fluidos, como dinâmica de gases e acústica não-linear [9, 14, 22]. O modelo contínuo consiste em um conjunto de quatro equações que determinam sua dinâmica e condições inicial e de contorno.

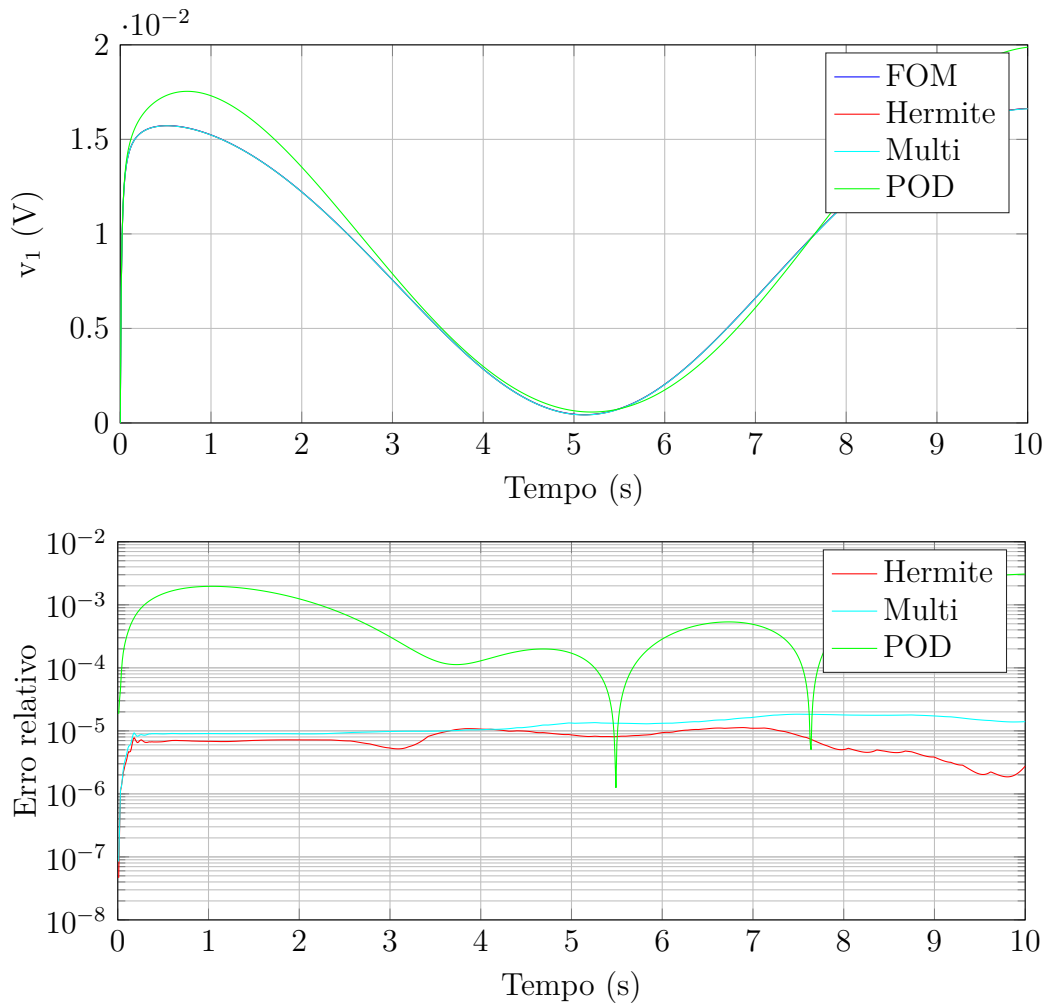


Figura 3.4: Escada RC com  $u(t) = (\cos(2\pi \frac{t}{10}) + 1)/2$ .

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \nu \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \text{em } (0, L) \times (0, T) \quad (3.77)$$

$$\alpha v(0, t) + \beta \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = u(t) \quad \text{em } (0, T) \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(L, t) = 0 \quad \text{em } (0, T) \quad (3.79)$$

$$v(x, 0) = v_0(x) \quad \text{em } (0, L) \quad (3.80)$$

Das equações (3.77) a (3.80),  $\nu$  denota o parâmetro relacionado à viscosidade e  $v_0(x)$  denota a condição inicial do sistema. A semidiscretização dessa PDE hiperbólica leva a um conjunto de equações quadrático-bilineares cujo tamanho é igual ao número de pontos

de discretização. A discretização completa e o procedimento de quadrático-bilinearização deste modelo não serão tratados explicitamente nesta tese.

### Controle de contorno

Para se obter as equações do controle de contorno deste sistema, é necessário fixar  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ , de modo que a entrada seja direcionada diretamente ao contorno esquerdo do sistema. Ademais, o estado inicial é fixado a zero, ou seja,  $v_0(x) = 0$ . Se o tópico de interesse é investigar como o contorno direto se comporta, então o vetor de saídas do sistema tem que ser  $c = [0, \dots, 0, 1]^T$ . A Fig. 3.5 mostra, mais uma vez, uma comparação do FOM, dos modelos reduzidos independentes de treinamento, e do modelo reduzido por POD, todos com  $\nu = 0.05$  e  $u(t) = e^{-t}$ .

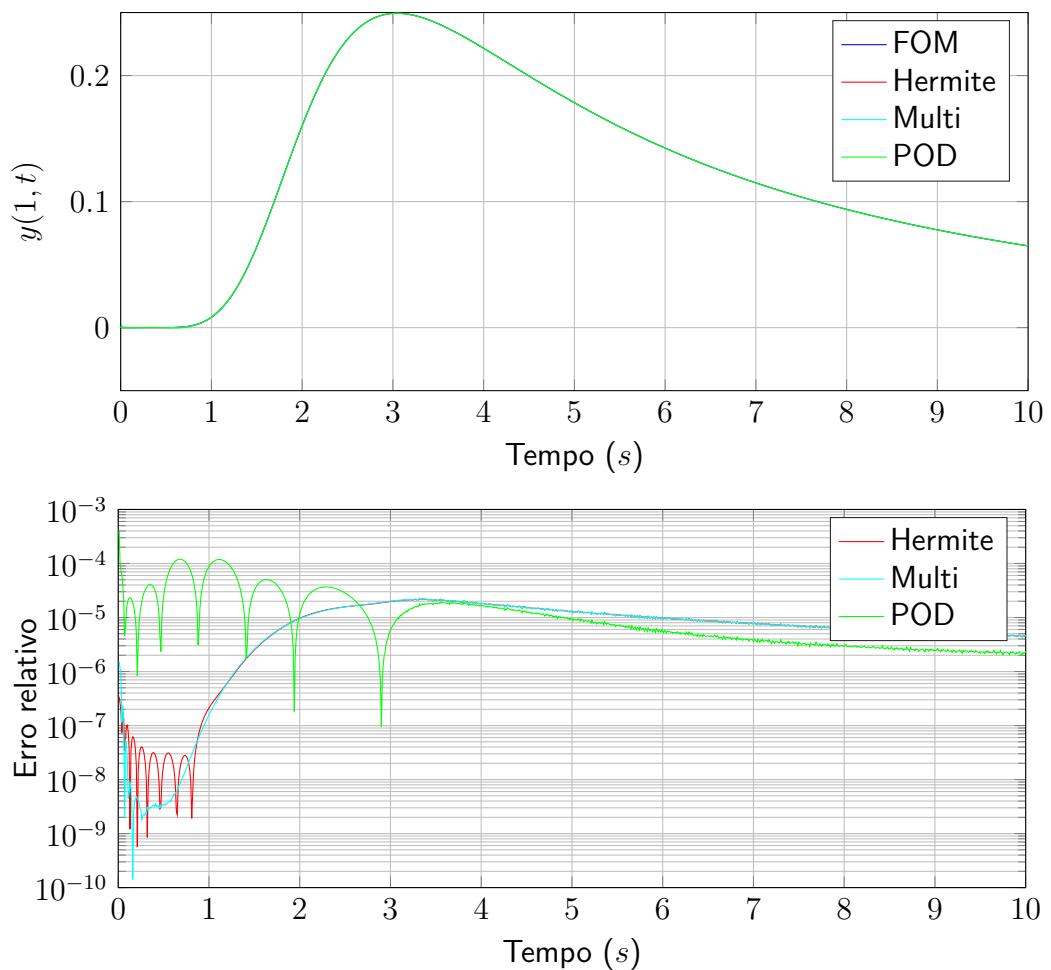


Figura 3.5: Equação de Burgers com  $u(t) = e^{-t}$ .

Os parâmetros de simulação e redução usados para estas simulações são descritos na listagem que segue. Enfatiza-se que as escolhas dos pontos de expansão e ordens reduzidas foram feitas seguindo a mesma lógica que nas simulações da escada RC.

- Entrada de simulação:  $u(t) = e^{-t}$
- Integrador: ode45
- Passo temporal: 10 ms
- Sistema original
  - Ordem cheia:  $n = 500$
  - Tempo de simulação:  $1.64 \cdot 10^3$  s
- Abordagem hermitiana
  - Ordem reduzida:  $n_{r,her} = 12$
  - Pontos de expansão: 6 obtidos pelo IRKA
  - Norma do erro relativo:  $3.50 \cdot 10^{-4}$
  - Tempo de simulação: 2.78 s
- Abordagem dos multimomentos
  - Ordem reduzida:  $n_{r,multi} = 18$
  - Pontos de expansão: 6 obtidos pelo IRKA
  - Norma do erro relativo:  $3.50 \cdot 10^{-4}$
  - Tempo de simulação: 29.97 s
- POD
  - Ordem reduzida:  $n_{r,POD} = 12$
  - Entrada de treinamento: igual à entrada de simulação  $u_t(t) = e^{-t}$
  - Norma do erro relativo:  $1.02 \cdot 10^{-3}$
  - Tempo de simulação: 9.11 s

Analisando estes resultados, percebe-se imediatamente que há um ganho significativo de tempo entre qualquer modelo reduzido e o FOM. Dependendo da rotina de redução, o tempo de simulação dos ROMs pode variar de 0.17% a até 1.64% do tempo original de simulação.

Pode-se ver, também, que as duas primeira técnicas entregam reduções de qualidades equivalentes, cujos erros recaem sobre a mesma ordem de grandeza, mesmo que o sistema reduzido pela técnica dos multimomentos tenha ordem maior. A POD, por outro lado, tem performance ligeiramente pior.

De modo similar ao que foi feito antes, estes mesmos modelos reduzidos foram testados com uma entrada diferente, a fim de se reforçar a importância da independência de treinamento. A Fig. 3.6 mostra as respostas no tempo do modelo de ordem cheia e seus modelos reduzidos com um sinal diferente ao de treinamento da POD, bem como seus erros relativos no tempo.

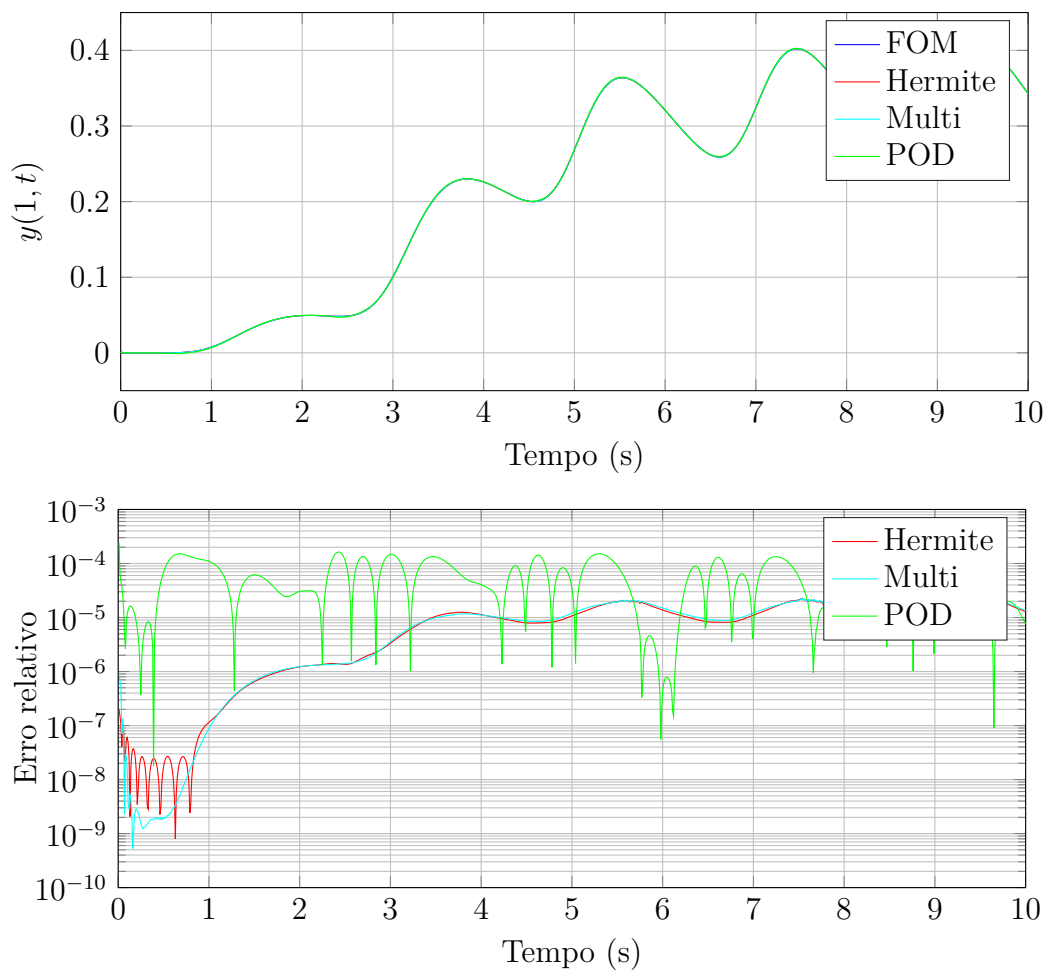


Figura 3.6: Controle de contorno da equação de Burgers com  $u(t) = \cos(\pi t)$ .

Agora, não fica 100% claro se as duas técnicas independentes de treinamento performaram melhor ou pior que a POD apenas olhando para o gráfico. Isso pode ser checado pela evolução dos erros relativos no tempo e na Tabela 3.3, que compara a norma do erro relativo das rotinas de redução. Apenas para efeito de reforço, as ordens reduzidas também são mostradas.

Tabela 3.3: Comparação entre os  $e_{rel}$  e  $n_r$  das abordagens hermitiana, de multimomentos e POD

	<b>Hermitiana</b>	<b>Multimomentos</b>	<b>POD</b>
$e_{rel}$	$3.54 \cdot 10^{-4}$	$3.65 \cdot 10^{-4}$	$2.43 \cdot 10^{-3}$
$n_r$	12	18	12

De modo contrário ao que ocorreu com a escada RC, as qualidades de redução da POD e das outras duas não difere drasticamente. Pode-se ver, entretanto, que a POD reage de forma levemente pior – aproximadamente uma ordem de grandeza – que as demais. Além disso, pode-se enfatizar, mais uma vez, que a POD é baseada em simulação, o que significa que uma simulação – ou um conjunto de várias simulações – do FOM, tem que ser feita. Este processo pode consumir muito tempo e, para ilustrar isso, a Tabela 3.4 mostra o período de tempo que é necessário para se reduzir por cada uma dessas três abordagens.

Tabela 3.4: Tempos de redução da POD, técnica hermitiana e dos multimomentos

	<b>Hermitiana</b>	<b>Multimomentos</b>	<b>POD</b>
$t_{red}(s)$	1.444	0.757	$1.684 \cdot 10^3$
$n_r$	12	18	12

Pode-se ver facilmente como os tempos de redução nas duas primeiras colunas divergem do da última por conta da simulação do modelo de ordem cheia na POD. Também enfatiza-se que somente um sinal de treinamento foi usado. Se, ao invés disso, os sinais de treinamento fossem mais numerosos, o tempo de redução seria ainda maior.

### Caso não-controlado

Também é interessante testar se os métodos de redução apresentados conseguem lidar com reconstrução de estados. Para tal, o caso não-controlado é apresentado e  $\alpha = 0, \beta = 1$  são fixados. Além disso, uma condição inicial diferente de zero  $v_0(x) = 1 + \sin((2x + 1)\pi)$  é dada, junto com um novo estado de referência  $\tilde{x} = x - v_0(x)$ , tal que um termo de entrada constante  $\mathbf{b}_{ref}$  seja obtido.

Com relação ao vetor de saída, todos os estados devem ser levados em consideração, de modo que  $\mathbf{c} = \frac{1}{k}[1, \dots, 1]^T$  é uma opção adequada. É importante ressaltar que, uma vez que o objetivo deste processo é reconstruir os estados do sistema, o vetor de saída é usado somente para construir as matrizes de projeção para a redução, e não para obter uma saída de fato.

A Fig. 3.7 mostra os estados reconstruídos para cada uma das rotinas independentes de treinamento, bem como os estados do sistema original. Como a POD não é o objetivo principal desta tese e foi simulada previamente apenas para efeito de comparação, ela é deixada de lado de agora em diante. Também pode ser dito que, devido à entrada constante e suas propriedades intrínsecas, a POD provavelmente teria uma performance melhor que os demais métodos, fazendo sua simulação desnecessária.

Pode-se ver que a abordagem dos multimomentos não é capaz de reconstruir os estados do sistema original, uma vez que há um grande desvio entre este e o FOM simulado. O método hermitiano, entretanto, apresenta resultados bastante satisfatórios. O erro absoluto deste em comparação ao modelo original também é mostrado e seus valores, apesar de altos em alguns pontos, são relativamente baixos em regime permanente, diferentemente ao que se observa no caso dos multimomentos.

Os detalhes da redução podem ser vistos a seguir:

- Ordem cheia:  $n = 500$
- Integrador: ode45
- Passo temporal: 10 ms
- Abordagem hermitiana

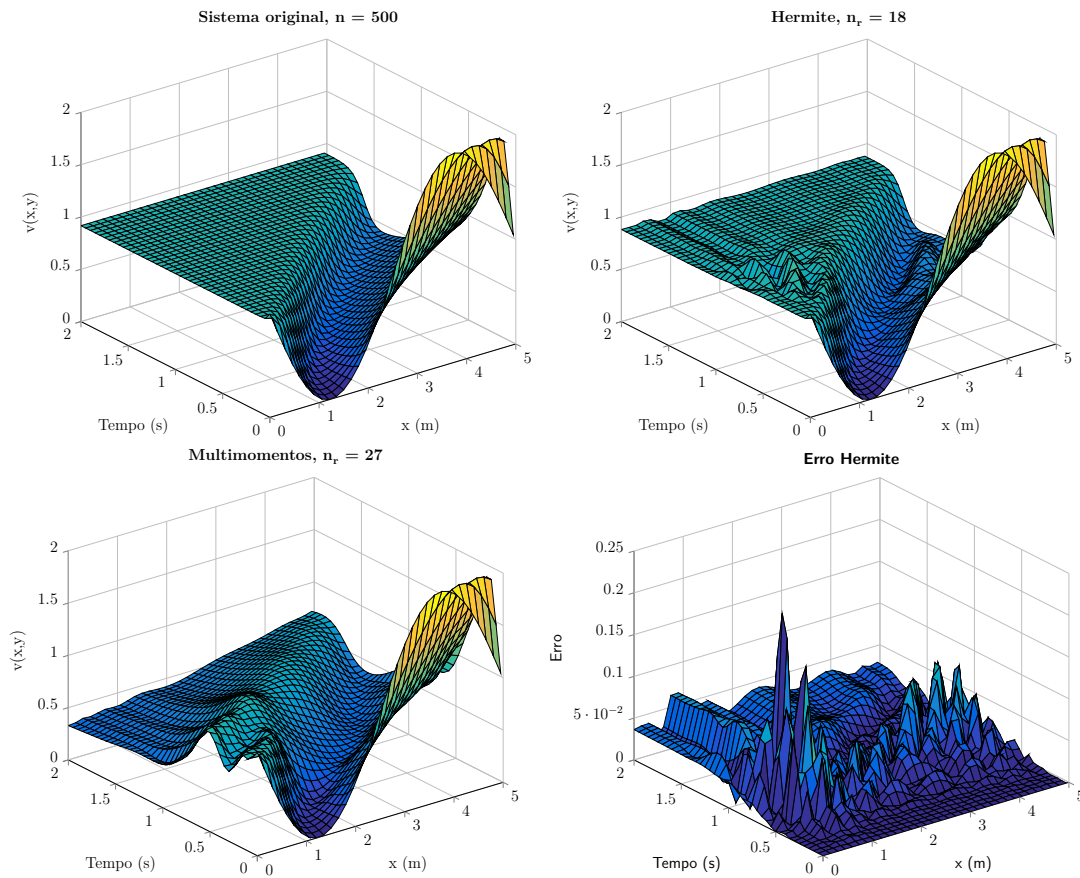


Figura 3.7: Caso não-controlado da eq. de Burgers com  $v_0(x) = 1 + \sin((2x + 1)\pi)$ .

- Ordem reduzida:  $n_{r,her} = 18$
- Pontos de expansão: 9 obtidos pelo IRKA
- Abordagem dos multimomentos
  - Ordem reduzida:  $n_{r,multi} = 27$
  - Pontos de expansão: 9 obtidos pelo IRKA

Também deve ser notado que o método dos multimomentos entrega modelos instáveis com mais frequência que o hermitiano. Este é o motivo para o número de pontos de expansão ser levemente maior que nos casos anteriores: a abordagem com os multimomentos conseguiu entregar resultados estáveis somente com nove pontos.

### 3.3.3 Equação de Chafee-Infante

De modo similar ao feito na equação de Burgers, somente a equação de Chafee-Infante unidimensional [10, 20] é levada em consideração neste capítulo. Assim como o modelo anterior, este também é formado por um conjunto de quatro equações que definem a dinâmica e as condições de contorno e iniciais do sistema. Nota-se que este modelo tem somente uma fonte de não-linearidade, que é o termo cúbico em (3.81).

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v^3 = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v \quad \text{em } (0, L) \times (0, T) \quad (3.81)$$

$$\alpha v(0, t) + \beta \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = u(t) \quad \text{em } (0, T) \quad (3.82)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(L, t) = 0 \quad \text{em } (0, T) \quad (3.83)$$

$$v(x, 0) = v_0(x) \quad \text{em } (0, L) \quad (3.84)$$

A discretização espacial desta PDE parabólica leva a uma série de equações que, por sua vez, podem ser quadrático-bilinearizadas pelo processo descrito em § 2.2.2. Especificamente, uma nova variável de estado pode ser definida como  $w_i = v_i^2$ , com  $\dot{w}_i = 2v_i \dot{v}_i$ . Isso leva a um aumento no número de QBDAEs em comparação ao número de pontos de discretização. Se o sistema original for discretizado em  $k$  segmentos, a representação quadrático-bilinear tem  $2k$  equações.

#### Controle de contorno

O mesmo procedimento feito com a equação de Burgers é repetido com a de Chafee-Infante. Como a motivação para se elaborar técnicas de redução que mimetizem o comportamento de transferência do sistema original no reduzido já foi apresentada, as simulações com a POD são deixadas de lado.

A Fig. 3.8 mostra a resposta no tempo do controle de contorno de um sistema governado pela equação de Chafee-Infante a uma entrada  $u(t) = \frac{1}{2}(\cos(\pi t) + 1)$  em sua posição  $x = 0$  – borda esquerda. Sua saída é, como em § 3.3.2, o valor da variável de estado no contorno direito – posição  $x = L$ . Para se obter essas condições, os parâmetros  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\mathbf{c} = [0, \dots, 0, 1]^T$  e  $v_0(x) = 0$  são fixados.

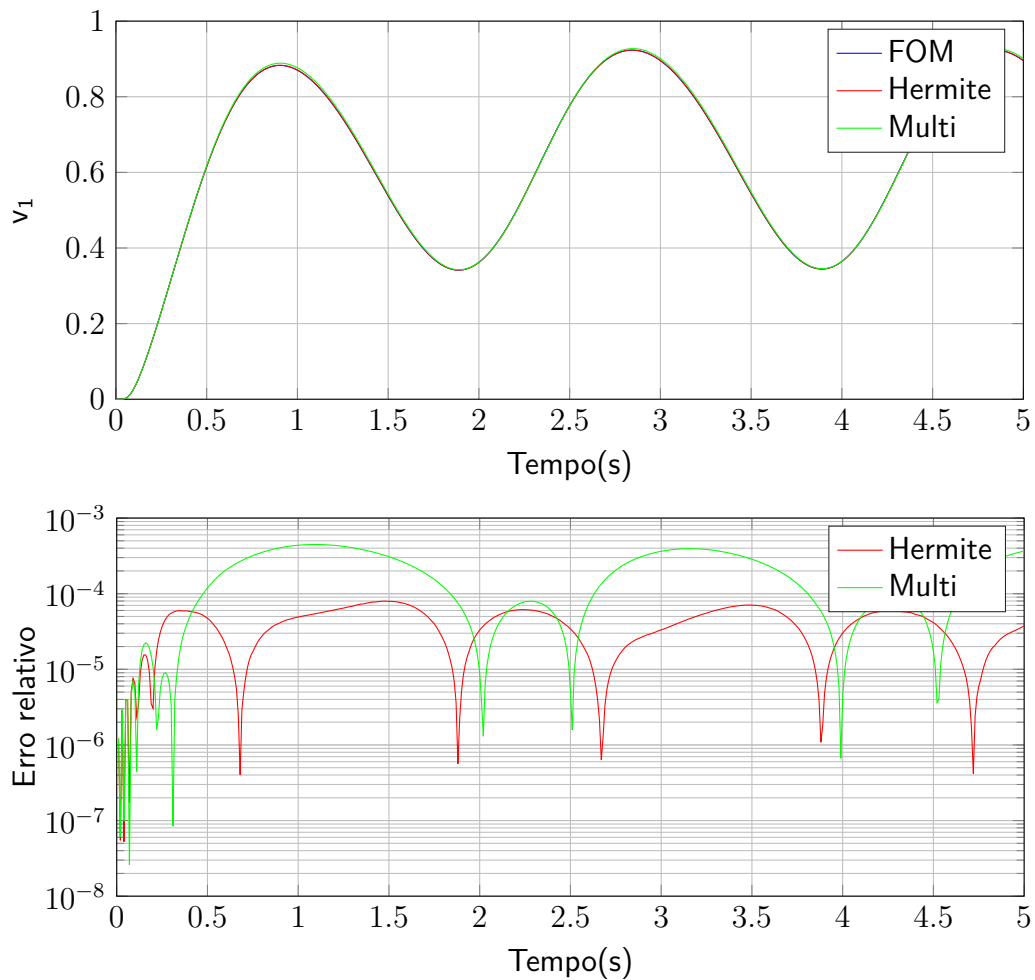


Figura 3.8: Controle de contorno de Chafee-Infante com  $u(t) = \frac{1}{2}(\cos(\pi t) + 1)$ .

Mais uma vez, os detalhes dos parâmetros de redução e simulação podem ser vistos na listagem que segue:

- Entrada:  $u(t) = \frac{1}{2}(\cos(\pi t) + 1)$
- Integrador: ode15s
- Passo temporal: 10 ms
- Sistema original
  - Ordem cheia:  $n = 1000$
  - Tempo de simulação: 25.50 s
- Abordagem hermitiana

- Ordem reduzida:  $n_{r,her} = 8$
- Pontos de expansão: 4 obtidos pelo IRKA
- Norma do erro relativo:  $1.03 \cdot 10^{-3}$
- Tempo de simulação:  $1.56 \cdot 10^{-1}$  s
- Abordagem dos multimomentos
  - Ordem reduzida:  $n_{r,multi} = 12$
  - Pontos de expansão: 4 obtidos pelo IRKA
  - Norma do erro relativo:  $5.34 \cdot 10^{-3}$
  - Tempo de simulação:  $1.50 \cdot 10^{-1}$  s

Pode ser visto que, mais uma vez, os dois métodos independentes de treinamento entregaram modelos reduzidos com qualidade similar. A desvantagem da abordagem dos multimomentos é a mesma que antes: a ordem reduzida é maior. Entretanto, pode-se checar que os tempos de simulação de ambos os modelos são praticamente os mesmos.

Também pode ser dito que a abordagem dos multimomentos não é tão robusta que a outra, uma vez que os modelos resultantes dela são mais suscetíveis a serem instáveis. Este é o motivo pelo qual somente quatro pontos de expansão foram usados nestas reduções: todas as tentativas com mais pontos não resultaram em modelos estáveis pela técnica dos multimomentos.

### Caso não-controlado

E, novamente, o caso não-controlado é analisado para se investigar quão capazes os métodos de redução são de reconstruir os estados do sistema original. Para tal,  $\alpha = 0, \beta = 1$  são fixados e um novo estado de referência  $\tilde{x} = x - v_0(x)$  foi criado, exatamente como feito no caso da equação de Burgers.

A Fig. 3.9 exemplifica uma resposta no tempo dos estados com uma condição inicial  $v_0(x) = \frac{1}{10} + \frac{7}{10} \cdot \sin^2((2x + 1)\pi)$  e nenhuma entrada.

Pode ser visto que não há nenhuma superfície correspondente à redução por multimomentos. Isso se deve ao fato de que não foi possível simulá-la, uma vez que todos os modelos

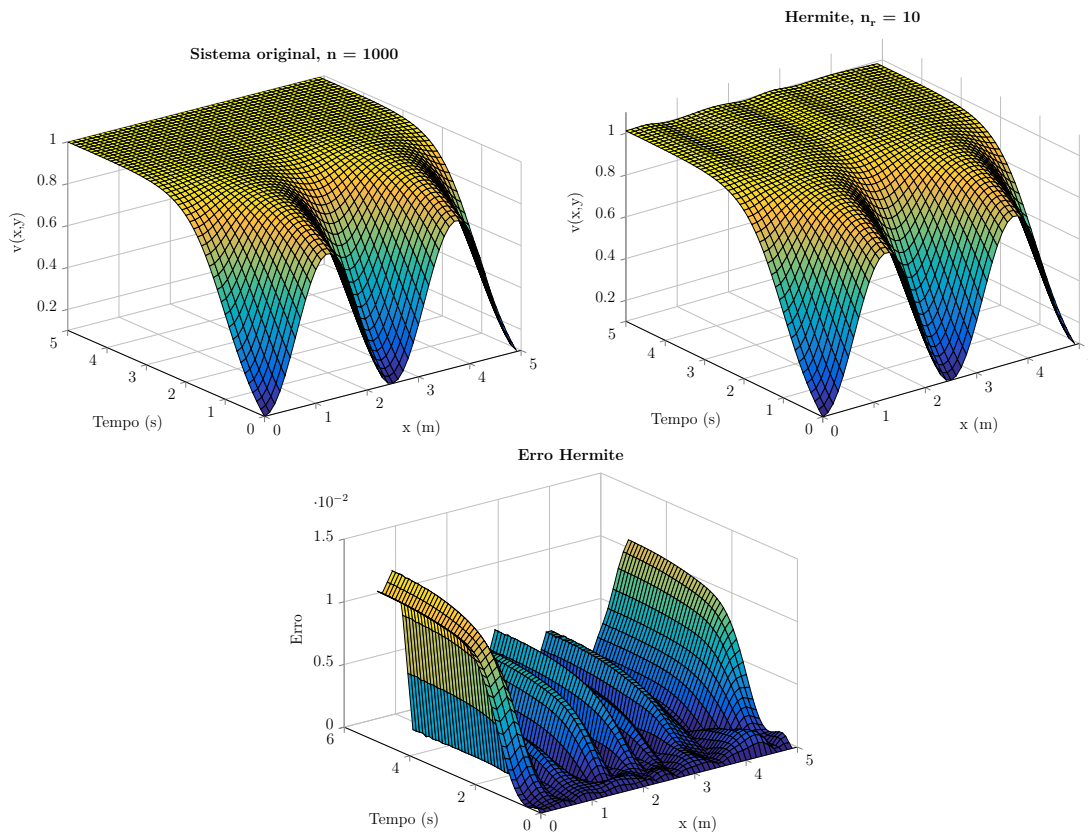


Figura 3.9: Caso não-controlado de Chafee-Infante com  $v_0(x) = \frac{1}{10} + \frac{7}{10} \cdot \sin^2((2x + 1)\pi)$ .

reduzidos foram instáveis. Isso exemplifica, também, a robustez do método hermitiano em comparação ao dos multimomentos.

Também é possível ver que a técnica hermitiana aproxima os estados originais do sistema satisfatoriamente, com erros na ordem de  $10^{-2}$  em seus máximos. Pode-se dizer, então, que apesar de a rotina hermitiana ter sido projetada para reproduzir bem o comportamento entrada-saída do sistema original, ela também pode reconstruir os estados originais com fidelidade.

*Observação 3.5* (Por que somente duas funções de transferência são o bastante?). Pode-se ver pelos resultados das simulações que os métodos de redução que são baseados somente nas duas primeiras funções de transferência de um modelo QB podem dar uma boa aproximação. Isso se deve ao fato de toda a informação sobre as não-linearidades do sistemas, ou seja, as matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{N}$ , já serem levadas em consideração [7]. Ademais, pode-se argumentar que há uma tendência de os subsistemas de ordem superior representarem um papel menos importante na dinâmica do sistema em comparação aos dois primeiros. Já que estes

respondem à  $k$ -ésima potência da entrada, suas respostas devem ser gradualmente menores, tal que a resposta total no tempo ainda seja limitada. Se os subsistemas de ordem superior crescessem em importância com o aumento de  $k$ , pequenas entradas gerariam saídas muito grandes. △

## 3.4 Formulação do Problema

Pode-se checar dos teoremas citados anteriormente que eles são válidos somente para sistemas SISO. Isto se deve ao fato que não há nenhum método que contemple o caso MIMO. Expandi-los de uma maneira direta – ou seja, apenas substituindo-se os vetores de entrada e saída por matrizes de entrada e saída – leva a operações inconsistentes e que não podem ser feitas.

Neste sentido, é necessário investigar como sistemas quadrático-bilineares do caso MIMO funcionam antes de se desenvolver técnicas de redução em si.

Este é, portanto, o maior problema a ser transposto nesta tese: elaborar uma compreensão sólida de sistemas quadrático-bilineares com múltiplas entradas e saídas de modo tal que a derivação de uma rotina de redução de ordem se torne uma tarefa mais fácil e tangível.



## Capítulo 4

# Modelos Quadrático-Bilineares MIMO

Neste capítulo, não somente serão citadas as abordagens de redução de sistemas MIMO, como também suas considerações preliminares serão estabelecidas.

Primeiramente, os fundamentos de sistemas QB MIMO serão apresentados, enfatizando suas diferenças com o caso SISO. Seguindo, as matrizes de transferência desta classe de modelos pode ser derivada. Com a ajuda das considerações já previamente mencionadas, os subespaços de Krylov que constroem as matrizes de projeção podem ser formados e sua validade com respeito à coincidência de momentos, formalmente confirmada e matematicamente provada.

### 4.1 Teoria de sistemas de modelos MIMO

A teoria de sistemas acerca de plantas MIMO não-lineares é bastante similar àquela acerca de modelos SISO. Entretanto, alguns ajustes precisam ser endereçados de modo a não se cometer erros simples. O objetivo desta seção é enfatizá-los.

### 4.1.1 Fundamentos de sistemas QB MIMO

Antes de mais nada, é preciso apresentar a equação que define um modelo quadrático-bilinear MIMO. Isso é feito pelas equações que seguem:

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{H}(\mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t)) + \sum_{j=1}^m \mathbf{N}_j \mathbf{x}(t) u_j(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (4.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (4.2)$$

Além do fato de que os vetores de entrada e saída  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}^T$ , terem sido substituídos por suas formas matriciais,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ , há uma outra diferença significativa que é digna de ser comentada. A presença de mais de uma matriz  $\mathbf{N}$  levanta perguntas sobre como manipulá-las matematicamente.

Definindo-se uma outra representação para as  $m$  matrizes  $\mathbf{N}_j$  como  $\bar{\mathbf{N}} = [\mathbf{N}_1 \ \mathbf{N}_2 \ \dots \ \mathbf{N}_m] \in \mathbb{R}^{n \times n \cdot m}$  [16], o sistema QB pode ser reescrito como a seguir:

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{H}(\mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t)) + \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{u}(t) \otimes \mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (4.3)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (4.4)$$

Esta representação facilita as derivações algébricas das expressões das matrizes de projeção. Pode-se checar a equivalência das duas formas de se escrever as equações da dinâmica de um sistema quadrático-bilinear pelo Exemplo 4.1.

*Exemplo 4.1* (As duas representações do termo bilinear de um sistema QB MIMO). Supõe-se que um sistema QB MIMO tenha  $m = 3$  entradas, tal que  $\bar{\mathbf{N}} = [\mathbf{N}_1 \ \mathbf{N}_2 \ \mathbf{N}_3]$  e  $\mathbf{u}(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ u_3(t)]^T$ . A multiplicação  $\bar{\mathbf{N}}(\mathbf{u}(t) \otimes \mathbf{x}(t))$  pode ser reescrita como representada em (4.5).

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{N}}(\mathbf{u}(t) \otimes \mathbf{x}(t)) &= [\mathbf{N}_1 \ \mathbf{N}_2 \ \mathbf{N}_3] \cdot \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{array} \right] \otimes \mathbf{x}(t) \end{array} \right) \\
&= [\mathbf{N}_1 \ \mathbf{N}_2 \ \mathbf{N}_3] \cdot \left[ \begin{array}{c} u_1(t)\mathbf{x}(t) \\ u_2(t)\mathbf{x}(t) \\ u_3(t)\mathbf{x}(t) \end{array} \right] \\
&= \mathbf{N}_1 u_1(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{N}_2 u_2(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{N}_3 u_3(t)\mathbf{x}(t) \\
&= \sum_{j=1}^{m=3} \mathbf{N}_j u_j(t)\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^{m=3} \mathbf{N}_j \mathbf{x}(t) u_j(t) \tag{4.5}
\end{aligned}$$

△

Com a ajuda de (4.3), é possível quebrar o modelo QB em uma série de sistemas homogêneos, assim como em § 2.3.1 via abordagem variacional.

Analogamente ao caso SISO, as equações variacionais de modelos MIMO foram derivadas comparando-se os termos de potências iguais de  $\alpha$  quando uma entrada da forma  $\alpha \mathbf{u}(t)$  for fixada e uma resposta no tempo  $\mathbf{x}(t) = \alpha \mathbf{x}_1 + \alpha^2 \mathbf{x}_2 + \alpha^3 \mathbf{x}_3 + \dots$  for admitida. Os subsistemas que resultam da substituição destes termos na equação diferencial original são dados pelas equações que seguem:

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{4.6}$$

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{H}(\mathbf{x}_1(t) \otimes \mathbf{x}_1(t)) + \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{u}(t) \otimes \mathbf{x}_1(t)) \tag{4.7}$$

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}_k(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_k(t) + \sum_{\substack{i,j \geq 1 \\ i+j=k}} \mathbf{H}(\mathbf{x}_i(t) \otimes \mathbf{x}_j(t)) + \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{u}(t) \otimes \mathbf{x}_{k-1}(t)) \tag{4.8}$$

Tendo as equações variacionais em mãos, é possível estudar como as funções de transferência de um sistema quadrático-bilinear MIMO podem ser derivadas.

*Observação 4.1* (A matriz  $\bar{\mathbf{N}}$  vista como um tensor). Com a modificação da representação das  $m$  matrizes  $\mathbf{N}_j$  em uma só matriz  $\bar{\mathbf{N}}$ , também é possível vê-la como uma *matricization*

de modo 1 de um tensor  $\mathcal{N} \in \mathbb{R}^{n \times n \times m}$  cuja  $j$ -ésima camada é a matriz  $\mathbf{N}_j$ . Matematicamente, a relação (4.9) é válida.

$$\mathcal{N}_{(:, :, j)} = \mathbf{N}_j \Rightarrow \mathbf{N}^{(1)} = \bar{\mathbf{N}} \quad (4.9)$$

Esta interpretação será útil ao se construir os subespaços de Krylov. △

### 4.1.2 Funções de Transferência de Sistemas MIMO QB

Assim como feito com sistemas SISO, as funções de transferência de um modelo QB MIMO podem ser derivadas pela abordagem das exponenciais crescentes. Para que haja um bom entendimento, seus passos são listados a seguir.

- Se a função de transferência dos subsistemas de ordem até  $k$  devem ser determinadas, uma superposição de  $k$  exponenciais crescentes é fixada como entrada do sistema, assim como na equação (4.10), onde  $\mathbf{1}_m \in \mathbb{R}^m$  é um vetor coluna com  $m$  uns.

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{1}_m \cdot \sum_{i=1}^k e^{s_i t}, \quad s_i > 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (4.10)$$

- Calcular as expressões que devem ser substituídas nas equações variacionais, ou seja,  $\mathbf{x}_k(t)$ ,  $\dot{\mathbf{x}}_k(t)$ ,  $(\mathbf{u}(t) \otimes \mathbf{x}_{k-1}(t))$ , e a combinação de  $(\mathbf{x}_i(t) \otimes \mathbf{x}_j(t))$ , em termos das funções de transferência dos estados  $\mathbf{F}_i$  com  $i \leq k$ .
- Fixar todas estas expressões nas equações diferenciais obtidas com a análise variacional.
- Separar a equação obtida ao se comparar os termos que multiplicam  $\mathbf{1}_{m^k} \cdot e^{\sum_{i=1}^k s_i t} = \mathbf{1}_{m^k} \cdot e^{(s_1 + s_2 + \dots + s_k)t}$ .
- Isolar  $\mathbf{F}_k(s_1, s_2, \dots, s_k)$ .
- Multiplicar tudo por  $\mathbf{C}$  pela esquerda para se obter o comportamento de transferência entre as entradas e saídas  $\mathbf{G}_k(s_1, s_2, \dots, s_k)$ .

*Observação 4.2* (Núcleos multivariáveis de sistemas MIMO). Uma observação importante a ser feita com respeito à abordagem de exponenciais crescentes para sistemas MIMO é relacionada aos núcleos multivariáveis, já que sua transformada de Laplace corresponde à função de transferência.

Diferentemente do caso SISO, os núcleos dos estados – e, conseqüentemente, as funções de transferência dos estados – não são mais vetores, mas matrizes. No primeiro subsistema, o significado de cada elemento desta matriz é relativamente intuitivo. Com a ajuda de (4.11), pode-se ver que cada linha do núcleo  $\mathbf{f}_1(\sigma)$  corresponde a um estado no vetor  $\mathbf{x}_1(t)$  e cada coluna, a uma respectiva entrada de  $\mathbf{u}(t)$ .

$$\mathbf{x}_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_1(\sigma) \mathbf{u}(t - \sigma) d\sigma \quad (4.11)$$

Sistemas de ordem superior não se comportam desta maneira. Em § 2.3.2, a equação (2.46) mostra como os núcleos de ordem superior e as entradas constroem a resposta temporal  $\mathbf{x}_k(t)$  de um sistema SISO de  $k$ -ésima ordem. A multiplicação  $\mathbf{u}(t - \sigma_1) \dots \mathbf{u}(t - \sigma_k)$  não é possível quando se considera modelos MIMO, uma vez que a entrada não é mais um escalar, mas um vetor.

Seguindo os mesmos passos que em § 2.3.4, as expressões para a resposta temporal e núcleo do segundo subsistema  $\mathbf{x}_2(t)$  podem ser derivados, como representado nas equações seguintes:

$$\mathbf{x}_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_2(\sigma_1, \sigma_2) \cdot \mathbf{u}(t - \sigma_1) \otimes \mathbf{u}(t - \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_2(\sigma_1, \sigma_2) = & \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{\Phi}(\sigma) \mathbf{E}^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{f}_1(\sigma_1) \otimes \mathbf{f}_1(\sigma_2)) d\sigma \\ & + \mathbf{\Phi}(\sigma_2) \mathbf{E}^{-1} \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{f}_1(\sigma_1)) \in \mathbb{R}^{n \times m^2} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Em (4.13) e daqui para frente, a notação  $\mathbf{I}_m$  será usada para representar uma matriz identidade de ordem  $m$ . Esse procedimento pode ser feito até uma ordem arbitrária  $k$ , cuja resposta temporal pode ser escrita como a seguir:

$$\mathbf{x}_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_k(\sigma_1, \dots, \sigma_k) \cdot \mathbf{u}(t - \sigma_1) \otimes \dots \otimes \mathbf{u}(t - \sigma_k) d\sigma_1 \dots d\sigma_k \quad (4.14)$$

Conclui-se que as linhas da matriz de núcleos  $\mathbf{f}_k(\sigma_1, \dots, \sigma_k) \mathbb{R}^{n \times m^k}$  correspondem aos estados em  $\mathbf{x}_k(t)$  e suas colunas a cada elemento de  $\mathbf{u}(t) \otimes \dots \otimes \mathbf{u}(t)$  ( $k$  vezes). Consequentemente, isto significa que  $\mathbf{f}_k(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$  tem  $m^k$  colunas, ao invés de somente  $m$  como em casos gerais de na teoria de sistemas. Isso explica o porquê de a coluna de uns ter  $m^k$  elementos, em comparando os termos multiplicando  $\mathbf{1}_{m^k} \cdot e^{(s_1+s_2+\dots+s_k)t}$  na abordagem das exponenciais crescentes para sistemas MIMO.

No caso do subsistema de segunda ordem, as colunas correspondem a cada elemento do vetor  $\mathbf{u}(t) \otimes \mathbf{u}(t)$  e, logo, o núcleo  $\mathbf{f}_2(\sigma_1, \sigma_2)$  – e a matriz de transferência  $\mathbf{G}_2(s_1, s_2) = \mathbf{C}\mathbf{F}_2(s_1, s_2)$  – teriam  $m^2$  colunas. Isso confirma e explica o que foi mencionado na Observação 2.8.

△

### Subsistema de Primeira Ordem

Para o primeiro subsistema, ou seja,  $k = 1$ , a matriz de transferência corresponde a um sistema linear simples, como já feito em § 2.3.3. Como não há mudanças grandes nas derivações de matrizes de transferência MIMO e SISO, seu procedimento não será escrito neste texto. Seu resultado, contudo, é:

$$\mathbf{F}_1(s) = -(\mathbf{A} - s\mathbf{E})^{-1}\mathbf{B} = -\mathbf{A}_s^{-1}\mathbf{B} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{G}_1(s) = -\mathbf{C}(\mathbf{A} - s\mathbf{E})^{-1}\mathbf{B} = -\mathbf{C}\mathbf{A}_s^{-1}\mathbf{B} \quad (4.16)$$

### Subsistema de Segunda Ordem

Mais um vez, o segundo subsistema de um modelo QB deve ser investigado com mais profundidade, já que ele é não-linear. As equações (4.17) - (4.20) representam os termos a serem substituídos na equação variacional da resposta a uma entrada da forma  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{1}_m \cdot e^{(s_1+s_2)t}$ .

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_2(t) &= 2\mathbf{F}_2(s_1, s_2)\mathbf{1}_{m^2} \cdot e^{(s_1+s_2)t} + \mathbf{F}_2(s_1, s_1)\mathbf{1}_{m^2} \cdot e^{2s_1t} \\ &\quad + \mathbf{F}_2(s_2, s_2)\mathbf{1}_{m^2} \cdot e^{2s_2t}\end{aligned}\quad (4.17)$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_2(t) &= 2(s_1 + s_2)\mathbf{F}_2(s_1, s_2)\mathbf{1}_{m^2} \cdot e^{(s_1+s_2)t} + 2s_1\mathbf{F}_2(s_1, s_1)\mathbf{1}_{m^2} \cdot e^{2s_1t} \\ &\quad + 2s_2\mathbf{F}_2(s_2, s_2)\mathbf{1}_{m^2} \cdot e^{2s_2t}\end{aligned}\quad (4.18)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1(t) \otimes \mathbf{x}_1(t) &= [\mathbf{F}_1(s_1) \otimes \mathbf{F}_1(s_1)]\mathbf{1}_{m^2} \cdot e^{2s_1t} + [\mathbf{F}_1(s_1) \otimes \mathbf{F}_1(s_2)]\mathbf{1}_{m^2} \cdot e^{(s_1+s_2)t} \\ &\quad + [\mathbf{F}_1(s_2) \otimes \mathbf{F}_1(s_1)]\mathbf{1}_{m^2} \cdot e^{(s_1+s_2)t} + [\mathbf{F}_1(s_2) \otimes \mathbf{F}_1(s_2)]\mathbf{1}_{m^2} \cdot e^{2s_2t}\end{aligned}\quad (4.19)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t) \otimes \mathbf{x}_1(t) &= [\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{F}_1(s_1)]\mathbf{1}_{m^2} \cdot e^{2s_1t} + [\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{F}_1(s_2)]\mathbf{1}_{m^2} \cdot e^{2s_2t} \\ &\quad + [\mathbf{I}_m \otimes (\mathbf{F}_1(s_1) + \mathbf{F}_1(s_2))]\mathbf{1}_{m^2} \cdot e^{(s_1+s_2)t}\end{aligned}\quad (4.20)$$

Substituindo estes termos em seus respectivos lugares na segunda equação variacional  $\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{H}(\mathbf{x}_1(t) \otimes \mathbf{x}_1(t)) + \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{u}(t) \otimes \mathbf{x}_1(t))$  e isolando o termo  $\mathbf{F}_2(s_1, s_2)$ , chega-se à equação que segue:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_2(s_1, s_2) &= -\frac{1}{2}(\mathbf{A} - (s_1 + s_2)\mathbf{E})^{-1}[\mathbf{H}(\mathbf{F}_1(s_1) \otimes \mathbf{F}_1(s_2) + \mathbf{F}_1(s_2) \otimes \mathbf{F}_1(s_1)) \\ &\quad + \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{I}_m \otimes (\mathbf{F}_1(s_1) + \mathbf{F}_1(s_2)))]\end{aligned}\quad (4.21)$$

Multiplicando (4.21) por  $\mathbf{C}$  pela esquerda e substituindo os termos  $\mathbf{F}_1(s) = -\mathbf{A}_s^{-1}\mathbf{B}$ , encontra-se a matriz e transferência de segunda ordem desejada.

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_2(s_1, s_2) &= -\frac{1}{2}\mathbf{C}\mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1}[\mathbf{H}(\mathbf{A}_{s_1}^{-1}\mathbf{B} \otimes \mathbf{A}_{s_2}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{A}_{s_2}^{-1}\mathbf{B} \otimes \mathbf{A}_{s_1}^{-1}\mathbf{B}) \\ &\quad - \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{I}_m \otimes (\mathbf{A}_{s_1}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{A}_{s_2}^{-1}\mathbf{B}))]\end{aligned}\quad (4.22)$$

Pode-se notar com apenas alguns cálculos simples que a dimensão a matriz de transferência resultante é  $(p, m^2)$ . Com a expressão (4.22), também é possível computar sua primeira derivada – ou momento de primeira ordem – como explicitado pela expressão a seguir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{G}_2}{\partial s_1}(s_1, s_2) = & -\frac{1}{2} \mathbf{C} \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{H} (\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{B}) \\
& -\frac{1}{2} \mathbf{C} \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{H} (\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{B}) \\
& -\frac{1}{2} \mathbf{C} \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \bar{\mathbf{N}} (\mathbf{I}_m \otimes (\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{B})) \\
& -\frac{1}{2} \mathbf{C} \mathbf{A}_{s_1+s_2}^{-1} \bar{\mathbf{N}} (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{B})
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Pode-se ver que as expressões (4.22) e (4.23) também podem ser aplicadas ao caso SISO. O resultado recairia sobre (2.66) e sua respectiva derivada de primeira ordem, já que  $\mathbf{I}_m \otimes (\mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{B}) = \mathbf{A}_{s_1}^{-1} \mathbf{b} + \mathbf{A}_{s_2}^{-1} \mathbf{b}$  e  $\bar{\mathbf{N}} = \mathbf{N}_1 = \mathbf{N}$  para  $m = 1$ .

*Observação 4.3* (Derivadas com respeito a  $s_2$ ). A primeira derivada com respeito a  $s_2$  pode ser feita analogamente à com respeito a  $s_1$ . Entretanto, as técnicas de redução que serão vistas nas próximas seções levarão em conta somente a parte das funções de transferência que estão ao longo do eixo  $s_1 = s_2$ .

Considerando-se esta premissa, não haverá necessidade de calcular  $\frac{\partial \mathbf{G}_2}{\partial s_2}$  explicitamente, uma vez que ela terá o mesmo valor que  $\frac{\partial \mathbf{G}_2}{\partial s_1}$ .  $\triangle$

Com estas expressões, é possível abordar os métodos de redução de sistemas quadrático-bilineares MIMO.

## 4.2 Abordagens de Redução de Ordem de Sistemas QB MIMO

Nesta seção, todas as abordagens desenvolvidas para reduzir modelos quadrático-bilineares MIMO são apresentadas e suas validades, provadas. Na última subseção, também há uma comparação de todos os métodos com respeito a esforços computacionais e qualidade da aproximação.

### 4.2.1 Primeiras Considerações das Funções de Transferência do Sistema

Como já mencionado na Observação 4.3, somente os momentos ao longo da reta  $s_1 = s_2$  serão considerados para todos os métodos de redução. Por este motivo, a matriz de transferência de segunda ordem do sistema e suas derivadas nos pontos  $(s_1, s_2) = (\sigma, \sigma)$  são escritos nas equações (4.24) e (4.25). A matriz de transferência do primeiro subsistema e suas derivadas não apresentam nenhuma diferença ao caso linear, que já é amplamente estudado na literatura. Portanto, elas não vão ser escritas explicitamente nesta seção.

*Observação 4.4* (Sobre a razão pela qual  $\mathbf{G}_2$  somente é calculada em  $(s_1, s_2) = (\sigma, \sigma)$ ). Pode-se achar estranho que somente os pontos de  $\mathbf{G}_2(s_1, s_2)$  que estão na reta  $s_1 = s_2 = \sigma$  são levados em consideração pelos métodos de redução. Entretanto, se esse não fosse o caso, uma malha de pontos de expansão teria que ser calculada, o que pode ser computacionalmente caro [7]. Resultados mostram que, no entanto, essa suposição pode entregar aproximações satisfatórias e que esta escolha pode ser um bom ponto de partida da pesquisa [34].  $\triangle$

$$\mathbf{G}_2(\sigma, \sigma) = -\mathbf{CA}_{2\sigma}^{-1}[\mathbf{H}(\mathbf{A}_\sigma^{-1}\mathbf{B} \otimes \mathbf{A}_\sigma^{-1}\mathbf{B}) - \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}_\sigma^{-1}\mathbf{B})] \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{G}_2}{\partial s_1}(\sigma, \sigma) = & -\mathbf{CA}_{2\sigma}^{-1}\mathbf{EA}_{2\sigma}^{-1}\mathbf{H}(\mathbf{A}_\sigma^{-1}\mathbf{B} \otimes \mathbf{A}_\sigma^{-1}\mathbf{B}) \\ & - \frac{1}{2}\mathbf{CA}_{2\sigma}^{-1}\mathbf{H}(\mathbf{A}_\sigma^{-1}\mathbf{EA}_\sigma^{-1}\mathbf{B} \otimes \mathbf{A}_\sigma^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{A}_\sigma^{-1}\mathbf{B} \otimes \mathbf{A}_\sigma^{-1}\mathbf{EA}_\sigma^{-1}\mathbf{B}) \\ & + \mathbf{CA}_{2\sigma}^{-1}\mathbf{EA}_{2\sigma}^{-1}\bar{\mathbf{N}}(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}_\sigma^{-1}\mathbf{B}) \\ & + \frac{1}{2}\mathbf{CA}_{2\sigma}^{-1}\bar{\mathbf{N}}(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}_\sigma^{-1}\mathbf{EA}_\sigma^{-1}\mathbf{B}) \end{aligned} \quad (4.25)$$

*Observação 4.5* (Matriz Hessiana simétrica). É importante ressaltar que, em contrapartida ao caso SISO, a relação  $\mathbf{H}(\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}) = \mathbf{H}(\mathbf{V} \otimes \mathbf{U})$  não é válida no caso MIMO mesmo que  $\mathbf{H}$  seja simétrica e, portanto, a segunda linha da equação (4.25) não pode ser simplificada ainda mais. Isso ocorre devido ao fato de que os termos dentro dos parêntesis não são mais vetores, mas matrizes. O Exemplo 4.2 ajuda a clarificar esta propriedade.  $\triangle$

*Exemplo 4.2* (O produto de Kronecker não é comutativo para matrizes). Seja  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n \times n^2}$  uma *matricization* de modo 1 de um tensor simétrico,  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2] \in \mathbb{R}^{n \times 2}$  e  $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2] \in$

$\mathbb{R}^{n \times 2}$  matrizes, onde  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n$  são vetores. Então, os produtos de Kronecker nas equações (4.26) e (4.27) valem.

$$\mathbf{U} \otimes \mathbf{V} = [\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{v}_2] \quad (4.26)$$

$$\mathbf{V} \otimes \mathbf{U} = [\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{u}_1 \quad \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{u}_1 \quad \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{u}_2] \quad (4.27)$$

Multiplicando estas equações por  $\mathbf{H}$  pela esquerda, chega-se a (4.28) e (4.29).

$$\mathbf{H}(\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}) = [\mathbf{H}(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_1) \quad \mathbf{H}(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_2) \quad \mathbf{H}(\mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{v}_1) \quad \mathbf{H}(\mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{v}_2)] \quad (4.28)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{V} \otimes \mathbf{U}) = [\mathbf{H}(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{u}_1) \quad \mathbf{H}(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{u}_2) \quad \mathbf{H}(\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{u}_1) \quad \mathbf{H}(\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{u}_2)] \quad (4.29)$$

Mas, se  $\mathbf{H}$  for simétrico, as equações (4.30) a (4.33) são válidas.

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_1) = \mathbf{H}(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{u}_1) \quad (4.30)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_2) = \mathbf{H}(\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{u}_1) \quad (4.31)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{v}_1) = \mathbf{H}(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{u}_2) \quad (4.32)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{v}_2) = \mathbf{H}(\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{u}_2) \quad (4.33)$$

Logo, (4.28) e (4.29) podem ser reescritas como a seguir:

$$\mathbf{H}(\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}) = [\mathbf{H}(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{u}_1) \quad \mathbf{H}(\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{u}_1) \quad \mathbf{H}(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{u}_2) \quad \mathbf{H}(\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{u}_2)] \quad (4.34)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{V} \otimes \mathbf{U}) = [\mathbf{H}(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{u}_1) \quad \mathbf{H}(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{u}_1) \quad \mathbf{H}(\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{u}_1) \quad \mathbf{H}(\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{u}_2)] \quad (4.35)$$

Logo, pode-se checar que, por conta da permutação da segunda e terceira coluna, as matrizes  $\mathbf{H}(\mathbf{U} \otimes \mathbf{V})$  e  $\mathbf{H}(\mathbf{V} \otimes \mathbf{U})$  não são iguais, mesmo que a matriz Hessiana do sistema for simétrica. △

### 4.2.2 Matrizes Reduzidas de Modelos Quadrático-Bilineares MIMO

Como a matriz bilinear do sistema teve que ser adaptada no caso MIMO, uma nova expressão para sua forma reduzida tem que ser derivada também. Considere a equação original do sistema quadrático-bilinear.

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{H}(\mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t)) + \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{u}(t) \otimes \mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (4.36)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (4.37)$$

Incluindo a aproximação  $\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{V}\mathbf{x}_r(t)$ , a equação seguinte pode ser escrita.

$$\mathbf{E}\mathbf{V}\dot{\mathbf{x}}_r(t) \approx \mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{x}_r(t) + \mathbf{H}(\mathbf{V}\mathbf{x}_r(t) \otimes \mathbf{V}\mathbf{x}_r(t)) + \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{u}(t) \otimes \mathbf{V}\mathbf{x}_r(t)) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (4.38)$$

$$\mathbf{y}_r(t) = \mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{x}_r(t) \quad (4.39)$$

Se o erro na equação dinâmica (4.38) é assumido ortogonal a um subespaço  $\mathbf{W}$  de dimensão  $n_r$ , como na relação (4.40), então uma redução de Petrov-Galerkin pode ser encontrada.

$$(\mathbf{E}\mathbf{V}\dot{\mathbf{x}}_r(t) - \mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{x}_r(t) - \mathbf{H}(\mathbf{V}\mathbf{x}_r(t) \otimes \mathbf{V}\mathbf{x}_r(t)) - \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{u}(t) \otimes \mathbf{V}\mathbf{x}_r(t)) - \mathbf{B}\mathbf{u}(t)) \perp \mathbf{W} \quad (4.40)$$

Sejam definidos  $\mathbf{E}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V}$ ,  $\mathbf{A}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{A} \mathbf{V}$ ,  $\mathbf{H}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{H}(\mathbf{V} \otimes \mathbf{V})$ ,  $\tilde{\mathbf{N}}_r = \mathbf{W}^T \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{V})$ ,  $\mathbf{B}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}_r = \mathbf{C}\mathbf{V}$  como as matrizes reduzidas do sistema, o ROM quadrático-bilinear pode ser escrito como a seguir:

$$\mathbf{E}_r \dot{\mathbf{x}}_r(t) = \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{H}_r(\mathbf{x}_r(t) \otimes \mathbf{x}_r(t)) + \tilde{\mathbf{N}}_r(\mathbf{u}(t) \otimes \mathbf{x}_r(t)) + \mathbf{B}_r \mathbf{u}(t) \quad (4.41)$$

$$\mathbf{y}_r(t) = \mathbf{C}_r \mathbf{x}_r(t) \quad (4.42)$$

A única matriz que apresenta uma diferença significativa em sua forma reduzida é, de fato, a matriz bilinear  $\tilde{\mathbf{N}}$ . As demais matrizes têm formas reduzidas análogas às do caso SISO.

### 4.2.3 Abordagem Tensorial com Blocos Krylov

**Teorema 4.1** (Coincidência de Momentos Oblíqua Tensorial por Blocos Krylov). *Sejam  $\mathbf{E}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$  uma matriz não-singular,  $\mathbf{A}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{A} \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$ ,  $\mathbf{H}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{H} (\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r^2}$ ,  $\bar{\mathbf{N}}_r = \mathbf{W}^T \bar{\mathbf{N}} (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{V}) \in \mathbb{R}^{n_r \times m \cdot n_r}$ ,  $\mathbf{B}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n_r \times m}$ ,  $\mathbf{C}_r = \mathbf{C} \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{p \times n_r}$  matrizes, com  $p = m$ ,  $\mathbf{H}$  uma matricization de modo 1 de um tensor simétrico  $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{n \times n \times n}$  e  $\mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times n_r}$  matrizes com posto máximo tais que (4.43) e (4.44) são válidas com  $\sigma_i \notin \{\Lambda(\mathbf{A}, \mathbf{E}), \Lambda(\mathbf{A}_r, \mathbf{E}_r)\}$ .*

$$\begin{aligned} \text{span}(\mathbf{V}) \supset \text{span} \{ & \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}, \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}, \dots, (\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E})^m \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}, \\ & \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1} [\mathbf{H}(\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}) - \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B})] \} \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \text{span}(\mathbf{W}) \supset \text{span} \{ & \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}^T, \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{H}^{(2)}(\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}^T), \\ & \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \bar{\mathbf{N}}^{(2)}(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}^T) \} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Então, as equações (4.45) a (4.48) também valem.

$$\frac{\partial^l \mathbf{G}_1}{\partial s^l}(\sigma_i) = \frac{\partial^l \mathbf{G}_{1,r}}{\partial s^l}(\sigma_i) \quad l = 0, \dots, m \quad (4.45)$$

$$\mathbf{G}_1(2\sigma_i) = \mathbf{G}_{1,r}(2\sigma_i) \quad (4.46)$$

$$\mathbf{G}_2(\sigma_i, \sigma_i) = \mathbf{G}_{2,r}(\sigma_i, \sigma_i) \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}_2}{\partial s_j}(\sigma_i, \sigma_i) = \frac{\partial \mathbf{G}_{2,r}}{\partial s_j}(\sigma_i, \sigma_i) \quad j = 1, 2 \quad (4.48)$$

*Demonstração.* Para demonstrar o Teorema 4.1, cada uma das condições de coincidência de momentos será provada separadamente. Se os projetores  $\mathbf{\Pi}_1 = \mathbf{V}(\mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{E}$  e  $\mathbf{\Pi}_2 = \mathbf{W}(\mathbf{V}^T \mathbf{E}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{E}^T$  são definidos, pode-se observar que  $\text{Im}(\mathbf{\Pi}_1) = \text{Im}(\mathbf{V})$  e  $\text{Im}(\mathbf{\Pi}_2) = \text{Im}(\mathbf{W})$ .

Com a ajuda deles, (4.45) pode ser provada como a seguir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{V} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \underbrace{\mathbf{B}_r}_{\mathbf{W}^T \mathbf{B}} &= \mathbf{V} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{A}_{\sigma_i} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{V} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{A}_{\sigma_i} \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \\
&= \mathbf{V} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \underbrace{\mathbf{W}^T \mathbf{A}_{\sigma_i} \mathbf{V}}_{\mathbf{A}_{r,\sigma_i}} (\mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \\
&= \mathbf{V} \underbrace{\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}}_{\mathbf{I}_{n_r}} (\mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \\
&= \underbrace{\mathbf{V} (\mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{E}}_{\mathbf{\Pi}_1} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \\
&= \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Multiplicando ambos os lados da equação (4.49) por  $\mathbf{C}$ , chega-se a (4.45) para  $l = 0$ . Para se provar esta condição para  $l = 1, \dots, m$ , os mesmos passos podem ser feitos para os próximos  $m$  blocos de direções de Krylov em  $\text{span}(\mathbf{V})$ . Para efeitos de compreensão, este mesmo procedimento também é apresentado com a direção seguinte,  $\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}$ .

$$\begin{aligned}
\mathbf{V} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \underbrace{\mathbf{E}_r}_{\mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V}} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}_r &= \mathbf{V} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{E} \underbrace{\mathbf{V} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}_r}_{\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}} \\
&= \mathbf{V} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{A}_{\sigma_i} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \\
&= \mathbf{V} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{A}_{\sigma_i} \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \\
&= \mathbf{V} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \underbrace{\mathbf{W}^T \mathbf{A}_{\sigma_i} \mathbf{V}}_{\mathbf{A}_{r,\sigma_i}} (\mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \\
&= \mathbf{V} \underbrace{\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}}_{\mathbf{I}_{n_r}} (\mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \\
&= \underbrace{\mathbf{V} (\mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{E}}_{\mathbf{\Pi}_1} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \\
&= \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Novamente, multiplicando (4.50) por  $\mathbf{C}$  pela esquerda leva à condição (4.45) para  $l = 1$ .

A demonstração da equação (4.46) também é análoga àquela em (4.49), como representado pelos próximos passos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \underbrace{\mathbf{C}_r^T}_{\mathbf{V}^T\mathbf{C}^T} &= \mathbf{W}\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \mathbf{V}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}^T = \mathbf{W}\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \mathbf{V}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^T \mathbf{\Pi}_2 \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}^T \\
&= \mathbf{W}\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \underbrace{\mathbf{V}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^T \mathbf{W}}_{\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^T} (\mathbf{V}^T \mathbf{E}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{E}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}^T \\
&= \mathbf{W} \underbrace{\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^T}_{\mathbf{I}_{n_r}} (\mathbf{V}^T \mathbf{E}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{E}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}^T \\
&= \underbrace{\mathbf{W} (\mathbf{V}^T \mathbf{E}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{E}^T}_{\mathbf{\Pi}_2} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}^T \\
&= \mathbf{\Pi}_2 \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}^T = \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}^T \tag{4.51}
\end{aligned}$$

E, multiplicando ambos os lados de (4.51) por  $\mathbf{B}^T$  pela esquerda, chega-se à condição (4.46).

Tão direta quanto às provas anteriores, a da relação (4.47) pode ser feita repetindo-se o procedimento análogo à última direção de  $\text{span}(\mathbf{V})$  e utilizando a relação (4.49).

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} [ &\underbrace{\mathbf{H}_r(\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}_r \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}_r)}_{\mathbf{W}^T \mathbf{H}(\mathbf{V} \otimes \mathbf{V})(\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}_r \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}_r)} - \underbrace{\bar{\mathbf{N}}_r(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}_r)}_{\mathbf{W}^T \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{V})(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}_r)} ] \\
&= \mathbf{V}\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} [\underbrace{\mathbf{W}^T \mathbf{H}(\mathbf{V}\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}_r \otimes \mathbf{V}\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}_r)}_{\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}} - \underbrace{\mathbf{W}^T \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{V}\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}_r)}_{\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}}] \\
&= \mathbf{V}\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1} [\mathbf{H}(\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}) - \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B})] \\
&= \underbrace{\mathbf{V}\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i} \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1}}_{\mathbf{\Pi}_1} [\mathbf{H}(\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}) - \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B})] \\
&= \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1} [\mathbf{H}(\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}) - \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B})] \tag{4.52}
\end{aligned}$$

Como já feito anteriormente, a multiplicação de (4.52) por  $\mathbf{C}$  pela esquerda resulta na relação de coincidência de momentos (4.47).

A demonstração da relação (4.48) é mais demorada que as demais. Para se deixá-la mais fácil, as equações (4.53) a (4.56) mostram, mais uma vez, a primeira derivada da segunda matriz de transferência, para  $j = 1, 2$ .

$$\frac{\partial \mathbf{G}_2}{\partial s_1}(\sigma_i, \sigma_i) = - \mathbf{C} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}) \quad (4.53)$$

$$- \frac{1}{2} \mathbf{C} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}) \quad (4.54)$$

$$+ \mathbf{C} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1} \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}) \quad (4.55)$$

$$+ \frac{1}{2} \mathbf{C} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1} \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}) \quad (4.56)$$

A coincidência dos momentos de primeira ordem será feita linha a linha. Primeiramente, a soma das linhas (4.53) e (4.55) é demonstrada com a ajuda das relações (4.51) e (4.52).

$$\begin{aligned} & \underbrace{\mathbf{C} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1}}_{\mathbf{C}_r \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} \mathbf{W}^T} \mathbf{E} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1} [\mathbf{H}(\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}) - \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B})] \\ & \underbrace{\mathbf{V} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1}}_{\mathbf{V} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1}} [\mathbf{H}_r(\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}_r \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}_r) - \bar{\mathbf{N}}_r(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}_r)] \\ & = \mathbf{C}_r \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} \underbrace{\mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V}}_{\mathbf{E}_r} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} [\mathbf{H}_r(\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}_r \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}_r) - \bar{\mathbf{N}}_r(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}_r)] \\ & = \mathbf{C}_r \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} \mathbf{E}_r \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} [\mathbf{H}_r(\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}_r \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}_r) - \bar{\mathbf{N}}_r(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}_r)] \end{aligned} \quad (4.57)$$

Para se provar a linha (4.54), o uso de *matricizations* é necessário. Mas, antes de discuti-la com mais profundidade, o segundo bloco de direções em  $\text{span}(\mathbf{W})$  deve ser trabalhado.

$$\begin{aligned} & \mathbf{W} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \underbrace{\mathbf{H}_r^{(2)}}_{\mathbf{V}^T \mathbf{H}^{(2)}(\mathbf{V} \otimes \mathbf{W})} (\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}_r \otimes \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}_r^T) \\ & = \mathbf{W} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{V}^T \mathbf{H}^{(2)} (\underbrace{\mathbf{V} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}_r}_{\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}} \otimes \underbrace{\mathbf{W} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}_r^T}_{\mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}^T}) \\ & = \mathbf{W} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{V}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{H}^{(2)} (\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}^T) \\ & = \underbrace{\mathbf{W} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{V}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^T \mathbf{\Pi}_2}_{\mathbf{\Pi}_2} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{H}^{(2)} (\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}^T) \\ & = \mathbf{\Pi}_2 \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{H}^{(2)} (\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}^T) = \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{H}^{(2)} (\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}^T) \end{aligned} \quad (4.58)$$

Multiplicando (4.58) por  $\mathbf{B}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}^T$  pela esquerda resulta em:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\mathbf{B}_r^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}^T \mathbf{W} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{H}_r^{(2)}}_{\mathbf{B}_r^T \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{V}^T} (\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}_r \otimes \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}_r^T) \\
&= \mathbf{B}_r^T \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}_r^T \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{H}_r^{(2)} (\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}_r \otimes \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}_r^T) \\
&= \mathbf{B}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{H}^{(2)} (\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}^T)
\end{aligned} \tag{4.59}$$

A equação (4.59) pode ser interpretada como uma igualdade de duas *matricizations* de modo 2 dos tensores representados em (4.60) e (4.61) .

$$\mathcal{P} = \mathcal{H} \times_1 (\mathbf{C} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1}) \times_2 (\mathbf{B}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T}) \times_3 (\mathbf{B}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T}) \tag{4.60}$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \mathcal{H}_{\mathcal{R}} \times_1 (\mathbf{C}_r \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1}) \times_2 (\mathbf{B}_r^T \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}_r^T \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T}) \times_3 (\mathbf{B}_r^T \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T}) \tag{4.61}$$

E, se suas *matricizations* de modo 2 são iguais, suas *matricizations* de modo 1 também têm que ser. Logo, a equação a seguir pode ser escrita.

$$\mathbf{C}_r \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} \mathbf{H}_r (\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}_r \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{E}_r \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}_r) = \mathbf{C} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1} \mathbf{H} (\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}) \tag{4.62}$$

No entanto, já que a matriz Hessiana é simétrica, ou seja,  $\mathbf{H}^{(2)} = \mathbf{H}^{(3)}$  e  $\mathbf{H}_r^{(2)} = \mathbf{H}_r^{(3)}$ , a equação (4.59) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{B}_r^T \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}_r^T \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{H}_r^{(3)} (\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}_r \otimes \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}_r^T) \\
&= \mathbf{B}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{H}^{(3)} (\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}^T)
\end{aligned} \tag{4.63}$$

E (4.63) pode ser interpretada como uma igualdade de duas *matricizations* de modo 3 dos tensores a seguir:

$$\mathcal{Q} = \mathcal{H} \times_1 (\mathbf{C} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1}) \times_2 (\mathbf{B}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T}) \times_3 (\mathbf{B}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T}) \tag{4.64}$$

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{R}} = \mathcal{H}_{\mathcal{R}} \times_1 (\mathbf{C}_r \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1}) \times_2 (\mathbf{B}_r^T \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T}) \times_3 (\mathbf{B}_r^T \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}_r^T \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T}) \tag{4.65}$$

Então, passando tudo à representação de modo 1, chega-se à equação que segue.

$$\mathbf{C}_r \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} \mathbf{H}_r (\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{E}_r \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}_r \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}_r) = \mathbf{C} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1} \mathbf{H} (\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B}) \quad (4.66)$$

A soma de (4.62) e (4.66) prova que a linha (4.54) em suas formas cheia e reduzida são iguais.

Por fim, a equivalência na linha (4.56) pode ser provada por um argumento análogo a o usado com (4.54). Mas, antes disso, o último bloco de direções em  $\text{span}(\mathbf{W})$  deve ser manipulado.

$$\begin{aligned} & \mathbf{W} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \underbrace{\bar{\mathbf{N}}_r^{(2)}}_{\mathbf{V}^T \bar{\mathbf{N}}^{(2)} (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{W})} (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}_r^T) \\ &= \mathbf{W} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{V}^T \bar{\mathbf{N}}^{(2)} (\mathbf{I}_m \otimes \underbrace{\mathbf{W} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}_r^T}_{\mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}^T}) \\ &= \mathbf{W} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{V}^T \bar{\mathbf{N}}^{(2)} (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}^T) \\ &= \mathbf{W} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{V}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \bar{\mathbf{N}}^{(2)} (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}^T) \\ &= \underbrace{\mathbf{W} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{V}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^T \mathbf{\Pi}_2}_{\mathbf{\Pi}_2} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \bar{\mathbf{N}}^{(2)} (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}^T) \\ &= \mathbf{\Pi}_2 \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \bar{\mathbf{N}}^{(2)} (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}^T) = \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \bar{\mathbf{N}}^{(2)} (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}^T) \end{aligned} \quad (4.67)$$

E, multiplicando (4.67) por  $\mathbf{B}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}^T$  pela esquerda, chega-se a

$$\begin{aligned} & \underbrace{\mathbf{B}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T}}_{\mathbf{B}_r^T \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{V}^T} \mathbf{E}^T \mathbf{W} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \underbrace{\bar{\mathbf{N}}_r^{(2)}}_{\mathbf{V}^T \bar{\mathbf{N}}^{(2)} (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{W})} (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}_r^T) \\ &= \mathbf{B}_r^T \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}_r^T \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \bar{\mathbf{N}}_r^{(2)} (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}_r^T) \\ &= \mathbf{B}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \bar{\mathbf{N}}^{(2)} (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}^T) \end{aligned} \quad (4.68)$$

Novamente, a relação (4.68) pode ser vista como uma igualdade de duas *matricizations* de modo 2. Logo, suas representações de modo 1 também têm que ser iguais, o que resulta em

$$\mathbf{C}\mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1}\bar{\mathbf{N}}(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1}\mathbf{B}) = \mathbf{C}_r\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1}\bar{\mathbf{N}}_r(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1}\mathbf{E}_r\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1}\mathbf{B}_r) \quad (4.69)$$

Com as equações (4.57), (4.62), (4.66) e (4.69), pode-se provar que os modelos de ordem cheia e reduzida têm momentos de primeira ordem da segunda função de transferência iguais. ■

Com este método, os momentos da matriz de transferência inteira coincidem, o que significa que todo o comportamento do sistema pode ser reproduzido nos pontos de expansão. No entanto, é possível ver que, para cada ponto de expansão,  $(m+1) \cdot m + m^2 = m + 2m^2$  direções são adicionadas às matrizes de projeção, o que pode fazer com que a ordem reduzida fique alta muito rapidamente.

Para se consertar este problema, as abordagens seguintes têm a vantagem de adicionar menos colunas às matrizes  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{W}$  por ponto de expansão. Uma discussão mais completa das vantagens e desvantagens de cada método é feita depois que todos forem apresentados, em § 4.3.

#### 4.2.4 Abordagem Pseudolinear com Blocos Krylov

**Teorema 4.2** (Coincidência de Momentos Oblíqua Pseudolinear com Blocos Krylov). *Sejam  $\mathbf{E}_r = \mathbf{W}^T\mathbf{E}\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$  uma matriz não-singular,  $\mathbf{A}_r = \mathbf{W}^T\mathbf{A}\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$ ,  $\mathbf{H}_r = \mathbf{W}^T\mathbf{H}(\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r^2}$ ,  $\bar{\mathbf{N}}_r = \mathbf{W}^T\bar{\mathbf{N}}(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{V}) \in \mathbb{R}^{n_r \times m \cdot n_r}$ ,  $\mathbf{B}_r = \mathbf{W}^T\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n_r \times m}$  e  $\mathbf{C}_r = \mathbf{C}\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{p \times n_r}$  matrizes com  $p = m$ ,  $\mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times n_r}$  com posto máximo tais que as equações (4.70) e (4.71) são válidas, com  $\sigma_i \notin \{\Lambda(\mathbf{A}, \mathbf{E}), \Lambda(\mathbf{A}_r, \mathbf{E}_r)\}$ .*

$$\text{span}(\mathbf{V}) \supset \text{span}_{i=1, \dots, k} \{\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1}\mathbf{B}, \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1}\mathbf{B}\} \quad (4.70)$$

$$\text{span}(\mathbf{W}) \supset \text{span}_{i=1, \dots, k} \{\mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T}\mathbf{C}^T, \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T}\mathbf{E}^T\mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T}\mathbf{C}^T\} \quad (4.71)$$

Então, as equações (4.72) e (4.77) também valem, para  $j = 1, 2$ .

$$\mathbf{G}_1(\sigma_i) = \mathbf{G}_{1,r}(\sigma_i) \quad (4.72)$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial s_j}(\sigma_i) = \frac{\partial \mathbf{G}_{1,r}}{\partial s_j}(\sigma_i) \quad (4.73)$$

$$\mathbf{G}_1(2\sigma_i) = \mathbf{G}_{1,r}(2\sigma_i) \quad (4.74)$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial s_j}(2\sigma_i) = \frac{\partial \mathbf{G}_{1,r}}{\partial s_j}(2\sigma_i) \quad (4.75)$$

$$\mathbf{G}_2(\sigma_i, \sigma_i) = \mathbf{G}_{2,r}(\sigma_i, \sigma_i) \quad (4.76)$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}_2}{\partial s_j}(\sigma_i, \sigma_i) = \frac{\partial \mathbf{G}_{2,r}}{\partial s_j}(\sigma_i, \sigma_i) \quad (4.77)$$

*Demonstração.* Assim como na demonstração do Teorema 4.1, as primeiras direções de  $\text{span}(\mathbf{V})$  e  $\text{span}(\mathbf{W})$  podem ser manipuladas para se chegar às equações:

$$\mathbf{V}\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1}\mathbf{B}_r = \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1}\mathbf{B} \quad (4.78)$$

$$\mathbf{W}\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T}\mathbf{C}_r^T = \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T}\mathbf{C}^T \quad (4.79)$$

A segunda direção de  $\text{span}(\mathbf{V})$  também pode ser analogamente trabalhada:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \underbrace{\mathbf{E}_r}_{\mathbf{W}^T\mathbf{E}\mathbf{V}} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1}\mathbf{B}_r &= \mathbf{V}\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{E} \underbrace{\mathbf{V}\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1}\mathbf{B}_r}_{\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1}\mathbf{B}} \\ &= \mathbf{V}\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{A}_{\sigma_i} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \\ &= \mathbf{V}\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{A}_{\sigma_i} \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \\ &= \mathbf{V}\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \underbrace{\mathbf{W}^T \mathbf{A}_{\sigma_i} \mathbf{V}}_{\mathbf{A}_{r,\sigma_i}} (\mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \\ &= \mathbf{V} \underbrace{\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}}_{\mathbf{I}_{n_r}} (\mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \\ &= \underbrace{\mathbf{V}(\mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{E}}_{\mathbf{\Pi}_1} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \\ &= \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \end{aligned} \quad (4.80)$$

De modo similar, a relação (4.81) pode ser derivada com a segunda direção de  $\text{span}(\mathbf{W})$ .

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \underbrace{\mathbf{E}_r^T}_{\mathbf{V}^T\mathbf{E}^T\mathbf{W}} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}_r^T &= \mathbf{W}\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \mathbf{V}^T \mathbf{E}^T \underbrace{\mathbf{W}\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}_r^T}_{\mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}^T} \\
&= \mathbf{W}\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \mathbf{V}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}^T \\
&= \underbrace{\mathbf{W}\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \mathbf{V}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^T}_{\mathbf{\Pi}_2} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}^T \\
&= \mathbf{\Pi}_2 \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}^T = \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}^T \quad (4.81)
\end{aligned}$$

Agora, a multiplicação de ambos os lados de (4.78) e (4.80) por  $\mathbf{C}$  pela esquerda resulta na seguinte condição de coincidência de momentos, para  $j = 1, 2$ :

$$\mathbf{G}_1(\sigma_i) = \mathbf{G}_{1,r}(\sigma_i) \quad (4.82)$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial s_j}(\sigma_i) = \frac{\partial \mathbf{G}_{1,r}}{\partial s_j}(\sigma_i) \quad (4.83)$$

De mesmo modo, multiplicando os lados direito e esquerdo de (4.79) e (4.81) por  $\mathbf{B}^T$  pela esquerda resulta em (4.84) e (4.85), para  $j = 1, 2$ .

$$\mathbf{G}_1(2\sigma_i) = \mathbf{G}_{1,r}(2\sigma_i) \quad (4.84)$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial s_j}(2\sigma_i) = \frac{\partial \mathbf{G}_{1,r}}{\partial s_j}(2\sigma_i) \quad (4.85)$$

O próximo passo é manipular a expressão da matriz de transferência de segunda ordem e chegar à sua forma reduzida.

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_2(\sigma_i, \sigma_i) &= \underbrace{-\mathbf{C}\mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1}}_{-\mathbf{C}_r\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1}\mathbf{W}^T} [\underbrace{\mathbf{H}(\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1}\mathbf{B})}_{\mathbf{V}\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1}\mathbf{B}_r} \otimes \underbrace{\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1}\mathbf{B}}_{\mathbf{V}\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1}\mathbf{B}_r}) - \underbrace{\bar{\mathbf{N}}(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1}\mathbf{B})}_{\mathbf{V}\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1}\mathbf{B}_r}] \\
&= -\mathbf{C}_r\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} \underbrace{\mathbf{W}^T \mathbf{H}(\mathbf{V} \otimes \mathbf{V})}_{\mathbf{H}_r} (\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1}\mathbf{B}_r \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1}\mathbf{B}_r) \\
&\quad + \mathbf{C}_r\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} \underbrace{\mathbf{W}^T \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{V})}_{\bar{\mathbf{N}}_r} (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1}\mathbf{B}_r) \\
&= -\mathbf{C}_r\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} \mathbf{H}_r (\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1}\mathbf{B}_r \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1}\mathbf{B}_r) \\
&\quad + \mathbf{C}_r\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} \bar{\mathbf{N}}_r (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1}\mathbf{B}_r) = \mathbf{G}_{2,r}(\sigma_i, \sigma_i) \quad (4.86)
\end{aligned}$$

O procedimento exatamente igual ao feito em (4.86) pode ser aplicado à primeira derivada da matriz de transferência de segunda ordem, resultando em (4.87), para  $j = 1, 2$ :

$$\frac{\partial \mathbf{G}_2}{\partial s_j}(\sigma_i, \sigma_i) = \frac{\partial \mathbf{G}_{2,r}}{\partial s_j}(\sigma_i, \sigma_i) \quad (4.87)$$

■

É fácil notar que somente  $2m$  colunas são adicionadas por ponto de expansão quando se utiliza por este método. Além disso, um número maior de momentos coincidem. As desvantagens deste método, contudo, serão trazidas em § 4.3.

#### 4.2.5 Abordagem Tensorial com Direções Tangenciais

**Teorema 4.3** (Coincidência de Momentos Oblíqua Tensorial com Direções Tangenciais). *Sejam  $\mathbf{E}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$  uma matriz não-singular,  $\mathbf{A}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{A} \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$ ,  $\mathbf{H}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{H} (\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r^2}$ ,  $\bar{\mathbf{N}}_r = \mathbf{W}^T \bar{\mathbf{N}} (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{V}) \in \mathbb{R}^{n_r \times m \cdot n_r}$ ,  $\mathbf{B}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n_r \times m}$ ,  $\mathbf{C}_r = \mathbf{C} \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{p \times n_r}$ , matrizes,  $\mathbf{l}_i \in \mathbb{R}^p$ ,  $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^m$  direções tangenciais,  $\mathbf{H}$  a matricization de modo 1 de um tensor simétrico  $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{n \times n \times n}$  e  $\mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times n_r}$  com posto máximo tais que as equações (4.88) e (4.89) são válidas com  $\sigma_i \notin \{\Lambda(\mathbf{A}, \mathbf{E}), \Lambda(\mathbf{A}_r, \mathbf{E}_r)\}$ .*

$$\begin{aligned} \text{span}(\mathbf{V}) \supset \text{span}_{i=1, \dots, k} \{ & \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{r}_i, \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{r}_i, \\ & \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1} [\mathbf{H}(\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{r}_i) - \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{r}_i)] \} \end{aligned} \quad (4.88)$$

$$\begin{aligned} \text{span}(\mathbf{W}) \supset \text{span}_{i=1, \dots, k} \{ & \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}^T \mathbf{l}_i, \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \bar{\mathbf{N}}^{(2)}(\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}^T \mathbf{l}_i), \\ & \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{H}^{(2)}(\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}^T \mathbf{l}_i) \} \end{aligned} \quad (4.89)$$

Então, as equações (4.90) a (4.93) também valem.

$$\left[ \frac{\partial^l \mathbf{G}_1}{\partial s^l}(\sigma_i) \right] \mathbf{r}_i = \left[ \frac{\partial^l \mathbf{G}_{1,r}}{\partial s^l}(\sigma_i) \right] \mathbf{r}_i \quad l = 0, 1 \quad (4.90)$$

$$\mathbf{I}_i^T [\mathbf{G}_1(2\sigma_i)] = \mathbf{I}_i^T [\mathbf{G}_{1,r}(2\sigma_i)] \quad (4.91)$$

$$[\mathbf{G}_2(\sigma_i, \sigma_i)] (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i) = [\mathbf{G}_{2,r}(\sigma_i, \sigma_i)] (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i) \quad (4.92)$$

$$\mathbf{I}_i^T \left[ \frac{\partial \mathbf{G}_2}{\partial s_j}(\sigma_i, \sigma_i) \right] (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i) = \mathbf{I}_i^T \left[ \frac{\partial \mathbf{G}_{2,r}}{\partial s_j}(\sigma_i, \sigma_i) \right] (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i) \quad j = 1, 2 \quad (4.93)$$

*Demonstração.* Para se provar o Teorema 4.3, uma abordagem análoga à demonstração do Teorema 4.1 é feita. Se as relações  $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B}\mathbf{r}_i$  e  $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{I}_i^T \mathbf{C}$  são válidas e os projetores  $\mathbf{\Pi}_1 = \mathbf{V}(\mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{E}$  e  $\mathbf{\Pi}_2 = \mathbf{W}(\mathbf{V}^T \mathbf{E}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{E}^T$  forem definidos, pode-se ver que  $\text{Im}(\mathbf{\Pi}_1) = \text{Im}(\mathbf{V})$  e  $\text{Im}(\mathbf{\Pi}_2) = \text{Im}(\mathbf{W})$ .

Com a ajuda deles, a condição (4.90) pode ser provada, como a seguir.

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \underbrace{\tilde{\mathbf{B}}_r}_{\mathbf{W}^T \tilde{\mathbf{B}}} &= \mathbf{V} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{A}_{\sigma_i} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{V} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{A}_{\sigma_i} \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \\ &= \mathbf{V} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \underbrace{\mathbf{W}^T \mathbf{A}_{\sigma_i} \mathbf{V}}_{\mathbf{A}_{r,\sigma_i}} (\mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \\ &= \mathbf{V} \underbrace{\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}}_{\mathbf{I}_{n_r}} (\mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \\ &= \underbrace{\mathbf{V} (\mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{E}}_{\mathbf{\Pi}_1} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \\ &= \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \end{aligned} \quad (4.94)$$

E, multiplicando ambos os lados da equação (4.94) por  $\mathbf{C}$  pela esquerda, chega-se a (4.90) para  $l = 0$ . O mesmo processo pode ser feito analogamente para a direção seguinte em  $\text{span}(\mathbf{V})$ . Para efeitos de compreensão, o mesmo procedimento é feito mais uma vez.

$$\begin{aligned}
\mathbf{V} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \underbrace{\mathbf{E}_r}_{\mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V}} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_r &= \mathbf{V} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{E} \underbrace{\mathbf{V} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_r}_{\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}} \\
&= \mathbf{V} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{A}_{\sigma_i} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \\
&= \mathbf{V} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{A}_{\sigma_i} \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \\
&= \mathbf{V} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \underbrace{\mathbf{W}^T \mathbf{A}_{\sigma_i} \mathbf{V}}_{\mathbf{A}_{r,\sigma_i}} (\mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \\
&= \mathbf{V} \underbrace{\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}}_{\mathbf{I}_{n_r}} (\mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \\
&= \underbrace{\mathbf{V} (\mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{E}}_{\mathbf{\Pi}_1} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \\
&= \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \tag{4.95}
\end{aligned}$$

Mais uma vez, multiplicando (4.95) por  $\mathbf{C}$  pela esquerda resulta na condição (4.90) para  $l = 1$ .

A prova de (4.91) também é análoga àquela de (4.94), como representado pela equação seguinte:

$$\begin{aligned}
\mathbf{W} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \underbrace{\tilde{\mathbf{C}}_r^T}_{\mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{C}}^T} &= \mathbf{W} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \mathbf{V}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \tilde{\mathbf{C}}^T = \mathbf{W} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \mathbf{V}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^T \mathbf{\Pi}_2 \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \tilde{\mathbf{C}}^T \\
&= \mathbf{W} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \underbrace{\mathbf{V}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^T \mathbf{W}}_{\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^T} (\mathbf{V}^T \mathbf{E}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{E}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \tilde{\mathbf{C}}^T \\
&= \mathbf{W} \underbrace{\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^T}_{\mathbf{I}_{n_r}} (\mathbf{V}^T \mathbf{E}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{E}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \tilde{\mathbf{C}}^T \\
&= \underbrace{\mathbf{W} (\mathbf{V}^T \mathbf{E}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{E}^T}_{\mathbf{\Pi}_2} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \tilde{\mathbf{C}}^T \\
&= \mathbf{\Pi}_2 \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \tilde{\mathbf{C}}^T = \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \tilde{\mathbf{C}}^T \tag{4.96}
\end{aligned}$$

E, novamente, multiplicando ambos os lados da equação (4.96) por  $\mathbf{B}^T$  resulta na condição (4.91).

Tão direta quanto as demonstrações anteriores é a da relação (4.92), que pode ser feita repetindo-se o mesmo procedimento para a última direção em  $\text{span}(\mathbf{V})$  e utilizando a relação (4.94).

$$\begin{aligned}
& \mathbf{V} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} \left[ \underbrace{\mathbf{H}_r(\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_r \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_r)}_{\mathbf{W}^T \mathbf{H}(\mathbf{V} \otimes \mathbf{V})(\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_r \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_r)} - \underbrace{\tilde{\mathbf{N}}_r(\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_r)}_{\mathbf{W}^T \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{V})(\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_r)} \right] \\
&= \mathbf{V} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} \left[ \mathbf{W}^T \mathbf{H} \left( \underbrace{\mathbf{V} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_r}_{\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}} \otimes \underbrace{\mathbf{V} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_r}_{\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}} \right) - \mathbf{W}^T \tilde{\mathbf{N}} \left( \mathbf{r}_i \otimes \underbrace{\mathbf{V} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_r}_{\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}} \right) \right] \\
&= \mathbf{V} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1} \left[ \mathbf{H}(\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}) - \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}) \right] \\
&= \underbrace{\mathbf{V} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i} \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1}}_{\mathbf{\Pi}_1} \left[ \mathbf{H}(\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}) - \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}) \right] \\
&= \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1} \left[ \mathbf{H}(\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}) - \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}) \right] \tag{4.97}
\end{aligned}$$

Como já feito antes, a multiplicação de (4.97) por  $\mathbf{C}$  pela esquerda resulta na relação (4.92).

Assim como na abordagem com blocos de direções, a demonstração da relação (4.93) é mais longa que as demais. Para torná-la mais fácil, as linhas de equação (4.98) a (4.101) mostram, mais uma vez, a primeira derivada da matriz de transferência de segunda ordem, para  $j = 1, 2$ .

$$\begin{aligned}
& \mathbf{1}_i^T \left[ \frac{\partial \mathbf{G}_2}{\partial s_j}(\sigma_i, \sigma_i) \right] (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i) = \\
& - \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}) \tag{4.98}
\end{aligned}$$

$$- \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} + \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}) \tag{4.99}$$

$$+ \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}) \tag{4.100}$$

$$+ \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}) \tag{4.101}$$

A coincidência dos momentos de primeira ordem será feita linha a linha. Primeiramente, a soma das linhas (4.98) e (4.100) é provada com o auxílio de (4.96) e (4.97).

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\tilde{\mathbf{C}}_r \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1}}_{\tilde{\mathbf{C}}_r \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} \mathbf{W}^T} \mathbf{E} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1} [\mathbf{H}(\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_r \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}) - \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}})] \\
& \mathbf{V} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} [\mathbf{H}_r(\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_r \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_r) - \bar{\mathbf{N}}_r(\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_r)] \\
& = \tilde{\mathbf{C}}_r \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} \underbrace{\mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V}}_{\mathbf{E}_r} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} [\mathbf{H}_r(\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_r \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_r) - \bar{\mathbf{N}}_r(\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_r)] \\
& = \tilde{\mathbf{C}}_r \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} \mathbf{E}_r \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} [\mathbf{H}_r(\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_r \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_r) - \bar{\mathbf{N}}_r(\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_r)] \quad (4.102)
\end{aligned}$$

Para se provar a linha (4.99), o uso de *matricizations* é necessário. Mas antes de entrar em uma discussão mais profunda sobre elas, a segunda direção de  $\text{span}(\mathbf{W})$  deve ser trabalhada.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{W} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \underbrace{\mathbf{H}_r^{(2)}}_{\mathbf{V}^T \mathbf{H}^{(2)} (\mathbf{V} \otimes \mathbf{W})} (\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_r \otimes \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \tilde{\mathbf{C}}_r^T) \\
& = \mathbf{W} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{V}^T \mathbf{H}^{(2)} (\underbrace{\mathbf{V} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_r}_{\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}} \otimes \underbrace{\mathbf{W} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \tilde{\mathbf{C}}_r^T}_{\mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \tilde{\mathbf{C}}^T}) \\
& = \mathbf{W} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{V}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{H}^{(2)} (\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \otimes \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \tilde{\mathbf{C}}^T) \\
& = \underbrace{\mathbf{W} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{V}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^T \mathbf{\Pi}_2}_{\mathbf{\Pi}_2} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{H}^{(2)} (\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \otimes \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \tilde{\mathbf{C}}^T) \\
& = \mathbf{\Pi}_2 \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{H}^{(2)} (\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \otimes \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \tilde{\mathbf{C}}^T) = \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{H}^{(2)} (\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \otimes \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \tilde{\mathbf{C}}^T) \quad (4.103)
\end{aligned}$$

A multiplicação de (4.103) por  $\tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}^T$  pela esquerda resulta em:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T}}_{\tilde{\mathbf{B}}_r^T \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{V}^T} \mathbf{E}^T \mathbf{W} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{H}_r^{(2)} (\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_r \otimes \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \tilde{\mathbf{C}}_r^T) \\
& = \tilde{\mathbf{B}}_r^T \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}_r^T \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{H}_r^{(2)} (\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_r \otimes \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \tilde{\mathbf{C}}_r^T) \\
& = \tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{H}^{(2)} (\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \otimes \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \tilde{\mathbf{C}}^T) \quad (4.104)
\end{aligned}$$

A equação (4.104) pode ser interpretada como uma igualdade de duas matricizations de modo 2 dos tensores apresentados a seguir:

$$\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{H} \times_1 (\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1}) \times_2 (\tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T}) \times_3 (\tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T}) \quad (4.105)$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_r = \mathcal{H}_r \times_1 (\tilde{\mathbf{C}}_r \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1}) \times_2 (\tilde{\mathbf{B}}_r^T \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}_r^T \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T}) \times_3 (\tilde{\mathbf{B}}_r^T \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T}) \quad (4.106)$$

E, se suas matricizations de modo 2 são iguais, suas representações de modo 1 também devem ser. Logo, a equação (4.107) pode ser escrita.

$$\tilde{\mathbf{C}}_r \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} \mathbf{H}_r (\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_r \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{E}_r \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_r) = \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1} \mathbf{H} (\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}) \quad (4.107)$$

No entanto, uma vez que a matriz Hessiana é simétrica, ou seja,  $\mathbf{H}^{(2)} = \mathbf{H}^{(3)}$  e  $\mathbf{H}_r^{(2)} = \mathbf{H}_r^{(3)}$ , a equação (4.104) pode ser reescrita:

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbf{B}}_r^T \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}_r^T \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{H}_r^{(3)} (\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_r \otimes \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \tilde{\mathbf{C}}_r^T) \\ &= \tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{H}^{(3)} (\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \otimes \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \tilde{\mathbf{C}}^T) \end{aligned} \quad (4.108)$$

E (4.108) pode ser interpretada como uma igualdade de *matricizations* de modo 3 dos tensores nas seguintes equações:

$$\tilde{\mathcal{Q}} = \mathcal{H} \times_1 (\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1}) \times_2 (\tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T}) \times_3 (\tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T}) \quad (4.109)$$

$$\tilde{\mathcal{Q}}_r = \mathcal{H}_r \times_1 (\tilde{\mathbf{C}}_r \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1}) \times_2 (\tilde{\mathbf{B}}_r^T \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T}) \times_3 (\tilde{\mathbf{B}}_r^T \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}_r^T \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T}) \quad (4.110)$$

Então, passando tudo à representação de modo 1, a equação a seguir pode ser obtida.

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbf{C}}_r \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} \mathbf{H}_r (\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{E}_r \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_r \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_r) \\ &= \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1} \mathbf{H} (\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}) \end{aligned} \quad (4.111)$$

A soma de (4.107) e (4.111) prova que a linha (4.99) em suas formas cheia e reduzida são iguais.

Finalmente, a equivalência da linha (4.101) pode ser provada por argumentos análogos a de (4.99). Mas, antes disso, a última direção em  $\text{span}(\mathbf{W})$  tem que ser manipulada.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{W} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \underbrace{\bar{\mathbf{N}}_r^{(2)}}_{\mathbf{V}^T \bar{\mathbf{N}}^{(2)} (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{W})} (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \tilde{\mathbf{C}}_r^T) \\
&= \mathbf{W} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{V}^T \bar{\mathbf{N}}^{(2)} (\mathbf{r}_i \otimes \underbrace{\mathbf{W} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \tilde{\mathbf{C}}_r^T}_{\mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \tilde{\mathbf{C}}^T}) \\
&= \mathbf{W} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{V}^T \bar{\mathbf{N}}^{(2)} (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \tilde{\mathbf{C}}^T) \\
&= \mathbf{W} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{V}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \bar{\mathbf{N}}^{(2)} (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \tilde{\mathbf{C}}^T) \\
&= \underbrace{\mathbf{W} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{V}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^T \mathbf{\Pi}_2}_{\mathbf{\Pi}_2} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \bar{\mathbf{N}}^{(2)} (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \tilde{\mathbf{C}}^T) \\
&= \mathbf{\Pi}_2 \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \bar{\mathbf{N}}^{(2)} (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \tilde{\mathbf{C}}^T) = \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \bar{\mathbf{N}}^{(2)} (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \tilde{\mathbf{C}}^T)
\end{aligned} \tag{4.112}$$

E, multiplicando (4.112) por  $\mathbf{B}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}^T$  pela esquerda, chega-se a:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}^T \mathbf{W} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \bar{\mathbf{N}}_r^{(2)}}_{\tilde{\mathbf{B}}_r^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{V}^T} (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \tilde{\mathbf{C}}_r^T) \\
&= \tilde{\mathbf{B}}_r^T \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}^T \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-T} \bar{\mathbf{N}}_r^{(2)} (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \tilde{\mathbf{C}}_r^T) \\
&= \tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}^T \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-T} \bar{\mathbf{N}}^{(2)} (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \tilde{\mathbf{C}}^T)
\end{aligned} \tag{4.113}$$

Novamente, a relação (4.113) pode ser vista como uma igualdade de duas *matricizations* de modo 2. Logo, suas *matricizations* de modo 1 têm que ser iguais também, o que resulta em:

$$\tilde{\mathbf{C}} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1} \bar{\mathbf{N}} (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}) = \tilde{\mathbf{C}}_r \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} \bar{\mathbf{N}}_r (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{E}_r \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_r) \tag{4.114}$$

Com (4.102), (4.107), (4.111) e (4.114), prova-se que os modelos de ordem cheia e reduzida têm momentos de primeira ordem iguais na matriz de transferência de segunda ordem.

■

Finalmente, este método adiciona somente 3 colunas por ponto de expansão. Ademais, segundo este método, as matrizes de entradas e saídas do sistema podem ter dimensões diferentes, o que não era o caso nas abordagens anteriores.

## 4.2.6 Abordagem Pseudolinear com Direções Tangenciais

**Teorema 4.4** (Coincidência de Momentos Oblíqua Pseudolinear com Direções Tangenciais).

Sejam  $\mathbf{E}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$  uma matriz não-singular,  $\mathbf{A}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{A} \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$ ,  $\mathbf{H}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{H} (\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r^2}$ ,  $\tilde{\mathbf{N}}_r = \mathbf{W}^T \tilde{\mathbf{N}} (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{V}) \in \mathbb{R}^{n_r \times m \cdot n_r}$ ,  $\mathbf{B}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n_r \times m}$  e  $\mathbf{C}_r = \mathbf{C} \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{m \times n_r}$  matrizes,  $\mathbf{l}_i \in \mathbb{R}^p$ ,  $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^m$  direções tangenciais e  $\mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times n_r}$  com posto máximo tais que (4.115) e (4.116) são válidas com  $\sigma_i \notin \{\Lambda(\mathbf{A}, \mathbf{E}), \Lambda(\mathbf{A}_r, \mathbf{E}_r)\}$ .

$$\text{span}(\mathbf{V}) \supset \text{span}_{i=1, \dots, k} \{ \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{r}_i, \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{r}_i \} \quad (4.115)$$

$$\text{span}(\mathbf{W}) \supset \text{span}_{i=1, \dots, k} \{ \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}^T \mathbf{l}_i, \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{C}^T \mathbf{l}_i \} \quad (4.116)$$

Então, (4.117) a (4.122) também são válidas, para  $j = 1, 2$ .

$$[\mathbf{G}_1(\sigma_i)] \mathbf{r}_i = [\mathbf{G}_{1,r}(\sigma_i)] \mathbf{r}_i \quad (4.117)$$

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial s_j}(\sigma_i) \right] \mathbf{r}_i = \left[ \frac{\partial \mathbf{G}_{1,r}}{\partial s_j}(\sigma_i) \right] \mathbf{r}_i \quad (4.118)$$

$$\mathbf{l}_i^T [\mathbf{G}_1(2\sigma_i)] = \mathbf{l}_i^T [\mathbf{G}_{1,r}(2\sigma_i)] \quad (4.119)$$

$$\mathbf{l}_i^T \left[ \frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial s_j}(2\sigma_i) \right] = \mathbf{l}_i^T \left[ \frac{\partial \mathbf{G}_{1,r}}{\partial s_j}(2\sigma_i) \right] \quad (4.120)$$

$$\mathbf{l}_i^T [\mathbf{G}_2(\sigma_i, \sigma_i)] (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i) = \mathbf{l}_i^T [\mathbf{G}_{2,r}(\sigma_i, \sigma_i)] (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i) \quad (4.121)$$

$$\mathbf{l}_i^T \left[ \frac{\partial \mathbf{G}_2}{\partial s_j}(\sigma_i, \sigma_i) \right] (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i) = \mathbf{l}_i^T \left[ \frac{\partial \mathbf{G}_{2,r}}{\partial s_j}(\sigma_i, \sigma_i) \right] (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i) \quad (4.122)$$

*Demonstração.* Assim como na demonstração do Teorema 4.3, a primeira direção de  $\text{span}(\mathbf{V})$  e  $\text{span}(\mathbf{W})$  podem ser manipuladas para se provar coincidência de momentos. Definindo  $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B} \mathbf{r}_i$  e  $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{l}_i^T \mathbf{C}$ , as equações que seguem podem ser escritas.

$$\mathbf{V}\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}_r = \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1}\tilde{\mathbf{B}} \quad (4.123)$$

$$\mathbf{W}\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T}\tilde{\mathbf{C}}_r^T = \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T}\tilde{\mathbf{C}}^T \quad (4.124)$$

A segunda direção de span ( $\mathbf{V}$ ) pode ser trabalhada analogamente, como em (4.125).

$$\begin{aligned} \mathbf{V}\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \underbrace{\mathbf{E}_r}_{\mathbf{W}^T\mathbf{E}\mathbf{V}} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}_r &= \mathbf{V}\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \underbrace{\mathbf{W}^T\mathbf{E}\mathbf{V}\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}_r}_{\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}} \\ &= \mathbf{V}\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{A}_{\sigma_i} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \\ &= \mathbf{V}\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{A}_{\sigma_i} \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \\ &= \mathbf{V}\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \underbrace{\mathbf{W}^T \mathbf{A}_{\sigma_i} \mathbf{V}}_{\mathbf{A}_{r,\sigma_i}} (\mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \\ &= \mathbf{V} \underbrace{\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1} \mathbf{A}_{r,\sigma_i}}_{\mathbf{I}_{n_r}} (\mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \\ &= \underbrace{\mathbf{V}(\mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{E}}_{\mathbf{\Pi}_1} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \\ &= \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \end{aligned} \quad (4.125)$$

De modo similar, a relação (4.126) pode ser derivada.

$$\begin{aligned} \mathbf{W}\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \underbrace{\mathbf{E}_r^T}_{\mathbf{V}^T\mathbf{E}^T\mathbf{W}} \mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T}\tilde{\mathbf{C}}_r^T &= \mathbf{W}\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \underbrace{\mathbf{V}^T\mathbf{E}^T\mathbf{W}\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T}\tilde{\mathbf{C}}_r^T}_{\mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T}\tilde{\mathbf{C}}^T} \\ &= \mathbf{W}\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \mathbf{V}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \tilde{\mathbf{C}}^T \\ &= \mathbf{W}\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-T} \underbrace{\mathbf{V}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^T \mathbf{\Pi}_2}_{\mathbf{\Pi}_2} \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \tilde{\mathbf{C}}^T \\ &= \mathbf{\Pi}_2 \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \tilde{\mathbf{C}}^T = \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \mathbf{E}^T \mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-T} \tilde{\mathbf{C}}^T \end{aligned} \quad (4.126)$$

Agora, a multiplicação de ambos os lados de (4.123) e (4.125) por  $\mathbf{C}$  pela esquerda resulta nas relações (4.127) e (4.128), para  $j = 1, 2$ .

$$[\mathbf{G}_1(\sigma_i)]\mathbf{r}_i = [\mathbf{G}_{1,r}(\sigma_i)]\mathbf{r}_i \quad (4.127)$$

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial s_j}(\sigma_i) \right] \mathbf{r}_i = \left[ \frac{\partial \mathbf{G}_{1,r}}{\partial s_j}(\sigma_i) \right] \mathbf{r}_i \quad (4.128)$$

Do mesmo modo, a multiplicação de (4.124) e (4.126) por  $\mathbf{B}^T$  pela esquerda resulta em:

$$\mathbf{I}_i^T [\mathbf{G}_1(2\sigma_i)] = \mathbf{I}_i^T [\mathbf{G}_{1,r}(2\sigma_i)] \quad (4.129)$$

$$\mathbf{I}_i^T \left[ \frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial s_j}(2\sigma_i) \right] = \mathbf{I}_i^T \left[ \frac{\partial \mathbf{G}_{1,r}}{\partial s_j}(2\sigma_i) \right] \quad (4.130)$$

O próximo passo é manipular a expressão da matriz de transferência de segunda ordem para se chegar à sua forma reduzida.

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_i^T [\mathbf{G}_2(\sigma_i, \sigma_i)](\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) &= \underbrace{-\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1}}_{-\tilde{\mathbf{C}}_r\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1}\mathbf{W}^T} \mathbf{H} \left( \underbrace{\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}}_{\mathbf{V}\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}_r} \otimes \underbrace{\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}}_{\mathbf{V}\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}_r} \right) \\ &\quad + \underbrace{\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{A}_{2\sigma_i}^{-1}}_{\tilde{\mathbf{C}}_r\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1}\mathbf{W}^T} \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{I}_m \otimes \underbrace{\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}}_{\mathbf{V}\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}_r}) \\ &= -\tilde{\mathbf{C}}_r\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} \underbrace{\mathbf{W}^T \mathbf{H}(\mathbf{V} \otimes \mathbf{V})}_{\mathbf{H}_r} (\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}_r \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}_r) \\ &\quad + \tilde{\mathbf{C}}_r\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} \underbrace{\mathbf{W}^T \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{V})}_{\bar{\mathbf{N}}_r} (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}_r) \\ &= -\tilde{\mathbf{C}}_r\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} \mathbf{H}_r (\mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}_r \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}_r) \\ &\quad + \tilde{\mathbf{C}}_r\mathbf{A}_{r,2\sigma_i}^{-1} \bar{\mathbf{N}}_r (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{A}_{r,\sigma_i}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}_r) \\ &= \mathbf{I}_i^T [\mathbf{G}_{2,r}(\sigma_i, \sigma_i)](\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i) \end{aligned} \quad (4.131)$$

Este exato procedimento pode ser feito com a primeira derivada da matriz de transferência de segunda ordem, resultando na relação (4.132), para  $j = 1, 2$ :

$$\mathbf{I}_i^T \left[ \frac{\partial \mathbf{G}_2}{\partial s_j}(\sigma_i, \sigma_i) \right] (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i) = \mathbf{I}_i^T \left[ \frac{\partial \mathbf{G}_{2,r}}{\partial s_j}(\sigma_i, \sigma_i) \right] (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i) \quad (4.132)$$

■

### 4.2.7 Extensão da Abordagem dos Multimomentos para o Caso MIMO

Uma extensão pura da abordagem dos multimomentos apresentada em § 3.2.2 é escrita nesta seção. No entanto, sua demonstração não será apresentada porque este teorema é dado somente para efeitos de comparação, que será feita em § 4.3.

**Teorema 4.5** (Coincidência de Multimomentos via Subespaços de Krylov para sistemas MIMO). *Seja  $\Sigma^{QB} = (\mathbf{E}, \mathbf{A}, \mathbf{H}, \bar{\mathbf{N}}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  um sistema de equações diferenciais quadrático-bilineares (QBDAE) de dimensão  $n$ . Sejam  $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$  com  $q_2 \leq q_1$ . Assume-se que um sistema reduzido de QBDAEs é construído por uma projeção de Petrov-Galerkin:  $\mathbf{E}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$ ,  $\mathbf{A}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{A} \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$ ,  $\mathbf{H}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{H} (\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r^2}$ ,  $\bar{\mathbf{N}}_r = \mathbf{W}^T \bar{\mathbf{N}} (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{V}) \in \mathbb{R}^{n_r \times m \cdot n_r}$ ,  $\mathbf{B}_r = \mathbf{W}^T \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n_r \times m}$ ,  $\mathbf{C}_r = \mathbf{C} \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{p \times n_r}$ , onde  $\text{span}(\mathbf{V})$  e  $\text{span}(\mathbf{W})$  são bases ortonormais dos espaços construídos pelo Algoritmo 4.1.*

---

**Algoritmo 4.1:** Construção das matrizes de redução para coincidência de multimomentos de um sistema MIMO

---

**Entrada:** As matrizes do sistema QB  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\bar{\mathbf{N}}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ , o ponto de expansão  $\sigma$ , a ordem reduzida da função de transferência de primeira ordem,  $q_1$ , e da função de transferência de segunda ordem,  $q_2$

**Saída:** Matrizes de projeção  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{W}$

1 **início**

2  $\mathbf{V}_1 = \mathcal{K}_{q_1}(\mathbf{A}_\sigma^{-1} \mathbf{E}, \mathbf{A}_\sigma^{-1} \mathbf{B});$

3  $\mathbf{W}_1 = \mathcal{K}_{q_1}(\mathbf{A}_{2\sigma}^{-T} \mathbf{E}^T, \mathbf{A}_{2\sigma}^{-T} \mathbf{C}^T);$

4 **para**  $i = 1 : q_2$  **faça**

5  $\mathbf{V}_2^i = \mathcal{K}_{q_2-i+1}(\mathbf{A}_{2\sigma}^{-1} \mathbf{E}, \mathbf{A}_{2\sigma}^{-1} \bar{\mathbf{N}} (\mathbf{I}_m \otimes (\mathbf{A}_\sigma^{-1} \mathbf{E})^{i-1} \mathbf{A}_\sigma^{-1} \mathbf{B}));$

6  $\mathbf{W}_2^i = \mathcal{K}_{q_2-i+1}(\mathbf{A}_\sigma^{-T} \mathbf{E}^T, \mathbf{A}_\sigma^{-T} \bar{\mathbf{N}}^{(2)} (\mathbf{I}_m \otimes (\mathbf{A}_{2\sigma}^{-1} \mathbf{E})^{i-1} \mathbf{A}_{2\sigma}^{-1} \mathbf{B}));$

7 **para**  $j = 1 : \min(q_2 - i + 1, i)$  **faça**

8  $\mathbf{V}_3^{i,j} =$

$\mathcal{K}_{q_2-i+1}(\mathbf{A}_{2\sigma}^{-1} \mathbf{E}, \mathbf{A}_{2\sigma}^{-1} \mathbf{H} ((\mathbf{A}_\sigma^{-1} \mathbf{E})^{i-1} \mathbf{A}_\sigma^{-1} \mathbf{B} \otimes (\mathbf{A}_\sigma^{-1} \mathbf{E})^{j-1} \mathbf{A}_\sigma^{-1} \mathbf{B}));$

9  $\mathbf{W}_3^{i,j} =$

$\mathcal{K}_{q_2-i+1}(\mathbf{A}_\sigma^{-T} \mathbf{E}^T, \mathbf{A}_\sigma^{-T} \mathbf{H}^{(2)} ((\mathbf{A}_\sigma^{-1} \mathbf{E})^{i-1} \mathbf{A}_\sigma^{-1} \mathbf{B} \otimes (\mathbf{A}_{2\sigma}^{-1} \mathbf{E})^{i-1} \mathbf{A}_{2\sigma}^{-1} \mathbf{B}));$

10  $\text{span}(\mathbf{V}) = \text{span}(\mathbf{V}_1) \cup \bigcup_i \text{span}(\mathbf{V}_2^i) \cup \bigcup_{i,j} \text{span}(\mathbf{V}_3^{i,j});$

11  $\text{span}(\mathbf{W}) = \text{span}(\mathbf{W}_1) \cup \bigcup_i \text{span}(\mathbf{W}_2^i) \cup \bigcup_{i,j} \text{span}(\mathbf{W}_3^{i,j})$

---

Então, são válidas:

$$\frac{\partial^i \mathbf{G}_1}{\partial s_1^i}(\sigma) = \frac{\partial^i \mathbf{G}_{1,r}}{\partial s_1^i}(\sigma), \quad i = 0, \dots, q_1 - 1 \quad (4.133)$$

$$\frac{\partial^i \mathbf{G}_1}{\partial s_1^i}(2\sigma) = \frac{\partial^i \mathbf{G}_{1,r}}{\partial s_1^i}(2\sigma), \quad i = 0, \dots, q_1 - 1 \quad (4.134)$$

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial s_1^i \partial s_2^j} \mathbf{G}_2(\sigma, \sigma) = \frac{\partial^{i+j}}{\partial s_1^i \partial s_2^j} \mathbf{G}_{2,r}(\sigma, \sigma), \quad i + j \leq 2q_2 - 1 \quad (4.135)$$

É difícil elaborar uma expressão analítica para o número de colunas nas matrizes de projeção resultantes  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{W}$  devido aos laços de iteração. No entanto, o mesmo número de colunas à abordagem tensorial com blocos de direções – i.e.  $m + 2m^2$  – é adicionada por ponto de expansão para  $q_1 = q_2 = 1$ . Esta configuração faz somente os momentos de ordem zero de  $\mathbf{G}_1$  e os de ordens zero e um de  $\mathbf{G}_2$  coincidirem. Isso significa que a abordagem tensorial por blocos é capaz de aproximar as matrizes de transferência melhor no domínio da frequência que esta extensão da abordagem dos multimomentos com a mesma ordem reduzida.

## 4.3 Sobre as Técnicas Desenvolvidas

Nesta seção, algumas observações e uma comparação de todas as abordagens são feitas. Primeiramente, os métodos tensoriais serão tratados juntos e, depois, o mesmo será feito com as técnicas pseudolineares.

### 4.3.1 Abordagens Tensoriais

As abordagens tensoriais são as técnicas principais desenvolvidas nesta tese. Isso pode ser dito porque as pseudolineares não conseguem transferir o comportamento não-linear dos modelos às matrizes de projeção  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{W}$ . Desta maneira, os modelos reduzidos por elas não são tão bons quanto os reduzidos por via tensorial, como será visto em § 5.

Os métodos tensoriais foram desenvolvidos inspirados em ambas as abordagens hermitiana e dos multimomentos para sistemas SISO. Em um primeiro instante, torna-se claro que seria melhor tentar expandir os métodos de sistemas SISO para o caso MIMO levando-se

em consideração somente a abordagem hermitiana, já que ela é a que entrega modelos com resultados mais satisfatórios dentre as duas. No entanto, a teoria de sistemas por trás da coincidência de momentos não permite que a abordagem hermitiana seja diretamente transposta ao caso MIMO sem a investigação minuciosa de sua matemática.

Deste modo, a matriz  $\mathbf{V}$  foi construída, em primeiro lugar, para ser análoga àquela da técnica hermitiana, o que não foi possível com  $\mathbf{W}$ . Logo, esta foi construída analogamente à técnica de multimomentos. Como estes métodos entregam números diferentes de colunas – ou blocos de direção – por ponto de expansão,  $m^2$  colunas foram adicionadas a  $\mathbf{V}$  para que a redução fosse dimensionalmente possível. Então, estas colunas que estavam “sobrando” foram usadas para fazer mais momentos a coincidirem, o que representa uma vantagem a uma pura extensão da abordagem de multimomentos ao caso MIMO.

*Observação 4.6* (Sobre a razão pela qual  $\mathbf{W}$  não pode ser construída analogamente à abordagem hermitiana). Toda a problemática jaz no fato de que  $\mathbf{H}(\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1}\mathbf{B} \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1}\mathbf{B}) \neq \mathbf{H}(\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1}\mathbf{B} \otimes \mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1}\mathbf{B})$ . Isso torna o isolamento de  $\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{A}_{\sigma_i}^{-1}\mathbf{B}$  fora do produto de Kronecker – via *matricization* de tensores – muito mais difícil que no caso SISO, onde a relação análoga é válida. △

No entanto, pode-se ver que o método tensorial com blocos entrega modelos reduzidos muito grandes, o que é um problema. Logo, direções tangenciais tornam-se importantes, uma vez que ela resultam em ROMs menores.

A interpretação das abordagens tangenciais é uma simples interpolação. Quando se multiplica as matrizes de transferência  $\mathbf{G}_1$  e  $\mathbf{G}_2$  por  $\mathbf{I}^T$  pela esquerda, as saídas – linhas de uma matriz de transferência – são interpoladas.

Analogamente, a multiplicação das matrizes por  $\mathbf{r}$  e  $(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})$  pela direita dá uma interpolação das colunas das matrizes de transferência – que, por sua vez, representa as entradas ou uma multiplicação delas.

As direções tangenciais representam mais um grau de liberdade na escolha dos parâmetros de reduções por subespaços de Krylov, mas elas podem ser escolhidas de modo tal que menos importância seja dada a entradas e saídas menos relevantes.

Logo, as abordagens tangenciais dão uma condição de coincidência de momentos mais fraca que os métodos por blocos de direção, mas elas resolvem o problema das numerosas colunas das matrizes de projeção.

*Observação 4.7* (Projeção Ortogonal com Base Tensorial). As abordagens tensoriais também podem ser usadas de modo ortogonal – em termos de projeção. Abusando de notação do MATLAB, basta definir matrizes  $\mathbf{V} = [\mathbf{V}, \mathbf{W}]$ ;  $\mathbf{W} = \mathbf{V}$ ; e os momentos ainda coincidiriam. Isso pode ser provado substituindo-se todas as instâncias de  $\mathbf{W}$  por  $\mathbf{V}$  e de  $\mathbf{\Pi}_2$  por  $\mathbf{\Pi}_1$  nas demonstrações dos teoremas.

Isso resulta em uma projeção ortogonal cuja ordem é o dobro da ordem reduzida obliquamente. Isso pode não parecer útil, mas a probabilidade de se chegar a uma redução instável com projeções ortogonais é bem mais baixa. Logo a importância, mais uma vez, de direções tangenciais, uma vez que elas podem reduzir drasticamente o número de colunas nas matrizes de projeção. △

### 4.3.2 Abordagens Pseudolineares

Como já mencionado anteriormente, as abordagens pseudolineares podem trazer momentos a coincidir, mas eles tendem a não entregar resultados tão bons por conta da ausência das características não-lineares dentro das matrizes de projeção. Isso pode ser visto nos resultados numéricos em § 5.

Este método pode ser expandido para fazer mais momentos coincidirem, uma vez que os subespaços de Krylov desta técnica podem crescer até ordens arbitrárias. Isso dá a este método uma flexibilidade que não pode ser conferida aos tensoriais.

Todas as considerações que foram feitas com respeito à problemática envolvendo as direções tangenciais em comparação às abordagens com blocos de direção e o truque para se chegar a uma projeção ortogonal também são válidos para as técnicas pseudolineares também.

# Capítulo 5

## Resultados Numéricos

Este capítulo contém os resultados numéricos dos métodos de redução desenvolvidos em § 4, simulados com dois modelos de benchmark. Para tal, estes modelos são apresentados e descritos em seus respectivos subcapítulos. Depois, os resultados de suas simulações são mostrados e interpretados.

Nas seções de simulação, as abordagens por blocos são aplicadas separadamente às com interpolação tangencial, de modo que os resultados possam ser mostrados de uma maneira mais organizada.

### 5.1 Escada RC Não-Linear MIMO

Os resultados numéricos correspondentes à versão MIMO da escada RC são mostrados nesta seção. Como mencionado anteriormente, uma descrição do sistema é dada, antes dos resultados de suas simulações.

#### 5.1.1 Descrição do Modelo

Para se testar os métodos MIMO desenvolvidos nesta tese, a escada RC, apresentada em § 3.3.1 foi adaptada, para que ela tenha duas entradas e duas saídas.

A Fig. 5.1 mostra o modelo físico do circuito, cujas entradas são as fontes de corrente  $u_1(t) = i_1$  e  $u_2(t) = i_2$  e suas saídas são as tensões  $y_1(t) = v_1$  e  $y_2(t) = v_{N-1,N}$ . Neste sistema, bem como no caso SISO, diodos com característica corrente-tensão  $i_D = e^{40v_D} - 1$  foram usados.

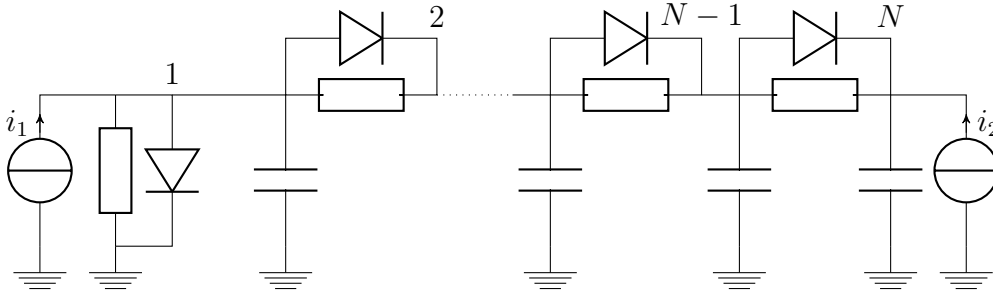


Figura 5.1: Circuito elétrico da escada RC MIMO.

Como nenhum elemento além da fonte de corrente foi adicionado ao circuito, as equações diferenciais que o descrevem são muito similares à do modelo SISO.

$$\dot{v}_1 = -2v_1 + v_2 + 2 - e^{40v_1} - e^{40(v_1-v_2)} + u_1(t) \quad (5.1)$$

$$\dot{v}_i = -2v_i + v_{i-1} + v_{i+1} + e^{40(v_{i-1}-v_i)} - e^{40(v_i-v_{i+1})} \quad 2 \leq i \leq N-1 \quad (5.2)$$

$$\dot{v}_N = -v_N + v_{N-1} - 1 + e^{40(v_{N-1}-v_N)} + u_2(t) \quad (5.3)$$

Agora, com a mudança de variáveis  $v_{i,i+1} = v_i - v_{i+1}$  para  $1 \leq i \leq N-1$ , e a substituição das não-linearidades  $w_i = e^{40v_{i-1,i}}$  as novas equações dinâmicas podem ser escritas em (5.4) a (5.11) para  $2 \leq i \leq N-2$  e  $3 \leq j \leq N-1$ .

$$\dot{v}_1 = -v_1 - v_{1,2} + 2 - e^{40v_1} - e^{40v_{1,2}} + u_1(t) \quad (5.4)$$

$$\dot{v}_{1,2} = -v_1 - 2v_{1,2} + v_{2,3} + 2 - e^{40v_1} - 2e^{40v_{1,2}} + e^{40v_{2,3}} + u_1(t) \quad (5.5)$$

$$\dot{v}_{i,i+1} = -2v_{i,i+1} + v_{i-1,i} + v_{i+1,i+2} + e^{40v_{i-1,i}} - 2e^{40v_{i,i+1}} + e^{40v_{i+1,i+2}} \quad (5.6)$$

$$\dot{v}_{N-1,N} = -2v_{N-1,N} + v_{N-2,N-1} + 1 + e^{40v_{N-2,N-1}} - 2e^{40v_{N-1,N}} - u_2(t) \quad (5.7)$$

$$\dot{w}_1 = 40(w_1 + 1)(-v_1 - v_{1,2} - w_1 - w_2 + u_1(t)) \quad (5.8)$$

$$\dot{w}_2 = 40(w_2 + 1)(-v_1 - 2v_{1,2} + v_{2,3} - w_1 - 2w_2 + w_3 + u_1(t)) \quad (5.9)$$

$$\dot{w}_j = 40(w_j + 1)(-2v_{j-1,1} + v_{j-2,j-1} + v_{j,j+1} - w_{j-1} - 2w_j + w_{j+1}) \quad (5.10)$$

$$\dot{w}_N = 40(w_N + 1)(-2v_{N-1,N} + v_{N-2,N-1} - w_{N-1} - 2w_N - u_2(t)) \quad (5.11)$$

Estas equações representam a escada RC MIMO em sua forma quadrático-bilinear, uma vez que não há nenhum monômio com ordem maior que dois com respeito às variáveis de estado. Elas podem, então, ser trazidas à forma matricial de sistemas QB, ou seja, com as matrizes  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\bar{\mathbf{N}}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ , e serem reduzidas de acordo com as abordagens em § 4.

Deve-se enfatizar, também, que este modelo tem  $m = 2$  entradas e  $p = 2$  saídas e pode, então, ser reduzido por todos os métodos desenvolvidos em § 4.2.

### 5.1.2 Abordagens com Blocos de Direção

As abordagens com blocos de direção podem entregar coincidência de momentos de toda a matriz de transferência, que é o melhor dos casos em um sistema MIMO. Entretanto, o uso da extensão pura da abordagem dos multimomentos resultou em modelos reduzidos instáveis com muita frequência e, por esse motivo, essa técnica foi deixada de lado nas discussões futuras.

Ambas as técnicas remanescentes entregam modelos reduzidos de ordens diferentes para o mesmo número de pontos de expansão, uma vez que a abordagem tensorial adiciona  $m + 2m^2$  colunas às matrizes de redução e a pseudolinear, somente  $2m$ . Isso resulta em uma grande discrepância entre as reduções no que se trata de ordem reduzida e exatidão. Contudo, é importante fazer comparações justas entre as rotinas de redução, e, por este motivo, tanto simulações com a mesma ordem reduzida quanto com os mesmos pontos de expansão são feitas separadamente. Primeiramente, fazem-se as reduções com os mesmos pontos de expansão.

#### Reduções com os Mesmos Pontos de Expansão

A Fig. 5.2 mostra a resposta temporal do modelo de ordem cheia e suas reduções pelas abordagens tensorial e pseudolinear.

Os detalhes da simulação e da redução são dados, assim como feito em § 3.3, pela listagem que segue.

- Entradas da simulação:

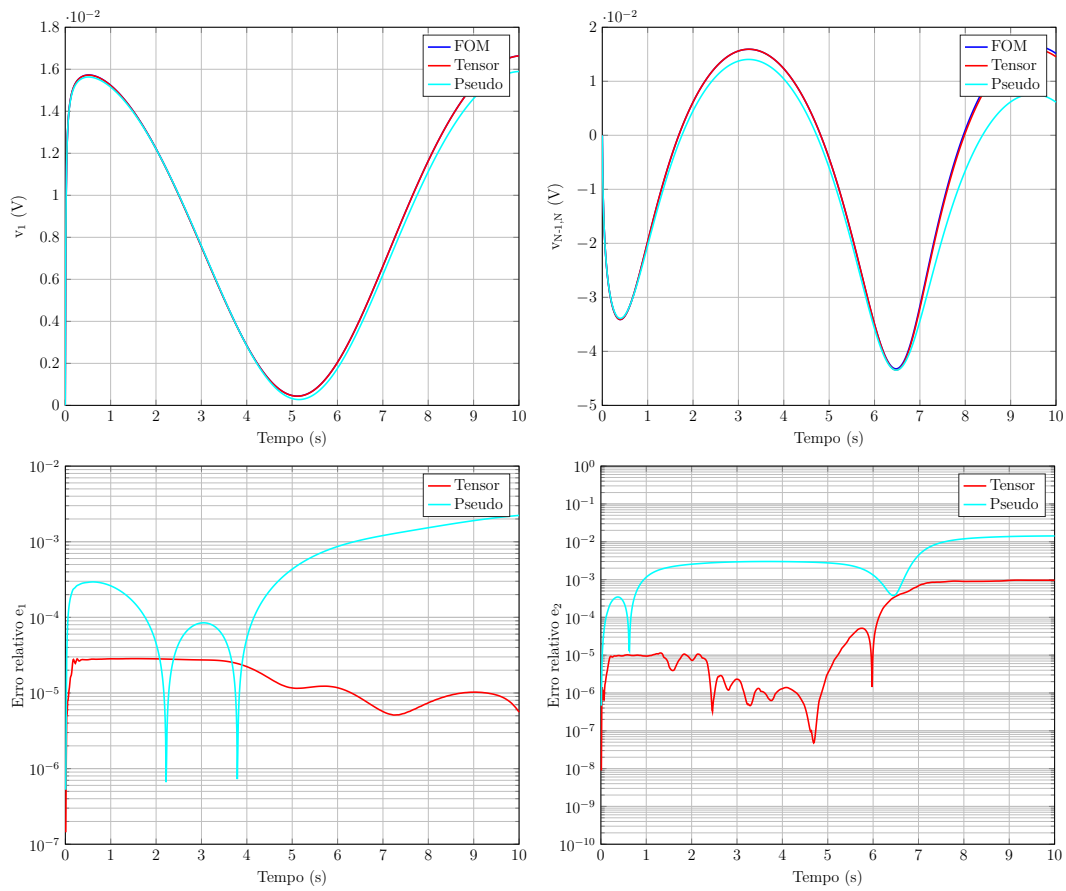


Figura 5.2: Escada RC MIMO reduzidas com os mesmos pontos.

$$- u_1(t) = \frac{1}{2}(\cos(2\pi \frac{t}{10}) + 1)$$

$$- u_2(t) = \frac{1}{2} \cos(t)$$

- Integrador: ode15s
- Passo temporal: 10 ms
- Sistema original
  - Ordem cheia:  $n = 800$
  - Tempo de simulação: 61.95 s
- Abordagem tensorial
  - Ordem reduzida:  $n_{r,TB} = 60$
  - Pontos de expansão: 6 obtidos pelo IRKA
  - Norma dos erros relativos:

$$* e_1 = 6.01 \cdot 10^{-4}$$

$$* e_2 = 1.62 \cdot 10^{-2}$$

– Tempo de simulação: 3.30 s

▪ Abordagem pseudolinear

– Ordem reduzida:  $n_{r,PL} = 24$

– Pontos de expansão: 6 obtidos pelo IRKA

– Norma dos erros relativos:

$$* e_1 = 3.30 \cdot 10^{-2}$$

$$* e_2 = 2.22 \cdot 10^{-1}$$

– Tempo de simulação:  $3.01 \cdot 10^{-1}$  s

Pode-se ver que tanto a ordem reduzida como o tempo de simulação da redução pseudolinear foram mais baixos que os da tensorial. Entretanto, também vê-se que seus erros relativos são muito mais altos. Essas observações são compatíveis à tendência de sistemas de ordem reduzida: quanto maior a ordem reduzida, mais precisa a redução será.

Deve-se mencionar, também, que, apesar de o modelo reduzido tensorial levar aproximadamente 11 vezes mais tempo para ser simulado do que a outra redução, o ganho em velocidade em comparação ao modelo de ordem cheia é considerável, já que sua simulação toma apenas 5.32% do tempo da simulação do FOM.

Os erros maiores da abordagem pseudolinear também podem ser explicados pelo número de momentos coincidentes em cada redução. Enquanto três momentos na função de transferência de primeira ordem  $\mathbf{G}_1$  e dois na de segunda ordem,  $\mathbf{G}_2$ , coincidem com a técnica tensorial, a pseudolinear consegue fazer somente dois momentos em cada função coincidem.

Logo, como já mencionado, também é necessário comparar ambos os ROMs com a mesma ordem reduzida. Mas antes de fazê-lo, seria interessante, também, checar se os momentos de cada um dos sistemas realmente coincidem com os do sistema original.

### Checagem dos Momentos

As equações (5.12) a (5.15) mostram as normas dos erros na matriz de momentos. Cada elemento das matrizes de erros  $\mathbf{E}_{M,i}$ ,  $i = 1, 2$  mostra o erro nos momentos calculados em cada uma das entradas da matriz de transferência  $\mathbf{G}_i$ . Já que uma matriz de momentos diferente é gerada para cada ponto de expansão, a norma de cada elementos ao longo de todos os pontos de expansão é representada.

$$\mathbf{E}_{M,1,TB} = \begin{bmatrix} 1.50 \cdot 10^{-16} & 9.92 \cdot 10^{-18} \\ 4.62 \cdot 10^{-18} & 8.83 \cdot 10^{-17} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

$$\mathbf{E}_{M,2,TB} = \begin{bmatrix} 1.77 \cdot 10^{-16} & 2.01 \cdot 10^{-18} & 2.06 \cdot 10^{-18} & 1.76 \cdot 10^{-17} \\ 2.28 \cdot 10^{-17} & 8.80 \cdot 10^{-19} & 9.29 \cdot 10^{-19} & 7.01 \cdot 10^{-17} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

$$\mathbf{E}_{M,1,PL} = \begin{bmatrix} 1.82 \cdot 10^{-16} & 4.05 \cdot 10^{-24} \\ 1.83 \cdot 10^{-26} & 6.59 \cdot 10^{-17} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

$$\mathbf{E}_{M,2,PL} = \begin{bmatrix} 6.33 \cdot 10^{-12} & 3.61 \cdot 10^{-19} & 3.42 \cdot 10^{-19} & 5.43 \cdot 10^{-21} \\ 5.93 \cdot 10^{-22} & 7.77 \cdot 10^{-22} & 8.44 \cdot 10^{-22} & 6.51 \cdot 10^{-12} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Analisando as equações anteriores e evando-se em consideração a precisão da máquina, pode-se verificar que o erro nos momentos é, de fato, igual a zero. Agora que a coincidência foi checada, os testes com os modelos reduzidos de ordens similares podem ser feitos.

### Reduções com Ordens Similares

A Fig. 5.3 apresenta a simulação do FOM e de duas de suas reduções com a mesma ordem reduzida  $n_r = 60$ .

Mesmo sem checar a norma dos erros relativos, é possível notar que a técnica tensorial performa melhor que a pseudolinear. Entretanto, é sabido que rotinas de redução de Krylov

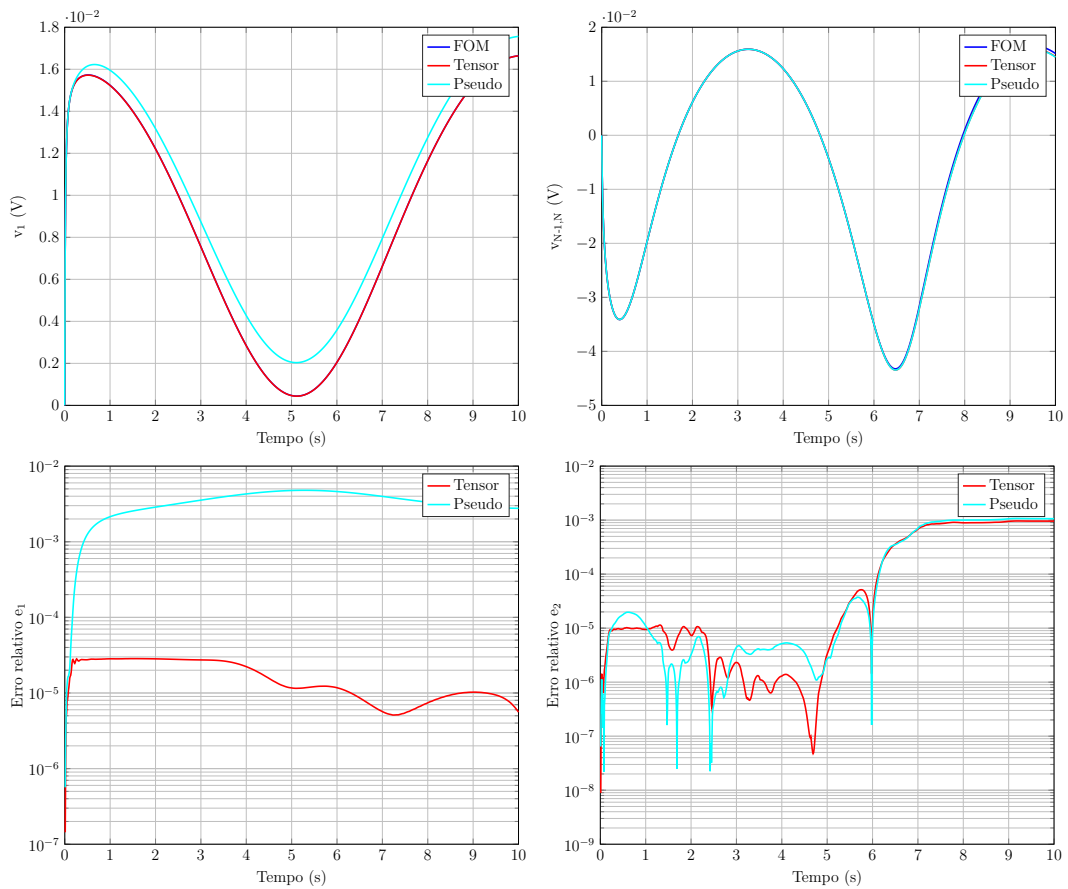


Figura 5.3: Escada RC MIMO com as mesmas ordens reduzidas.

somente têm uma tendência a serem melhores com o aumento da ordem reduzida, mas esta não é uma regra fixa. A escolha infeliz dos pontos de expansão pode levar a reduções instáveis ou imprecisas também.

Para exemplificar esta propriedade, a mesma redução tensorial é comparada, agora, com um modelo reduzido pela técnica pseudolinear ligeiramente maior, obtido pela adição de somente um ponto de expansão à redução. É importante enfatizar, também, que os pontos são escolhidos de modo a otimizar a norma  $\mathcal{H}_2$  do subsistema linear – ou seja, são obtidos pelo IRKA. Deste modo, não é possível modificar os valores dos pontos de expansão, mas somente sua quantidade. Os resultados desta segunda comparação podem ser vistos na Fig. 5.4.

Com seus detalhes listados a seguir:

- Entradas da simulação:

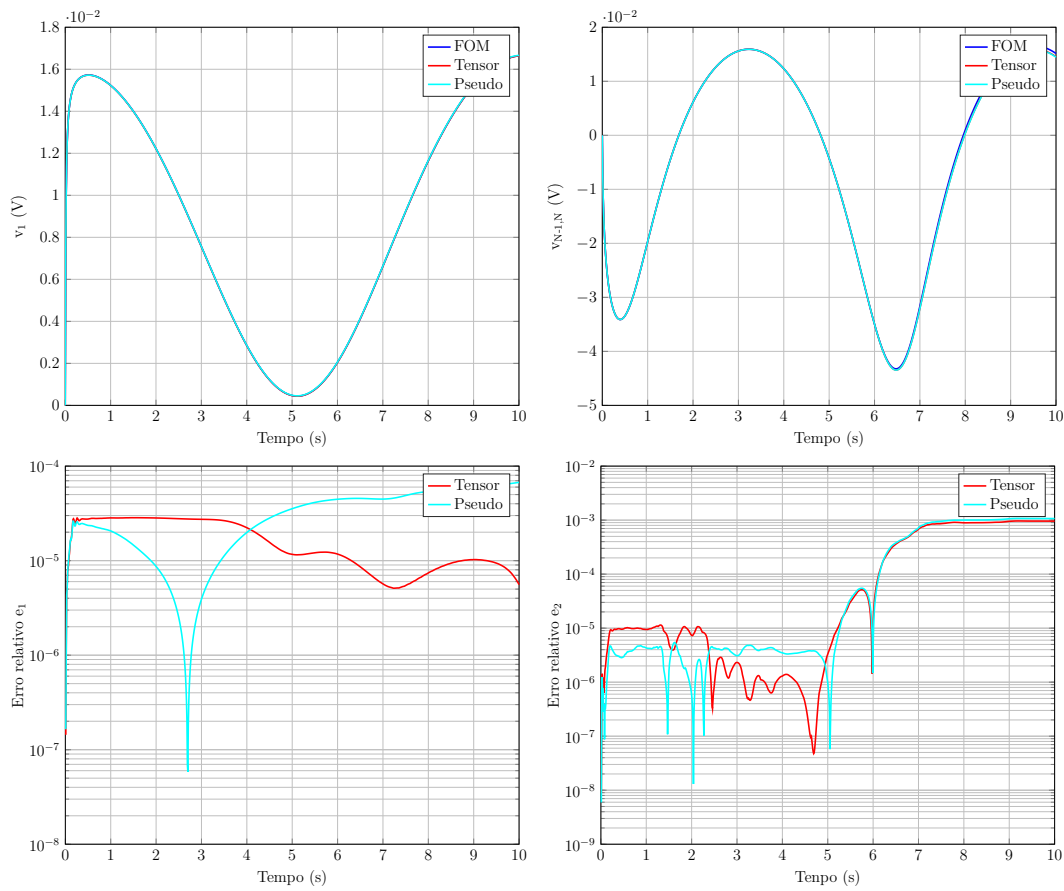


Figura 5.4: Escada RC MIMO com ordens reduzidas similares.

$$- u_1(t) = \frac{1}{2}(\cos(2\pi \frac{t}{10}) + 1)$$

$$- u_2(t) = \frac{1}{2} \cos(t)$$

- Integrador: ode15s
- Passo temporal: 10 ms
- Sistema original:
  - Ordem cheia:  $n = 800$
  - Tempo de simulação: 58.54 s
- Abordagem tensorial
  - Ordem reduzida:  $n_{r,TB} = 60$
  - Pontos de expansão: 6 obtidos pelo IRKA
  - Normas dos erros relativos:

$$* e_1 = 6.01 \cdot 10^{-4}$$

$$* e_2 = 1.62 \cdot 10^{-2}$$

– Tempo de simulação: 2.33 s

▪ Abordagem pseudolinear

– Ordem reduzida:  $n_{r,PL} = 64$

– Pontos de expansão: 16 obtidos pelo IRKA

– Normas dos erros relativos:

$$* e_1 = 1.27 \cdot 10^{-3}$$

$$* e_2 = 1.80 \cdot 10^{-2}$$

– Tempo de simulação: 2.83 s

Agora, com uma configuração de pontos de expansão ligeiramente diferente, ambos os modelos reduzidos se comportam de maneira similar, com erros e tempos de simulação que não diferem muito entre si.

Também é importante ressaltar que as reduções são, de fato, independentes de entrada. A Fig. 5.5 representa uma simulação com os mesmos modelos reduzidos à Fig. 5.4, mas com entradas fixadas a  $u_1(t) = u_2(t) = e^t$ .

A Tabela 5.1 mostra os erros para cada abordagem de redução nesta simulação. Já que ambos são pequenos, mesmo com entradas variadas, a independência destes modelos com relação à entrada pode ser experimentalmente checada.

Tabela 5.1: Comparação entre  $e_{rel,1}$  e  $e_{rel,2}$  de ambas as técnicas de redução

	Tensorial	Pseudolinear
$e_{rel,1}$	$1.95 \cdot 10^{-3}$	$1.25 \cdot 10^{-3}$
$e_{rel,2}$	$1.09 \cdot 10^{-3}$	$6.73 \cdot 10^{-4}$

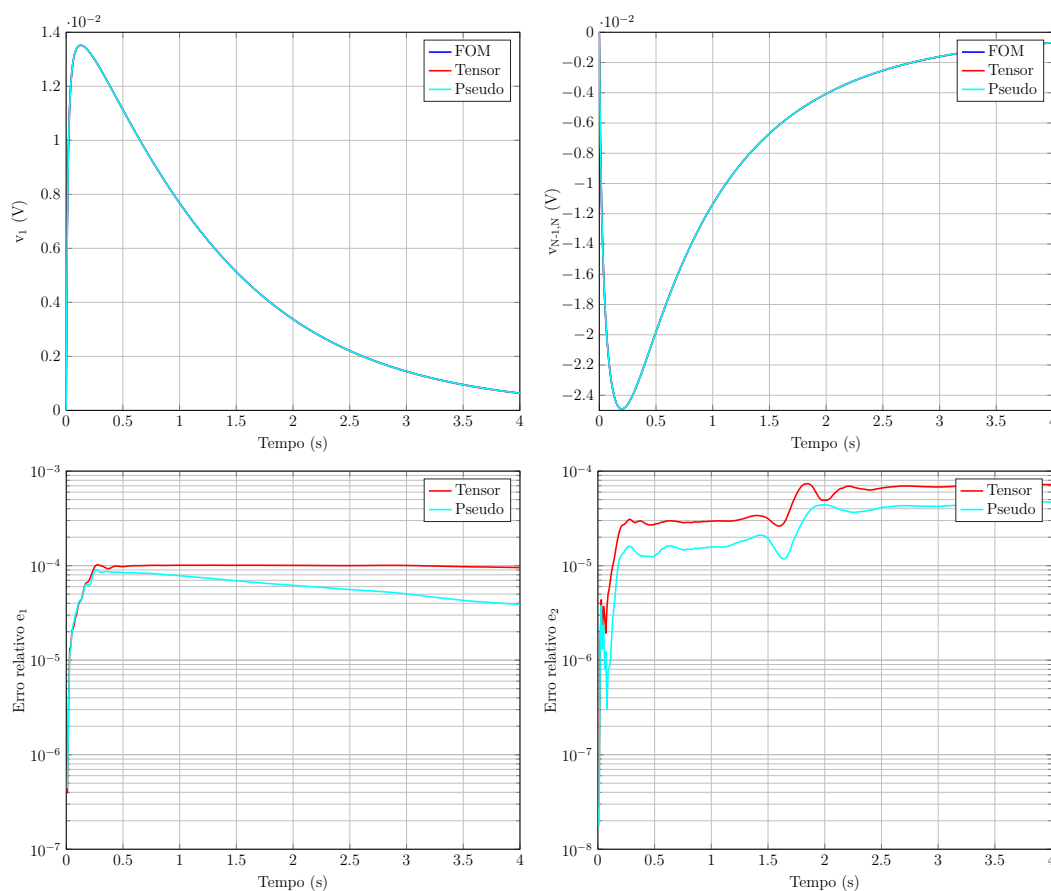


Figura 5.5: Escada RC MIMO com ordens reduzidas similares e  $u_1(t) = u_2(t) = e^{-t}$ .

### Redução de um Sistema de Ordem Grande

Até agora, somente sistemas de ordens medianas foram testados devido a questões de tempo, mas é muito importante testar os métodos desenvolvidos nesta tese para sistemas de ordem realmente alta. Esta é, afinal de contas, a intenção principal de redução de ordem.

A Fig. 5.6 mostra a resposta no tempo de uma escada RC MIMO com ordem cheia  $n = 5000$  e suas de formas reduzidas. De modo similar ao feito com os modelos de ordem mediana, é difícil escolher pontos de expansão que possam entregar modelos reduzidos estáveis com ambos os métodos de redução. Logo, os modelos reduzidos têm ordens parecidas, mas não iguais.

Como de praxe, os detalhes da simulação e da redução se encontram listados a seguir:

- Entradas da simulação:

- $u_1(t) = e^{-t}$

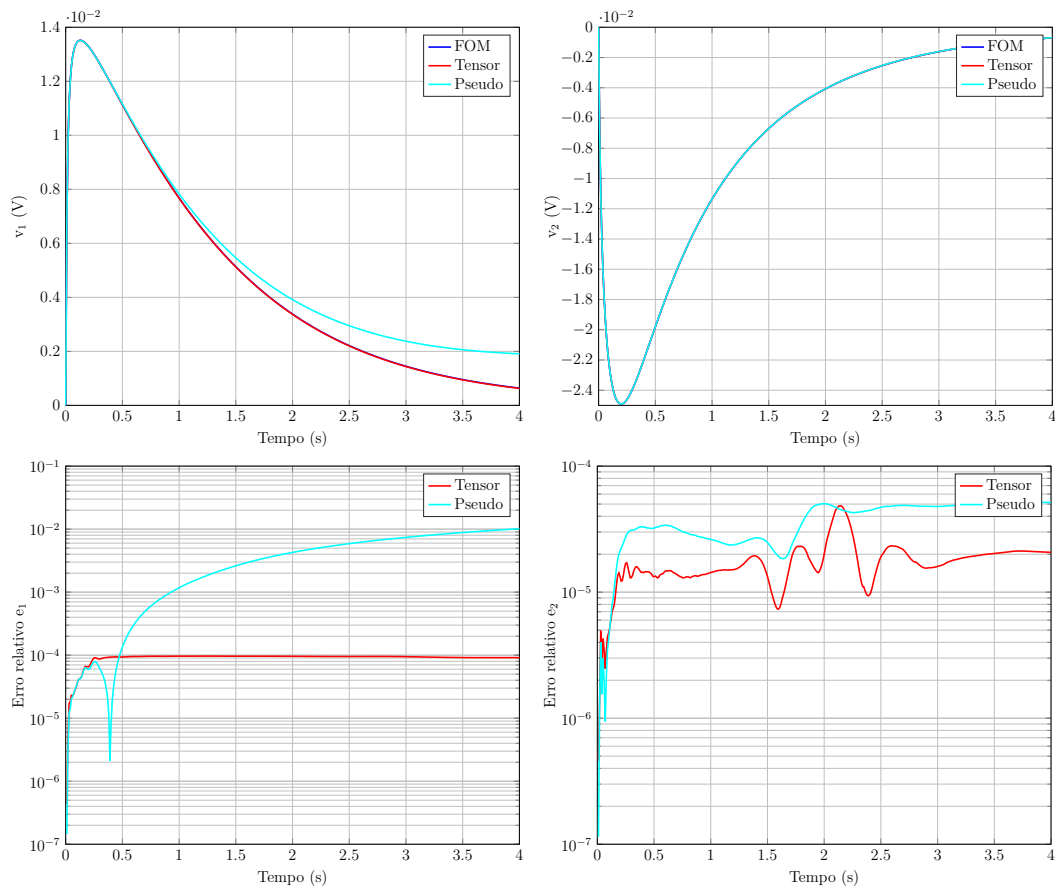


Figura 5.6: Escada RC MIMO de ordem alta e seus modelos reduzidos.

$$- u_2(t) = e^{-t}$$

- Integrador: ode15s
- Passo temporal: 10 ms
- Sistema original
  - Ordem cheia:  $n = 5000$
  - Tempo de simulação:  $5.64 \cdot 10^3 s$
- Abordagem tensorial
  - Ordem reduzida:  $n_{r,TB} = 80$
  - Pontos de expansão: 8 obtidos pelo IRKA
  - Normas dos erros relativos:
    - \*  $e_1 = 1.85 \cdot 10^{-3}$

$$* e_2 = 3.82 \cdot 10^{-4}$$

– Tempo de simulação: 5.73 s

- Abordagem pseudolinear

- Ordem reduzida:  $n_{r,PL} = 84$

- Pontos de expansão: 21 obtidos pelo IRKA

- Normas dos erros relativos:

$$* e_1 = 1.11 \cdot 10^{-1}$$

$$* e_2 = 8.02 \cdot 10^{-4}$$

- Tempo de simulação: 7.24 s

Pode-se ver que a abordagem pseudolinear entrega uma redução pior que a tensorial. Logo, pode-se concluir que a segunda técnica é mais adequada para reduzir sistemas grandes. Isto é intuitivo, pois as matrizes de projeção deste método contêm mais informação – sobretudo com relação às não-linearidades do sistema – do que as do método pseudolinear, o que pode desempenhar um grande papel quando o sistema é maior.

Anteriormente, pode-se observar que uma pequena mudança nos pontos de expansão pode causar uma melhora significativa na qualidade da redução. Este não foi o caso com a abordagem pseudolinear com este sistema de ordem grande, uma vez que essas pequenas mudanças resultaram em reduções instáveis.

## Reduções Ortogonais

Apenas para efeitos de ilustração, uma redução da escada RC MIMO por projeção ortogonal é feita, segundo cada um dos métodos. Este truque foi descrito na Observação 4.7 e, como se pode ver, as matrizes de projeção – e ordens reduzidas, portanto – tornaram-se muito maiores.

As informações relativas à simulação e à redução se encontram listadas a seguir.

- Entradas da simulação:

- $u_1(t) = e^{-t}$

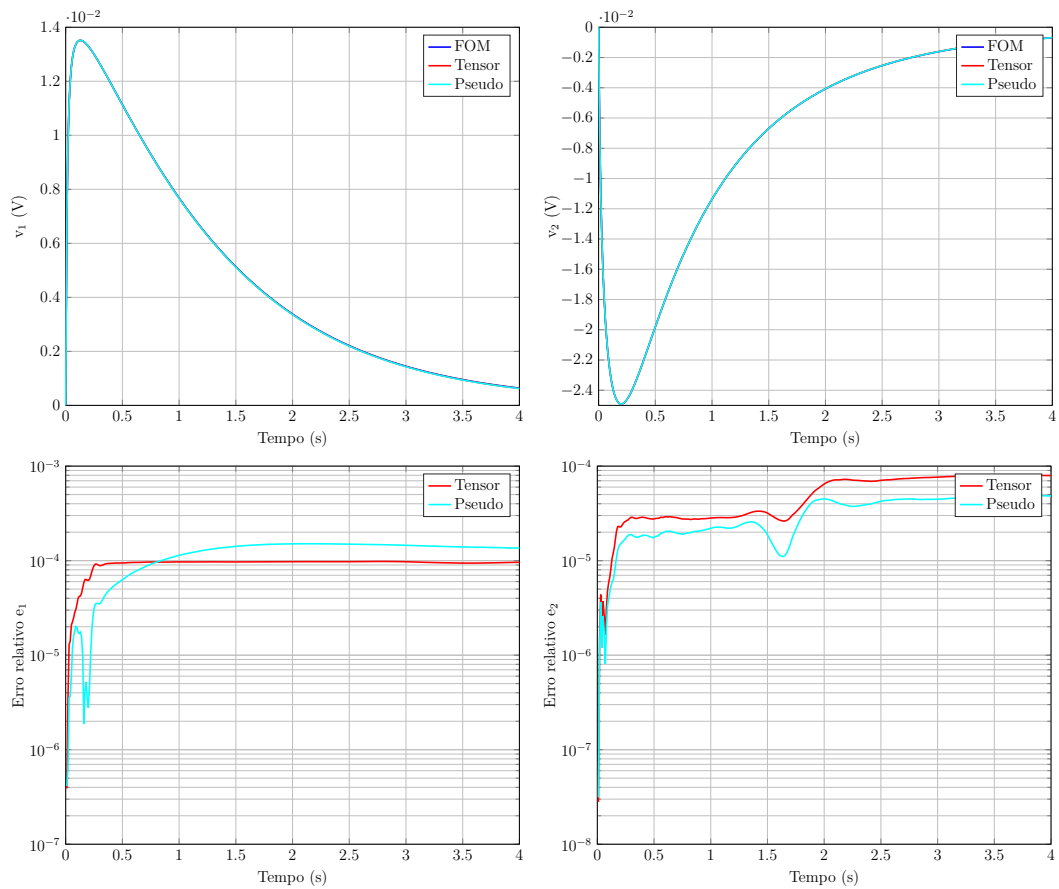


Figura 5.7: Escada RC MIMO e suas reduções ortogonais.

$$- u_2(t) = e^{-t}$$

- Integrador: ode15s
- Passo temporal: 10 ms
- Sistema original
  - Ordem cheia:  $n = 800$
  - Tempo de simulação: 14.75 s
- Abordagem tensorial
  - Ordem reduzida:  $n_{r,TB} = 100$
  - Ponto de expansão: 5 obtidos pelo IRKA
  - Normas dos erros relativos:

$$* e_1 = 1.88 \cdot 10^{-3}$$

$$* e_2 = 1.16 \cdot 10^{-3}$$

– Tempo de simulação: 4.37 s

▪ Abordagem pseudolinear

– Ordem reduzida:  $n_{r,PL} = 40$

– Pontos de expansão: 5 obtidos pelo IRKA

– Normas dos erros relativos:

$$* e_1 = 2.57 \cdot 10^{-3}$$

$$* e_2 = 7.13 \cdot 10^{-4}$$

– Tempo de simulação: 0.24 s

Nestas simulações, pode-se notar que a abordagem pseudolinear performa ligeiramente melhor que a tensorial no que se trata de erro relativo, mesmo que seu tempo de simulação e ordem reduzida sejam muito menores, com os mesmos pontos de expansão. Isso significa que esta técnica representa uma escolha mais inteligente quando se reduz ortogonalmente. Como um dos maiores problemas da técnica pseudolinear é a obtenção de ROMs estáveis, pode valer a pena uma redução ortogonal com este método.

Os momentos em projeções ortogonais coincidem também, como se pode ver em (5.16) a (5.19), seguindo a mesma notação que antes.

$$\mathbf{E}_{M,1,TB} = \begin{bmatrix} 1.11 \cdot 10^{-16} & 2.51 \cdot 10^{-17} \\ 4.14 \cdot 10^{-17} & 2.69 \cdot 10^{-17} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

$$\mathbf{E}_{M,2,TB} = \begin{bmatrix} 2.33 \cdot 10^{-16} & 6.35 \cdot 10^{-19} & 3.97 \cdot 10^{-19} & 2.76 \cdot 10^{-17} \\ 2.77 \cdot 10^{-17} & 2.05 \cdot 10^{-18} & 2.37 \cdot 10^{-18} & 1.40 \cdot 10^{-16} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

$$\mathbf{E}_{M,1,PL} = \begin{bmatrix} 1.15 \cdot 10^{-17} & 1.02 \cdot 10^{-23} \\ 1.66 \cdot 10^{-25} & 6.84 \cdot 10^{-17} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

$$\mathbf{E}_{M,2,PL} = \begin{bmatrix} 5.74 \cdot 10^{-17} & 6.78 \cdot 10^{-22} & 5.69 \cdot 10^{-22} & 3.90 \cdot 10^{-26} \\ 1.86 \cdot 10^{-21} & 5.96 \cdot 10^{-26} & 6.39 \cdot 10^{-26} & 2.47 \cdot 10^{-17} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

### 5.1.3 Interpolação Tangencial

Assim como feito com as abordagem com blocos, todas as análises e testes feitos anteriormente serão refeitos com os métodos que usam interpolação tangencial. A acurácia no domínio do tempo, independência de entrada de treinamento e a verificação da coincidência dos momentos são alguns dos pontos abordados pelos resultados que seguem.

#### Redução com a Menor Ordem Reduzida Possível

Como já mencionado anteriormente, um dos maiores problemas da abordagem pseudolinear é a estabilidade dos modelos reduzidos. Este problema se torna ainda mais evidente com o uso de interpolação tangencial, já que nenhuma das configurações de pontos de expansão determinadas pelo IRKA que foram testadas entregou uma redução estável. Logo, somente reduções pelo método tangencial são testadas nesta seção.

Como não há mais a necessidade de escolher uma configuração de pontos de expansão que consiga entregar modelos reduzidos estáveis pelos dois métodos ao mesmo tempo, a quantidade deles pode ser determinada de maneira arbitrária. Então, para ser possível determiná-la de maneira objetiva, uma série de simulações foi rodada, comparando os erros em ambas as saídas para vários valores de ordens reduzidas para entradas  $u_1(t) = u_2(t) = e^{-t}$ . A Fig. 5.8 mostra estes resultados.

Exceto os erros correspondentes à ordem reduzida  $n_r = 45$ , os erros dos sistemas com ordens maiores que  $n_{r,thresh} = 30$  não apresentam uma grande diferença entre si. Logo,  $n_{r,thresh} = 30$  corresponde à melhor escolha de pontos de expansão, já que é a menor ordem reduzida que entrega uma boa aproximação.

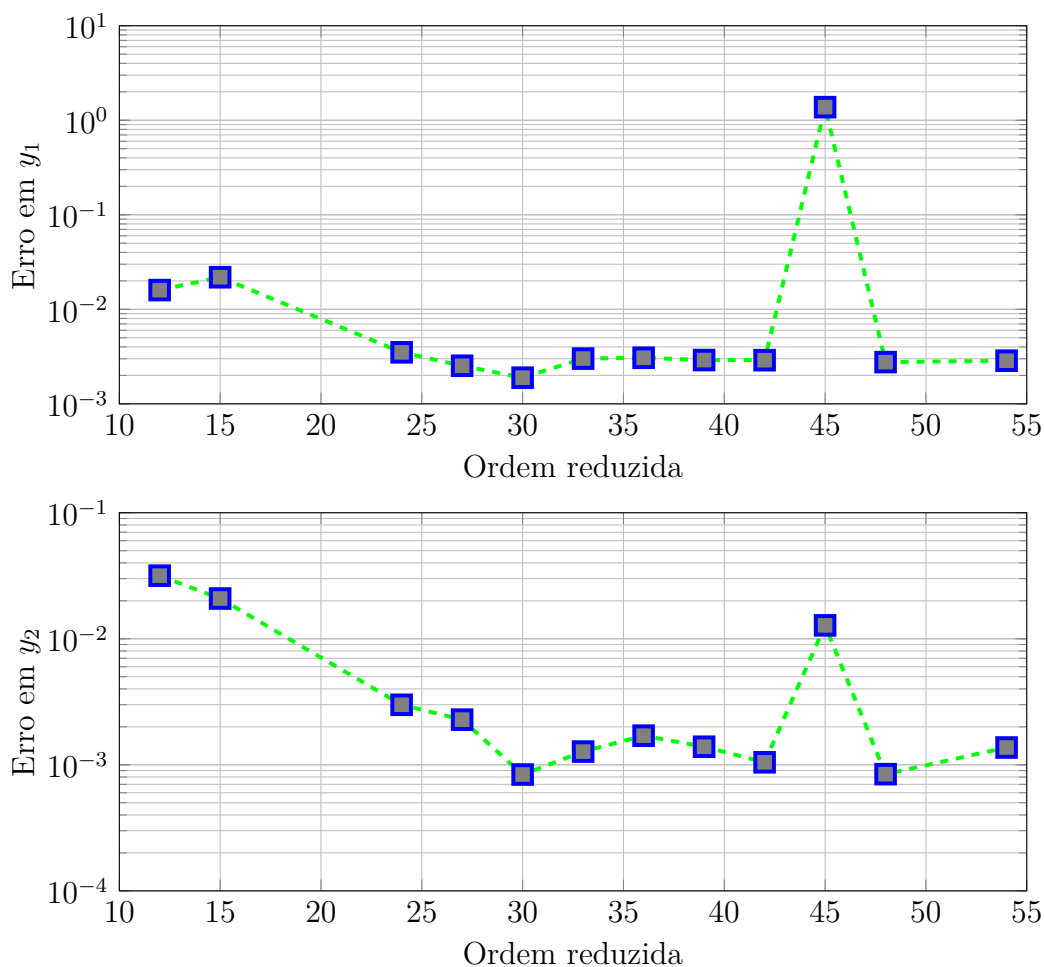


Figura 5.8: Erros correspondentes às reduções tensoriais com interpolação tangencial.

A Fig. 5.8 também mostra o que foi previamente discutido em § 5.1.2: mesmo com uma ordem reduzida maior, um sistema pode apresentar grandes erros sem nenhuma razão aparente. Isso pode ser explicado pelo fato de que as aproximações têm somente uma tendência de serem melhores com o aumento da ordem reduzida. É possível, entretanto, que a escolha dos pontos de expansão seja infeliz e que o modelo reduzido não seja bom.

Este mesmo efeito aparentemente aleatório ocorre com a preservação da estabilidade. Pode-se ver que não há nenhum ponto designado aos erros entre as ordens reduzidas de 15 e 24. Isso ocorre devido ao fato de que essas ordens reduzidas resultaram em modelos instáveis e que, portanto, não puderam ser completamente simuladas. Não há, até agora, nenhuma técnica de redução que permita uma escolha dos pontos de expansão de modo tal que a preservação da estabilidade seja garantida.

A Fig. 5.9 mostra a resposta no tempo do modelo original e seu modelo reduzido com ordem reduzida  $n_r = 30$  – e, portanto, número de pontos de expansão  $N_{s0} = 10$ .

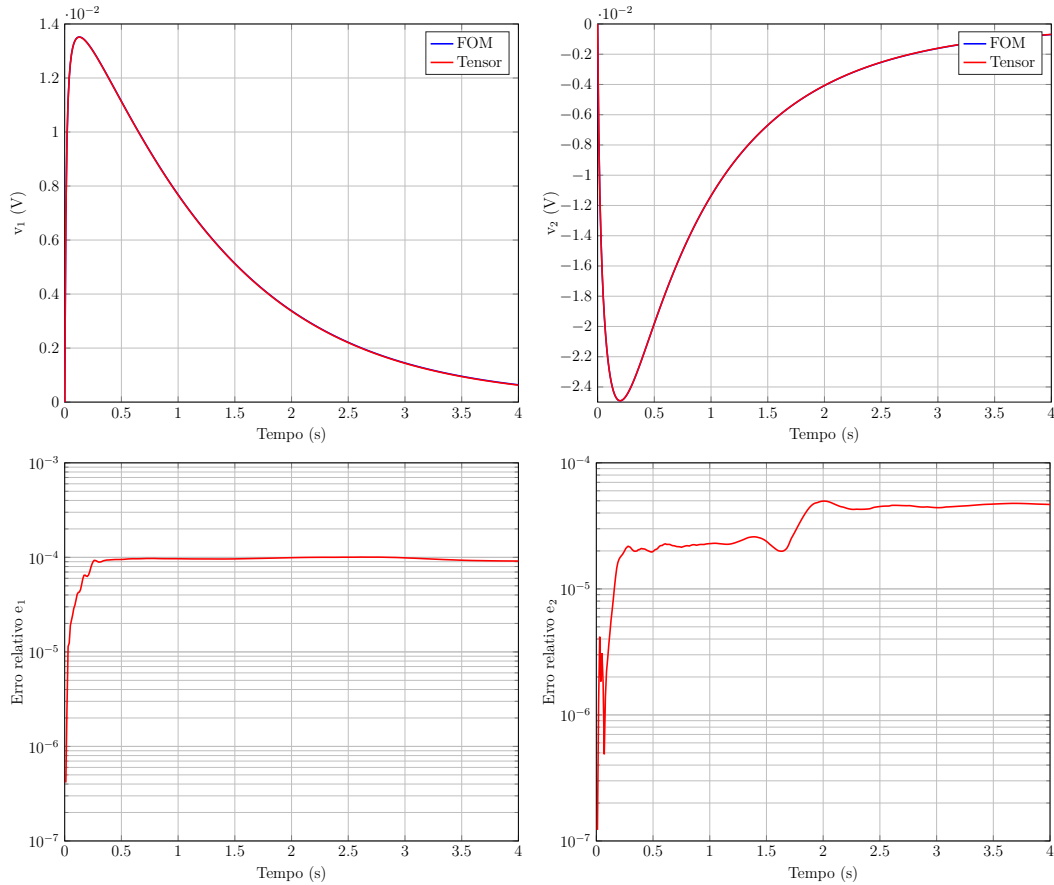


Figura 5.9: Escada RC MIMO e seu ROM com interpolação tangencial.

É possível observar que, mesmo com uma condição de coincidência de momentos mais fraca, a abordagem tangencial entrega uma boa aproximação ao sistema original com uma ordem reduzida baixa. A listagem a seguir enumera os detalhes destas simulações e desta redução.

- Entradas da simulação:

- $u_1(t) = e^{-t}$

- $u_2(t) = e^{-t}$

- Integrador: ode15s

- Passo temporal: 10 ms

- Sistema original
  - Ordem cheia:  $n = 800$
  - Tempo de simulação: 34.97 s
  
- Abordagem tensorial
  - Ordem reduzida:  $n_r = 30$
  - Pontos de expansão: 10 obtidos pelo IRKA
  - Direções tangenciais: obtidas pelo IRKA
  - Normas dos erros relativos:
    - \*  $e_1 = 1.89 \cdot 10^{-3}$
    - \*  $e_2 = 7.37 \cdot 10^{-4}$
  - Tempo de simulação: 0.87 s

A independência de sinal de treinamento deste método também deve ser checada. A Fig. 5.10 mostra a resposta temporal destes mesmos modelos a entradas degrau.

Tanto pela resposta no tempo quando pelo gráfico do erro, pode-se notar que o modelo reduzido aproxima o original muito bem. Logo, conclui-se que a redução é, de fato, independente do sinal de entrada.

### Checagem dos Momentos

Como a independência deste modelo reduzido com respeito à entrada pode ser vista, a coincidência de seus momentos também pode ser verificada. As equações (5.20) e (5.21) mostram, respectivamente, as normas dos erros de  $\mathbf{l}_i^T \mathbf{G}_1 \mathbf{r}_i$  e  $\mathbf{l}_i^T \mathbf{G}_2 (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i)$ , que são dois escalares.

$$e_{M,1} = 3.03 \cdot 10^{-14} \quad (5.20)$$

$$e_{M,2} = 6.29 \cdot 10^{-23} \quad (5.21)$$

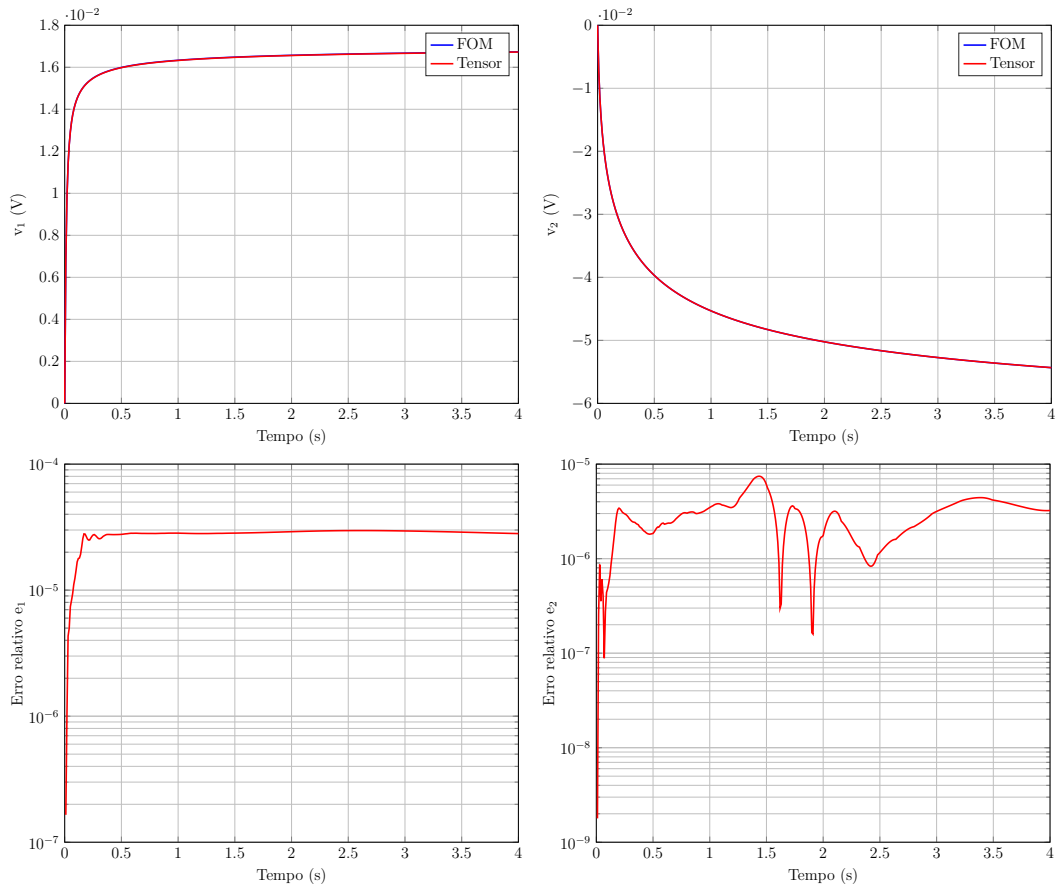


Figura 5.10: Escada RC MIMO e seu ROM com interpolação tangencial,  $u(t) = [1 \ 1]^T$ .

Pode ser verificado, então, que a abordagem tensorial usando interpolação tangencial pode garantir coincidência de momentos, uma vez que todos erros relacionados a eles ficam em torno da precisão da máquina e podem, portanto, ser atribuídos ao truncamento numérico.

### Reduções Ortogonais

Como as reduções com interpolação tangencial também podem trazer problemas de estabilidade para os modelos reduzidos – especialmente para aqueles que foram reduzidos com a abordagem pseudolinear – é intuitivo tentar reduzi-los ortogonalmente. De fato, este modo de aproximação pode entregar modelos reduzidos estáveis com mais frequência.

Para se comparar a qualidade das reduções, a Fig. 5.11 mostra as respostas no tempo dos modelos original e reduzidos com a mesma ordem reduzida  $n_r = 36$ .

A listagem a seguir mostra os detalhes, como de costume.

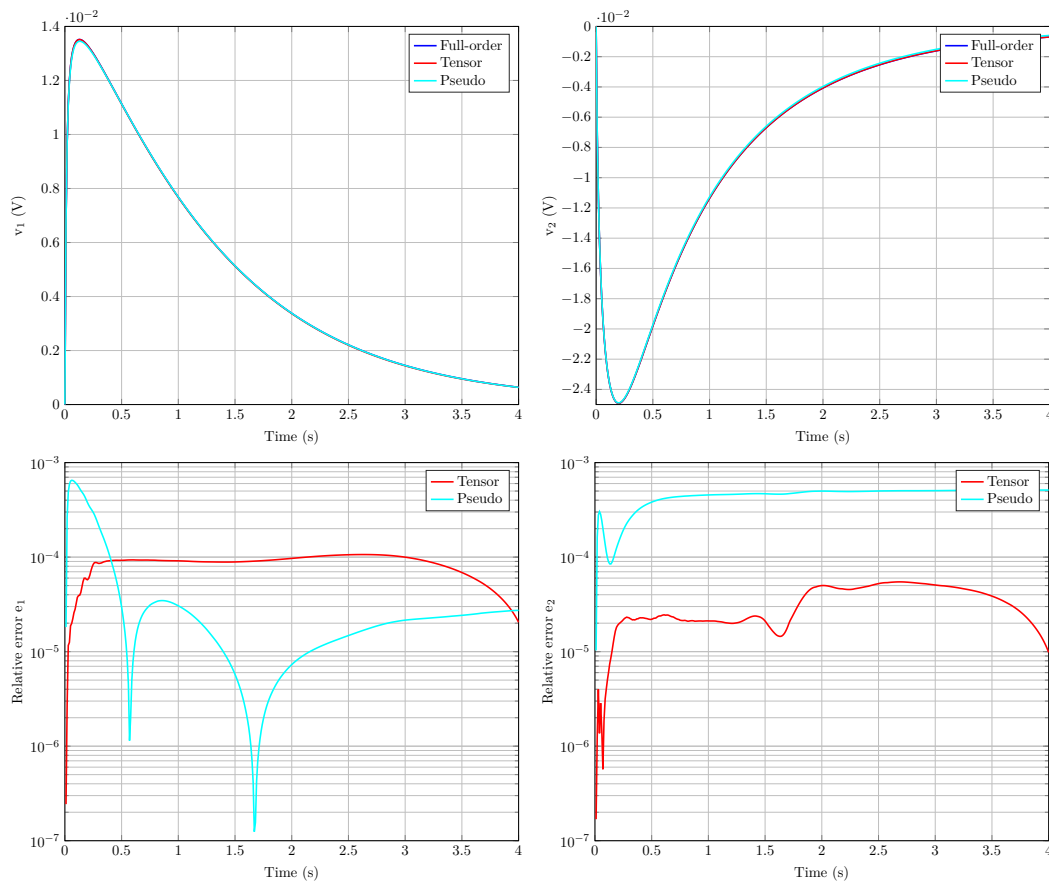


Figura 5.11: Escada RC MIMO e suas reduções ortogonais com interpolação tangencial.

- Entradas da simulação:

- $u_1(t) = e^{-t}$

- $u_2(t) = e^{-t}$

- Integrador: ode15s

- Passo temporal: 10 ms

- Sistema original

- Ordem cheia:  $n = 800$

- Tempo de simulação: 14.66 s

- Abordagem tensorial

- Ordem reduzida:  $n_r = 36$

- Pontos de expansão: 6 obtidos pelo IRKA
  - Direções tangenciais: obtidas pelo IRKA
  - Normas dos erros relativos:
    - \*  $e_1 = 1.75 \cdot 10^{-3}$
    - \*  $e_2 = 7.18 \cdot 10^{-4}$
  - Tempo de simulação:  $3.31 \cdot 10^{-1}$  s
- Abordagem pseudolinear
- Ordem reduzida:  $n_r = 36$
  - Pontos de expansão: 9 obtidos pelo IRKA
  - Direções tangenciais: obtidas pelo IRKA
  - Normas dos erros relativos:
    - \*  $e_1 = 2.57 \cdot 10^{-3}$
    - \*  $e_2 = 9.26 \cdot 10^{-3}$
  - Tempo de simulação:  $2.67 \cdot 10^{-1}$  s

Pode-se observar que ambas as abordagens performam de maneira similar com respeito ao tempo de simulação e à qualidade da aproximação. Conclui-se, então, que fazer uma projeção ortogonal pode ser uma boa maneira de usar a abordagem pseudolinear com direções tangenciais, já que seus resultados se mostram comparáveis aos da abordagem tensorial.

Tirando o fato de que mais momentos coincidem pela técnica pseudolinear, nenhuma vantagem pode ser vista com respeito às duas respostas no tempo. Deve-se dizer, entretanto, que é preferível que sistemas sejam reduzidos obliquamente, que podem garantir coincidência de momentos com ordens reduzidas menores. Estes testes foram mostrados para ilustrar uma possibilidade de redução quando se encontra problemas com estabilidade. Nestes casos, vale a tentativa com projeções ortogonais.

### 5.1.4 Abordagens com Blocos vs. Direções Tangenciais

Não menos importante é a comparação entre as abordagens com blocos e as tangenciais. Contudo, como cada método dá uma quantidade diferente de colunas para um mesmo número de pontos de expansão, torna-se difícil compará-los todos de uma maneira justa. Este problema se torna ainda mais crítico pois várias reduções são instáveis.

Então, para transpor este obstáculo, uma série de simulações variando o número de pontos de expansão foi feita. Os erros obtidos em cada uma destas simulações são plotados na Fig. 5.12. Todas as simulações foram rodadas com ode15s, pontos de expansão e direções tangenciais obtidos pelo IRKA, um modelo original de ordem  $n = 800$ , simulações com tempos de  $t_i = 0$  a  $t_f = 4$  s e  $u_1(t) = u_2(t) = \sin(2t)$  como entradas.

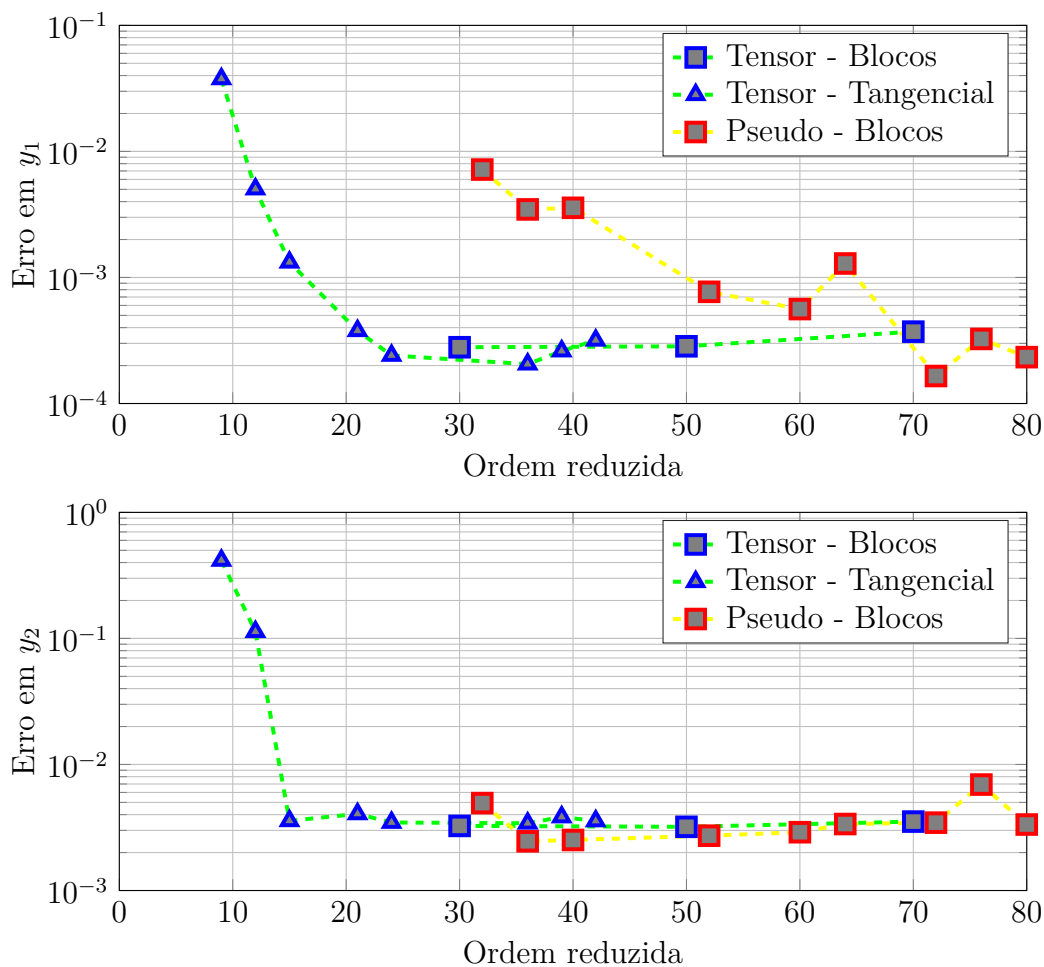


Figura 5.12: Erros relativos para várias ordens reduzidas.

Os marcadores nos gráficos foram colocados nas ordens reduzidas que deram modelos estáveis. Pode-se notar que nem todas as configurações resultaram em reduções estáveis, o que pode ser visto pela distribuição desigual dos marcadores. Ademais, nenhum marcador foi atribuído à técnica pseudolinear tangencial, uma vez que ela não conseguiu entregar ROMs estáveis, como já discutido em sua própria seção.

Considerando os erros nas saídas e na tentativa de escolher a menor ordem reduzida possível, a Tabela 5.2 pode ser construída, mostrando as configurações de pontos de expansão que serão usadas na comparação das três técnicas.

Tabela 5.2: Ordens reduzidas escolhidas para a comparação final.

	$N_{s0}$	$n_r$	$e_{rel,1}$	$e_{rel,2}$
<b>Tensorial com blocos</b>	3	30	$2.80 \cdot 10^{-4}$	$3.26 \cdot 10^{-3}$
<b>Tensorial Tangencial</b>	7	21	$3.78 \cdot 10^{-4}$	$4.06 \cdot 10^{-3}$
<b>Pseudolinear com blocos</b>	13	52	$7.70 \cdot 10^{-4}$	$2.72 \cdot 10^{-3}$

Seguindo os mesmos parâmetros de simulação que as simulações anteriores desta seção e com os parâmetros de redução na Tabela 5.2, a Fig. 5.13 pode ser gerada.

Pode-se ver que, como esperado, as três abordagens performaram de maneira similar com respeito à qualidade da redução. A diferença jaz no tamanho dos modelos reduzidos, que variam de 21 – no caso da abordagem tensorial com direções tangenciais – a 52 – quando se reduz com a abordagem pseudolinear e blocos de direção. Para ilustrar esta variância, a Tabela 5.3 mostra o tempo de simulação de cada ROM.

Tabela 5.3: Comparação dos tempos de simulação do FOM e dos ROMs.

	$n_{(r)}$	$t_{sim}(s)$
<b>Ordem cheia</b>	800	15.40
<b>Tensorial com blocos</b>	30	$2.32 \cdot 10^{-1}$
<b>Tensorial tangencial</b>	21	$1.09 \cdot 10^{-1}$
<b>Pseudolinear com blocos</b>	53	$5.42 \cdot 10^{-1}$

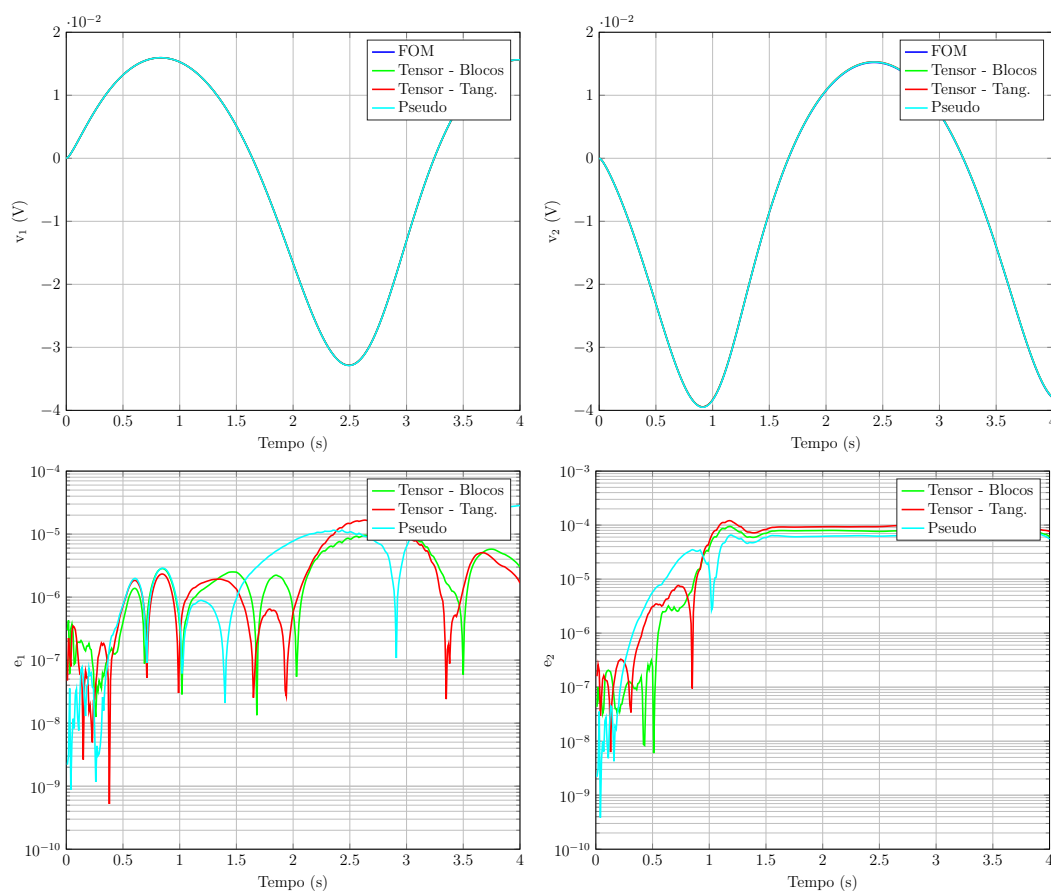


Figura 5.13: Escada RC MIMO e seus vários modelos reduzidos.

Fica claro que a abordagem tensorial combinada com as direções tangenciais performa melhor que as demais, uma vez que é capaz de entregar modelos reduzidos confiáveis, estáveis e com ordem baixa mais frequentemente.

## 5.2 Modelo de FitzHugh-Nagumo

De maneira similar ao feito na seção anterior, que tratou da escada RC MIMO, esta seção também apresenta uma breve descrição do sistema MIMO usado para testar as reduções e, em seguida, os resultados de suas simulações.

### 5.2.1 Descrição do Modelo

O modelo de FitzHugh-Nagumo é um sistema não-linear que funciona como um oscilador de relaxação. Quando o estímulo externo excede um certo limite, o sistema faz uma breve excursão no espaço de fase antes de retornar ao seu ciclo limite. Se este limite não for ultrapassado, o sistema permanece dentro da oscilação. Pode-se falar, então, de um ciclo limite estável.

Um sistema real que opera tipicamente deste jeito é a membrana de uma célula, que apresenta um desvio em seu ciclo de bombeamento de íons com a presença de uma corrente elétrica. Neste caso,  $v(x, t)$  é a tensão na membrana – diferença de potencial entre os lados de dentro e fora da célula, dada por um gradiente de concentração de íons – ao longo do tempo e  $w(x, t)$  é a variável de relaxação, que representa o fluxo de íons entre os lados de dentro e fora da célula. As equações que descrevem o modelo contínuo matematicamente estão dispostas a seguir [11, 29].

$$\varepsilon \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) + f(v(x, t)) - w(x, t) + g \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, t) = hv(x, t) - \gamma w(x, t) + g \quad (5.23)$$

Segundo o que foi feito em [5],  $f(v) = v(v - 0.1)(1 - v)$  é uma não-linearidade cúbica,  $\varepsilon = 0.015$ ,  $h = 0.5$ ,  $\gamma = 2$ ,  $g = 0.05$  são os valores dos parâmetros e as condições de contorno e iniciais do modelo são dadas pelas expressões que seguem.

$$v(x, 0) = 0 \quad w(x, 0) = 0 \quad \text{para } x \in [0, 1] \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = -i_0 \quad \frac{\partial v}{\partial x}(1, t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0 \quad (5.25)$$

Quando se semidiscretiza o modelo em  $k$  elementos, chega-se a um sistema de  $2k$  ODEs –  $k$  para (5.22) e  $k$  para (5.23) – cujas expressões têm não-linearidades cúbicas que vêm de  $f(v)$ . Logo, é necessário adicionar as expressões  $z_i = v_i^2$ ,  $1 \leq i \leq k$  como novas variáveis de estado, o que adiciona mais  $k$  equações diferenciais ao modelo. O modelo quadrático-bilinear final tem, portanto,  $3k$  ODEs. Se  $\mathbf{v} = [v_1, \dots, v_k]^T$ ,  $\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_k]^T$  e  $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_k]^T$  forem definidos como estados que correspondem à discretização espaciais de  $v$ ,  $w$  e  $z$  respectivamente, o vetor de estados total do sistema discretizado é  $\mathbf{x} = [\mathbf{v}^T, \mathbf{w}^T, \mathbf{z}^T]^T$ .

Algumas considerações sobre as entradas do sistema também devem ser feitas. A excitação em forma de corrente elétrica  $i_0$  que estimula a derivada espacial da variável de estado  $v$  em  $x = 0$  é, evidentemente, uma das entradas do modelo de FitzHugh-Nagumo, sendo, portanto, referenciada como  $u_1(t)$ . Entretanto, esta não é a única entrada do sistema. A constante  $g$  da PDE no sistema contínuo permanece inalterada no modelo semidiscretizado, ou seja, ela continua sendo uma constante que não depende dos valores dos estados. Deste modo, este termo não pode ser inserido a nenhuma matriz que multiplique os estados  $\mathbf{x}$  ou qualquer uma de suas composições – a saber  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{H}$  e  $\bar{\mathbf{N}}$  – na representação de espaço de estados. Logo, uma nova entrada artificial  $u_2(t) = 1$  é adicionada ao vetor  $\mathbf{u}(t)$ . O modelo discretizado tem, portanto, duas entradas.

As saídas do sistema podem ser escolhidas como se queira, mas as variáveis de estado  $v_i$  e  $w_i$  representam a resposta no tempo de  $v(i, t)$  e  $w(i, t)$  na mesma coordenada de espaço arbitrária  $x = i$ . Faz sentido, então, escolher uma matriz de saídas de modo tal que ela possa filtrar os estados que correspondem à mesma coordenada espacial, de modo que os ciclos limite possam ser vistos quando plotados no espaço de fase.

Como uma análise extensiva das abordagens de redução já foi feita com a escada RC, uma menos completa será feita com este modelo.

## 5.2.2 Resultados das Simulações

Diferente ao que ocorre quando se simula a escada RC, os pontos de expansão obtidos pelo IRKA não foram bem-sucedidos em dar modelos reduzidos estáveis da equação de FitzHugh-Nagumo. Logo, foi necessário escolher os pontos de expansão manualmente, o que pode ser muito difícil sem nenhuma informação adicional.

Deste modo, a resposta na frequência do sistema é investigada e a Fig. 5.14 mostra a amplitude da primeira função de transferência ao longo da frequência.

A nomenclatura  $G_{i,jk}$  corresponde à resposta na frequência da função na  $j$ -ésima linha e  $k$ -ésima coluna da função de transferência de ordem  $i$ .

A segunda função de transferência também é relevante nesta análise, então sua amplitude ao longo da frequência também é plotada. Para gerar a Fig. 5.15, a segunda matriz de

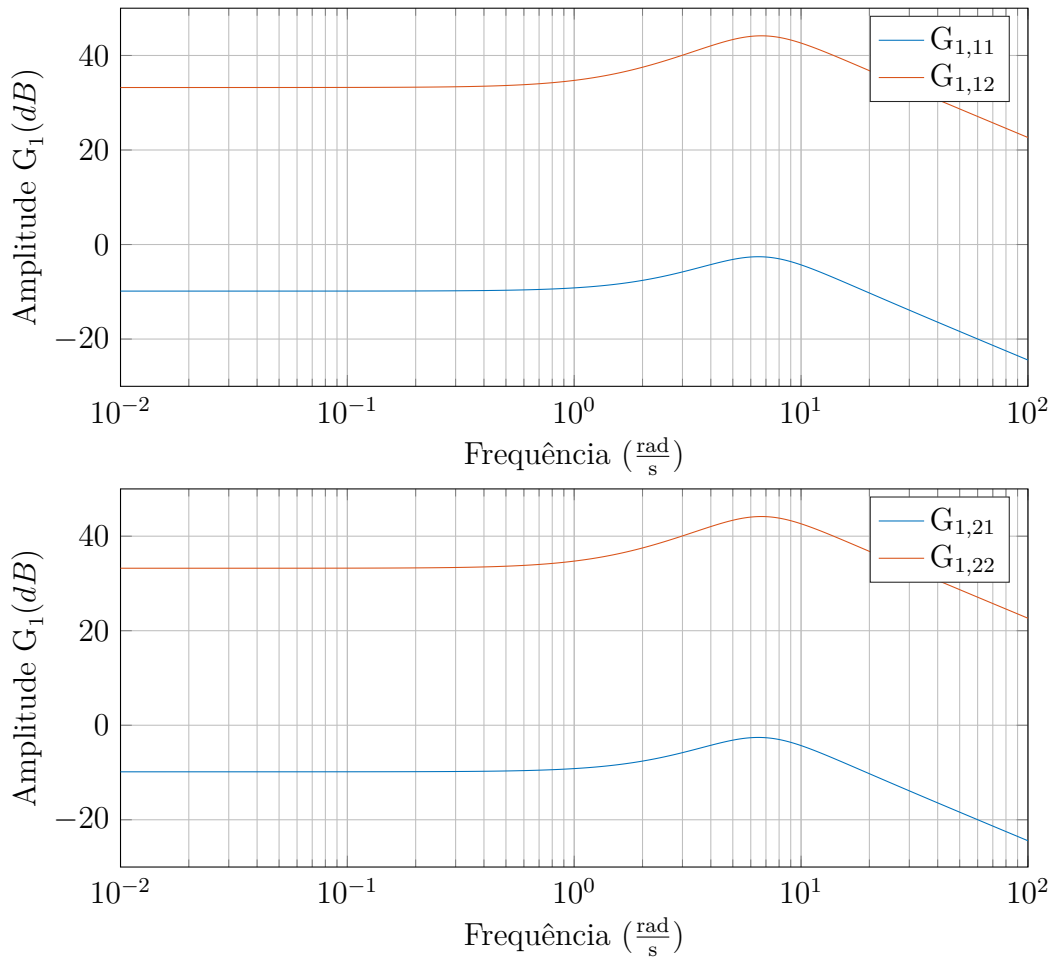


Figura 5.14: Resposta na frequência da primeira função de transferência do modelo de FitzHugh-Nagumo.

transferência foi calculada nos valores de frequência  $i\omega$  e sua amplitude foi tomada, análogo ao que é feito no caso linear.

Pode-se checar que as frequências em torno de  $\omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  são as que mais contribuem para cada função de transferência. Logo, seria interessante usar pontos de expansão que estão perto destes picos, alguns à sua direita e alguns à sua esquerda para se fazer uma boa interpolação.

Agora, já que não há nenhum jeito de variar as ordens reduzidas e direções tangenciais automaticamente – porque os pontos obtidos pelo IRKA não são apropriados – não é possível mostrar um gráfico dos os erros com várias ordens reduzidas. Logo, a escolha dos pontos de expansão foi feita levando-se somente a resposta na frequência em consideração.

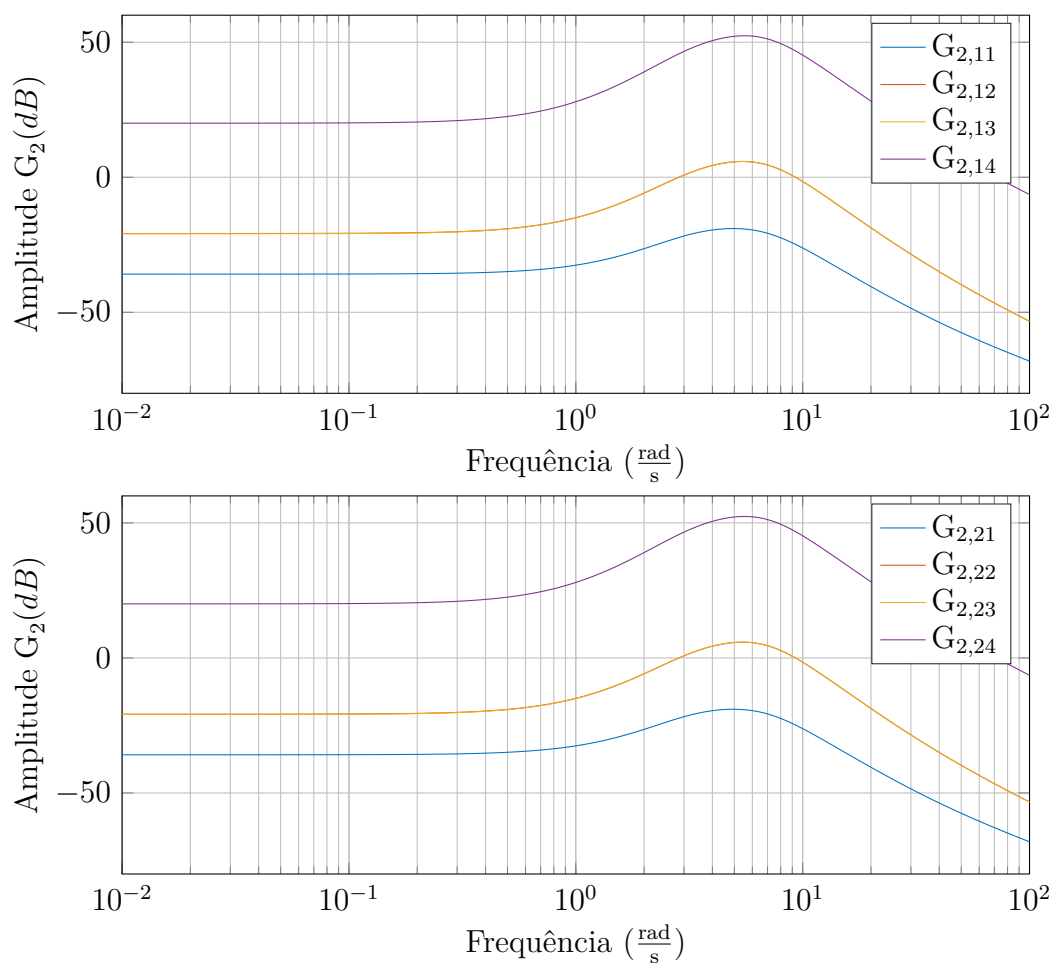


Figura 5.15: Resposta na frequência da segunda função de transferência do modelo de FitzHugh-Nagumo.

Isso significa que não há nenhuma maneira de garantir que as respostas obtidas são ótimas em qualquer sentido.

### Resposta no Tempo no Local de Excitação

Primeiramente, a resposta no tempo de  $v(x, t)$  e  $w(x, t)$  no valor de  $x = 0$  é plotada, já que este é o lugar onde a excitação  $u_i(t) = i_0$  é fixada.

Como este modelo se comporta com ciclos limite e os parâmetros de redução dados pelo IRKA não são capazes de dar boas aproximações, é muito difícil chegar a modelos reduzidos estáveis. Em particular, os métodos de redução que já apresentavam dificuldades em entregar ROMs estáveis não conseguiram reduzir modelos que possam ser simulados completamente com nenhuma configuração de parâmetros.

Logo, a técnica de redução que era mais suscetível a entregar modelos estáveis – i.e. a abordagem tensorial com interpolação tangencial – foi a única a conseguir reduzir este modelo.

A Fig. 5.16 mostra os ciclos limite que ocorrem em  $x = 0$  e sua redução oblíqua.

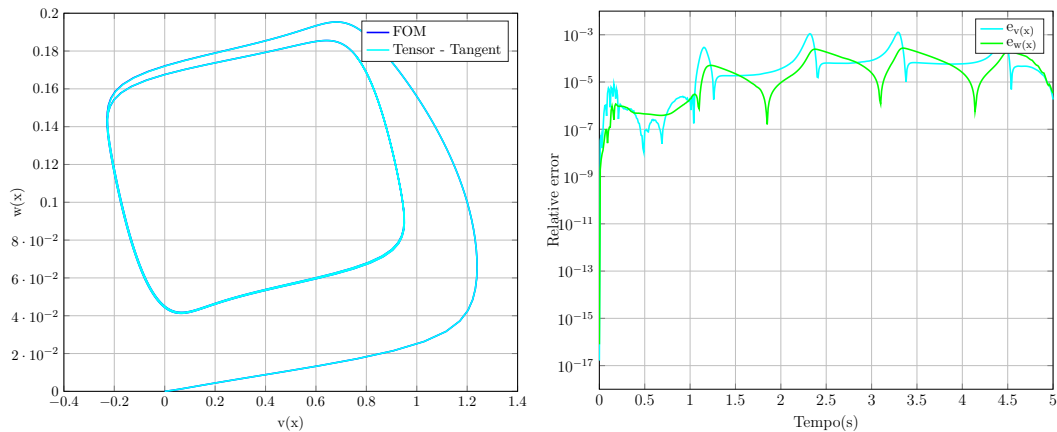


Figura 5.16: Espaço de fases de  $v(0, t)$  e  $w(0, t)$  e seus erros.

A listagem que segue mostra os detalhes da simulação e da redução, com a exceção das direções tangenciais, que são dadas pela Tabela 5.4. Pode-se ver que os pontos foram escolhidos de maneira tal que um deles está nos picos –  $\omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  –, dois deles estão ligeiramente à esquerda dele e os outros dois, ligeiramente à direita (em escala logarítmica).

- Entradas da simulação:

- $u_1(t) = 5 \cdot 10^4 t^3 e^{-15t}$

- $u_2(t) = 1$

- Integrador: ode15s

- Período da simulação: 5 s

- Passo temporal: 10 ms

- Sistema original

- Ordem cheia:  $n = 1500$

- Tempo de simulação:  $9.97 \cdot 10^2$  s

- Abordagem tensorial com interpolação tangencial

- Ordem reduzida:  $n_r = 15$
- Normas dos erros relativos:
  - \*  $e_1 = 4.98 \cdot 10^{-3}$
  - \*  $e_2 = 2.07 \cdot 10^{-3}$
- Tempo de simulação: 1.41 s

Tabela 5.4: Pontos de expansão e direções tangenciais da redução do modelo de FitzHugh-Nagumo.

Pontos de expansão	Direções à esquerda $l_i$	Direções à direita $r_i$
0.1	$\begin{bmatrix} 1.2018 \\ 1.4234 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6.9925 \\ 8.7541 \end{bmatrix}$
1	$\begin{bmatrix} 5.6911 \\ 0.7659 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5.7136 \\ 4.6752 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} 8.7503 \\ 7.4053 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6.2869 \\ 1.4134 \end{bmatrix}$
100	$\begin{bmatrix} 3.4857 \\ 4.5653 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8.7776 \\ 0.6813 \end{bmatrix}$
150	$\begin{bmatrix} 0.4192 \\ 6.6825 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6.6235 \\ 7.1424 \end{bmatrix}$

A coincidência dos momentos também pode ser checada por este método. Os erros de  $l_i^T \mathbf{G}_1 \mathbf{r}_i$  e  $l_i^T \mathbf{G}_2 (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i)$  normalizados ao longo dos pontos de expansão são dados nas equações que seguem:

$$e_{M,1} = 1.01 \cdot 10^{-13} \quad (5.26)$$

$$e_{M,2} = 5.57 \cdot 10^{-13} \quad (5.27)$$

A Fig. 5.17 mostra o resultado da mesma simulação, mas adicionando-se vários valores de  $x$ . Este gráfico tridimensional foi gerado pegando-se as matrizes de projeção  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{W}$

da última redução e aplicando-as a novas matrizes de saída artificiais. Para efeitos de compreensão, supõe-se que  $\mathbf{x}_r(t)$  são os estados do ROM e  $\mathbf{C}_i$  é a matriz de saída que filtra as respostas de  $v(i, t)$  e  $w(i, t)$ . Então as saídas artificiais  $\mathbf{y}_i(t)$  foram calculadas como  $\mathbf{y}_i(t) = \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V}\mathbf{x}_r(t)$ .

É importante ressaltar que este método de redução é intencionado para aproximar bem a saída original, que é  $\mathbf{y}_0$ , neste caso.

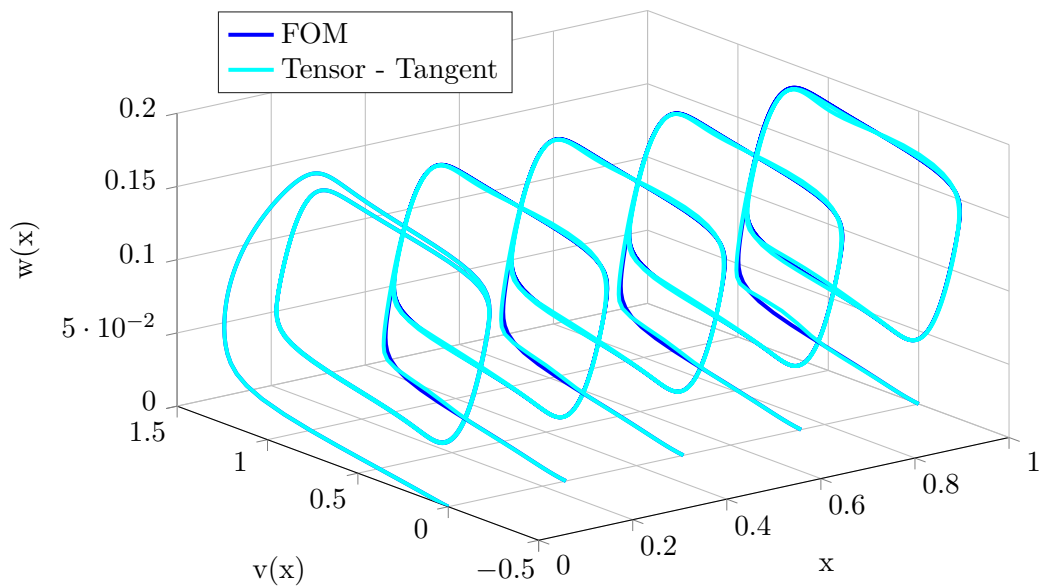


Figura 5.17: Espaço de fases tridimensional de  $v(x, t)$  e  $w(x, t)$ .

Pode-se ver que, mesmo que os ciclos limite ainda sejam mantidos e que não há um grande desvio dos dois modelos, uma pequena variação entre eles pode ser vista mesmo sem a ajuda de gráficos de erro. Então, seria interessante saber se as abordagens MIMO também conseguem reconstruir os estados dos sistema, assim como a técnica hermitiana do caso SISO.

### Reconstrução de Estados

Similar ao que foi feito com as técnicas SISO, é útil testar se as rotinas desenvolvidas para o caso MIMO também conseguem reconstruir os estados. Contudo, usar o mesmo raciocínio ao caso SISO para se escolher a matriz de saídas artificial para a redução como duas linhas de números 1 somente entregou resultados instáveis.

Neste caso, considerou-se uma redução ortogonal, cujo espaço de fase pode ser visto na Tabela 5.5.

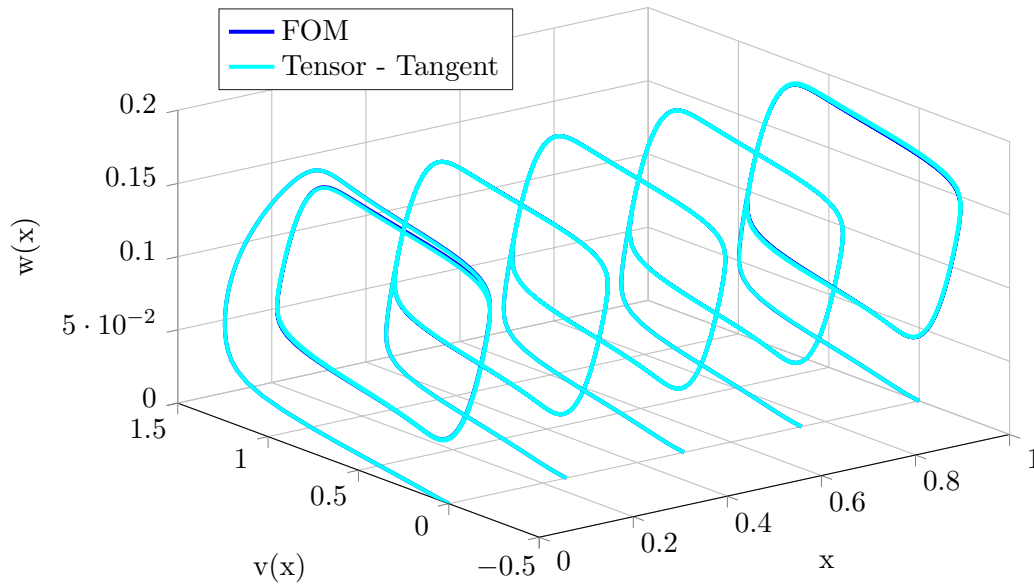


Figura 5.18: Espaço de fase tridimensional de  $v(x, t)$  e  $w(x, t)$ .

Os detalhes da simulação e da redução da Fig. 5.18 podem ser vistos na listagem a seguir e na Table 5.5.

- Entradas da simulação:

- $u_1(t) = 5 \cdot 10^4 t^3 e^{-15t}$

- $u_2(t) = 1$

- Integrador: ode15s

- Período de simulação: 5 s

- Passo temporal: 10 s

- Sistema original

- Ordem cheia:  $n = 1500$

- Tempo de simulação:  $1.01 \cdot 10^3$  s

- Abordagem tensorial com interpolação tangencial e  $\mathbf{V} = [\mathbf{V}, \mathbf{W}]$

- Ordem reduzida:  $n_r = 30$

– Tempo de simulação: 3.09 s

Tabela 5.5: Pontos de expansão e direções tangenciais para a redução do modelo de FitzHugh-Nagumo.

Pontos de expansão	Direções à esquerda $l_i$	Direções à direita $r_i$
0.1	$\begin{bmatrix} 0.3656 \\ 3.2583 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.5539 \\ 1.6351 \end{bmatrix}$
1	$\begin{bmatrix} 8.0920 \\ 5.4645 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.2054 \\ 9.2110 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} 7.4862 \\ 3.9888 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9.2368 \\ 7.9466 \end{bmatrix}$
50	$\begin{bmatrix} 1.2019 \\ 4.1509 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6.5370 \\ 5.7739 \end{bmatrix}$
150	$\begin{bmatrix} 5.2505 \\ 1.8074 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9.3261 \\ 4.4004 \end{bmatrix}$

Pode-se ver que a variação aparente entre o ROM e o FOM é mais baixa, agora. Ademais, pode-se checar que reduções ortogonais são, de fato, mais suscetíveis a serem estáveis que as oblíquas.

## 5.3 Considerações Gerais

Neste capítulo, as implementações e os resultados numéricos das abordagens de redução desenvolvidas em § 4 puderam ser vistos. Um breve resumo das técnicas de redução é apresentado na enumeração que segue.

- Abordagem tensorial
  - Blocos: Esta rotina de redução pode entregar coincidência de momentos da matriz de transferência MIMO completa, mas ela também tem a desvantagem

de adicionar muitas colunas –  $m + 2m^2$  – às matrizes de projeção por ponto de expansão, o que aumenta o tempo de simulação do ROM.

- Interpolação tangencial: Esta abordagem é a melhor no que se trata de estabilidade e qualidade da redução. Pode-se ver que ela consegue entregar boas aproximações, meso com ordens reduzidas relativamente baixas, o que é uma vantagem no que diz respeito a esforços computacionais.
- Abordagem Pseudolinear
    - Blocos: Esta técnica também pode fazer todos os momentos da matriz de transferência coincidirem. Entretanto, como as matrizes de projeção não possuem informação sobre a característica não-linear do modelo, ela é mais suscetível a entregar modelos instáveis.
    - Interpolação tangencial: Infelizmente, essa abordagem somente entregou modelos instáveis e não pode ser comparada às demais. É possível que os resultados sejam mais favoráveis com uma escolha de parâmetros mais feliz, dada uma eventual futura abordagem ótima ou que garanta preservação de estabilidade.

# Capítulo 6

## Considerações Finais

Neste último capítulo, um resumo e uma conclusão deste trabalho serão apresentados, bem como um panorama de temas futuros de pesquisa que possam complementar esta tese.

### 6.1 Resumo

O estudo presente foi baseado nos papers da SIAM [7] e [5], que, por sua vez, referenciam [19]. Eles tratam de três abordagens de redução de modelos quadrático-bilineares no caso SISO, bem como o procedimento de quadrático-bilinearização, que traz sistemas não-lineares gerais ao formato QB.

Então, para se entender completamente o que foi feito nestes trabalhos e como conseguir expandi-los, a teoria de sistemas por trás de modelos não-lineares – especialmente quadrático-bilineares – foi revisitada e investigada. Em [31], uma grande parte da informação referente à abordagens variacional e das exponenciais crescentes, bem como funções de transferência não-lineares pode ser estudada e seus corolários puderam ser aplicados ao caso especial de modelos QB.

O passo seguinte foi achar meios para trazer os momentos das matrizes de transferência a coincidirem. Isso foi apresentado em § 4. Como a abordagem dos multimomentos é a extensão direta da coincidência de momentos de sistemas bilineares, esta alternativa foi primeiramente explorada. Contudo, a abordagem hermitiana foi capaz de entregar

aproximações melhores que a primeira no caso SISO, logo, tentou-se desenvolver uma rotina de redução análoga a esta. Entretanto, a matemática por trás dela provou-se muito mais complicada que o esperado e uma investigação mais profunda seria necessária, o que escaparia do escopo deste projeto. Assim, a abordagem tensorial foi desenvolvida, que veio como uma combinação da hermitiana e dos multimomentos, aplicada a modelos MIMO.

Para se testar se os métodos que foram desenvolvidos até então eram válidos ou se ainda precisavam de ajustes, modelos de benchmark foram necessários. No entanto, não há muitos sistemas MIMO abertos que podem fazer este papel. Então, em paralelo ao já existente modelo de FitzHugh-Nagumo, a escada RC não-linear foi adaptada e recebeu mais uma entrada, de modo que os métodos desenvolvidos pudessem ser aplicados a ela. Estes métodos foram testados e suas validades foram confirmadas, como visto em § 5. Apesar de algumas técnicas de redução se saírem melhor do que outras, pode-se checar que todas entregaram coincidência de momentos e respostas temporais razoavelmente boas. A estrutura quadrático-bilinear do sistema de ordem cheia foi mantida e algumas características inerentes a sistemas não-lineares puderam ser checadas, como a presença de ciclos limite.

## 6.2 Conclusões

No presente trabalho, pode-se concluir que uma grande classe de sistemas não-lineares pode ser trazida à estrutura quadrático-bilinear em uma representação em espaço de estados sem fazer nenhuma aproximação no processo. É necessário, entretanto, adicionar variáveis de estado ao sistema original, o que pode representar um acréscimo ao tempo de simulação. Isso, combinado ao fato de que muitos modelos de aplicação industrial já têm ordens elevadas, motiva a MOR.

Uma análise estruturada de sistemas não-lineares também pode ser aprendida no período deste projeto. A generalização do conceito de transformada de Laplace, núcleos e funções de transferência à teoria não-linear pode ser vista e aplicada a sistemas quadrático-bilineares.

Além disso, pode-se ver como abordagens para coincidência de momentos puderam ser derivadas e quais eram suas dificuldades em sistemas MIMO. Em adição a isso, as peculiaridades de se elaborar ROMs via subespaços de Krylov também foram checadas. A grande quantidade de graus de liberdade, como o valor e número dos pontos de extensão, a esco-

lha das direções tangenciais, etc., pode interferir na qualidade de redução e preservação da estabilidade.

Não menos importante, a experiência pessoal de se ter trabalhado em um ambiente acadêmico com um assunto que ainda não havia sido estudado foi bastante esclarecedor com relação às barreiras atuais da pesquisa acadêmica e ao que pode ser esperado deste campo de pesquisa no futuro.

## 6.3 Panorama

Nesta tese, técnicas de redução de ordem de sistemas quadrático-bilineares MIMO foram desenvolvidas. Além disso, as abordagens principais de modelos tanto MIMO como SISO foram implementadas. Entretanto, há ainda passos importantes que devem ser dados em trabalhos futuros e que podem complementar o progresso documentado neste relatório.

A teoria de sistemas que diz respeito a como modelos quadrático-bilineares funcionam e como sua coincidência de momentos pode ser garantida foram derivadas à luz de interpolação de subsistemas. Entretanto, esta não é a única maneira pela qual sistemas não-lineares podem ser interpretados. Interpolação por série de Volterra [17] é uma outra abordagem conhecida para se analisar tais modelos. Seria interessante, então, investigar sistemas bilineares e quadrático-bilineares seguindo este tipo de análise, de modo que ainda outras técnicas de ROM possam ser desenvolvidas.

Ademais, uma das maiores fontes de erro e incerteza é a escolha eventualmente ruim dos pontos de expansão e direções tangenciais. Isso se deve ao fato de que não havia nenhum algoritmo que entregasse parâmetros de redução (quase-)ótimos até a elaboração desta tese. Entretanto, este assunto foi estudado ao longo dos últimos meses e o trabalho [8] apresenta um algoritmo truncado (*Truncated Quadratic-Bilinear Iterative Rational Krylov Algorithm - TQB-IRKA*) que promete redução ótima de sistemas quadrático-bilineares. Logo, é sugerido que uma comparação com as técnicas de redução desenvolvidas nesta tese e o TQB-IRKA seja feita. Ainda mais, os pontos de expansão e direções tangenciais ótimos que esta técnica entrega poderiam ser inseridos aos parâmetros de redução nos algoritmos estudados em § 4. Isso resolveria o problema da escolha ruim das especificações de redução.

Além disso, uma condição para a preservação da estabilidade de sistemas reduzidos foi feita em [7]. Isso pode ser usado junto às abordagens de redução do presente trabalho para se obter reduções estáveis mais frequentemente.

Complementarmente, também seria interessante desenvolver outros modelos quadrático-bilineares de benchmark. Propõe-se trabalhar com a transferência de calor não-linear [27] e a viga eletrostática [26] como modelos a serem submetidos ao procedimento de quadrático-bilinearização.

# Apêndice A

## Notação

### A.1 Operadores especiais e símbolos

#### Produto de Kronecker

O produto de Kronecker de duas matrizes  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times q}$  é definido como

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = (a_{ij} \cdot \mathbf{B}) = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

#### Norma $\mathcal{H}_2$

A norma  $\mathcal{H}_2$  de um sistema de núcleo  $g(t)$  é definida como

$$\|G\|_2 = \sqrt{\int_0^{\infty} [g(t)]^2 dt} = \|g\|_2. \quad (\text{A.2})$$

### A.2 Lista de abreviações

**BT** truncamento balanceado

**DAE** equações diferenciais algébricas

**FOM** modelo de ordem cheia

**LTI** linear invariante no tempo

**MOR** redução de ordem

**ODE** equações diferenciais ordinárias

**PDE** equações diferenciais parciais

**PMOR** redução de ordem projetiva

**POD** decomposição própria ortogonal

**QB** quadrático-bilinear

**QBDAE** equações diferenciais algébricas quadrático-bilineares

**QBMOR** redução de ordem quadrático-bilinear

**ROM** modelo de ordem reduzida

**TF** função de transferência

# Bibliografia

- [1] Zeyad Al Zhour and Adem Kilicman. Matrix equalities and inequalities involving khatri-rao and tracy-singh sums. *Matrix*, 7(1):34, 2006.
- [2] A. C. Antoulas. *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*. SIAM, Philadelphia, 2005.
- [3] Patricia Astrid, Siep Weiland, Karen Willcox, and Ton Backx. Missing point estimation in models described by proper orthogonal decomposition. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(10):2237–2251, 2008.
- [4] Ulrike Baur, Peter Benner, and Lihong Feng. Model order reduction for linear and nonlinear systems: a system-theoretic perspective. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 21(4):331–358, 2014.
- [5] Peter Benner and Tobias Breiten. Two-sided moment matching methods for nonlinear model reduction. Preprint MPIMD/12-12, Max Planck Institute Magdeburg, June 2012. Available from <http://www.mpi-magdeburg.mpg.de/preprints/>.
- [6] Peter Benner and Tobias Breiten. Krylov-subspace based model reduction of nonlinear circuit models using bilinear and quadratic-linear approximations. In *Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2010*, pages 153–159. Springer, 2012.
- [7] Peter Benner and Tobias Breiten. Two-sided projection methods for nonlinear model order reduction. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 37(2):B239–B260, 2015.
- [8] Peter Benner, Pawan Goyal, and Serkan Gugercin.  $\mathcal{H}_2$ -quasi-optimal model order reduction for quadratic-bilinear control systems. Preprint, Max Planck Institute Magdeburg, October 2016. Available from <https://128.84.21.199/pdf/1610.03279v1.pdf>.

- [9] Johannes Martinus Burgers. *The nonlinear diffusion equation: asymptotic solutions and statistical problems*. Springer Science & Business Media, 1974.
- [10] Nathaniel Chafee and Ettore Ferrari Infante. A bifurcation problem for a nonlinear partial differential equation of parabolic type. *Applicable Analysis*, 4(1):17–37, 1974.
- [11] Saifon Chaturantabut and Danny C Sorensen. Nonlinear model reduction via discrete empirical interpolation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 32(5):2737–2764, 2010.
- [12] Y Chen, J White, et al. A quadratic method for nonlinear model order reduction. 2000.
- [13] Yong Chen. *Model order reduction for nonlinear systems*. PhD thesis, Citeseer, 1999.
- [14] Julian D Cole. On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics. *Quarterly of applied mathematics*, 9(3):225–236, 1951.
- [15] Lihong Feng, Xuan Zeng, Charles Chiang, Dian Zhou, and Qiang Fang. Direct nonlinear order reduction with variational analysis. In *Proceedings of the conference on Design, automation and test in Europe-Volume 2*, pages 1316–1321.
- [16] G. Flagg and S. Gugercin. Multipoint Volterra series interpolation and  $\mathcal{H}_2$  optimal model reduction of bilinear systems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 36(2):549–579, 2015. ISSN 0895-4798. doi: 10.1137/130947830.
- [17] Garret M Flagg. *Interpolation methods for the model reduction of bilinear systems*. PhD thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, 2012.
- [18] Eric James Grimme. *Krylov Projection Methods for Model Reduction*. PhD thesis, Dep. of Electrical Eng., Uni. Illinois at Urbana Champaign, 1997.
- [19] Chenjie Gu. QLMOR: a projection-based nonlinear model order reduction approach using quadratic-linear representation of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 30(9):1307–1320, 2011.
- [20] Eskil Hansen, Felix Kramer, and Alexander Ostermann. A second-order positivity preserving scheme for semilinear parabolic problems. *Applied Numerical Mathematics*, 62(10):1428–1435, 2012.

- [21] Michael Hinze and Stefan Volkwein. Analysis of instantaneous control for the burgers' equation. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 50(1):1–26, 2002.
- [22] Eberhard Hopf. The partial differential equation  $u_t + u \cdot u_x = \mu_{xx}$ . *Communications on Pure and Applied mathematics*, 3(3):201–230, 1950.
- [23] Tamara G Kolda and Brett W Bader. Tensor decompositions and applications. *SIAM review*, 51(3):455–500, 2009.
- [24] Daniel Kressner. Presentation: Low-rank tensor techniques for high-dimensional problems. CADMOS Chair for Numerical Algorithms and HPC MATHICSE, EPFL.
- [25] Karl Kunisch and Stefan Volkwein. Control of the Burgers' equation by a reduced-order approach using proper orthogonal decomposition. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 102(2):345–371, 1999.
- [26] Jan Lienemann and Jan G Korvink. Electrostatic beam model. 2003.
- [27] Jan Lienemann, Amirhossein Yousefi, and Jan G Korvink. Nonlinear heat transfer modeling. In *Dimension Reduction of Large-Scale Systems*, pages 327–331. Springer, 2005.
- [28] Volker Mehrmann and Tatjana Stykel. Balanced truncation model reduction for large-scale systems in descriptor form. In *Dimension Reduction of Large-Scale Systems*, pages 83–115. Springer, 2005.
- [29] Jinichi Nagumo, Suguru Arimoto, and Shuji Yoshizawa. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proceedings of the IRE*, 50(10):2061–2070, 1962.
- [30] Joel R Phillips. Projection-based approaches for model reduction of weakly nonlinear, time-varying systems. *IEEE Transactions on computer-aided design of integrated circuits and systems*, 22(2):171–187, 2003.
- [31] Wilson John Rugh. *Nonlinear system theory*. Johns Hopkins University Press, 1981.
- [32] Maria Cruz Varona. Interpolation-based model order reduction of nonlinear systems. Presented in the CSC Seminar in the MPI Magdeburg, 2016.

- [33] Thomas Wolf, Alessandro Castagnotto, and Maria Cruz Varona. Lecture script: Modern control 3, part b: Introduction to model reduction. Chair of Automatic Control of the Technical University Munich, 2016.
- [34] Yang Zhang, Haotian Liu, Qing Wang, Neric Fong, and Ngai Wong. Fast nonlinear model order reduction via associated transforms of high-order volterra transfer functions. In *Proceedings of the 49th Annual Design Automation Conference*, pages 289–294. ACM, 2012.