

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO – USP
ESCOLA DE ENGENHARIA DE LORENA – EEL

**Controle no espaço de estados de um modelo
simplificado de foguete**

Emanuel Brito dos Santos

Lorena – SP

2021

Emanuel Brito dos Santos

**Controle no espaço de estados de um modelo
simplificado de foguete**

Trabalho de Conclusão de Curso de Engenharia Física apresentado à Escola de Engenharia de Lorena – Universidade de São Paulo.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO – USP
ESCOLA DE ENGENHARIA DE LORENA – EEL

Orientador: Prof. Dr. Fabiano Fernandes Bargas

Lorena, São Paulo

2021

Emanuel Brito dos Santos

Controle no espaço de estados de um modelo simplificado de foguete/ Emanuel Brito dos Santos. – Lorena, São Paulo, 2021-
63p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Fabiano Fernandes Bargas

Trabalho de Conclusão de Curso – UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO – USP
ESCOLA DE ENGENHARIA DE LORENA – EEL
, 2021.

1. Controle de sistemas. 2. Controle ótimo. 3. Alocação de polos. 4. Aerodinâmica.
I. Fabiano Bargas. II. Universidade de São Paulo. III. Escola de Engenharia de Lorena.
IV. Controle no espaço de estados de um modelo simplificado de foguete

Emanuel Brito dos Santos

Controle no espaço de estados de um modelo simplificado de foguete

Trabalho de Conclusão de Curso de Engenharia Física apresentado à Escola de Engenharia de Lorena – Universidade de São Paulo.

Prof. Dr. Fabiano Fernandes Bargas
Orientador

Professor
Prof. Dr. Jaime Hideo Izuka

Professor
Prof. Ms. Michel Veiga

Lorena, São Paulo
2021

Agradecimentos

Quando comecei a faculdade, eu não tinha a menor ideia na jornada que iria percorrer. Foram momentos de riso, choro, estudo na biblioteca e apesar de alguns arrependimentos, tudo isso serviu para nos ensinar a sermos mais fortes, resilientes e com uma visão mais madura de como o mundo funciona. Nesse caminho, não há como negar que algumas pessoas foram fundamentais nessa trajetória e esse é um espaço perfeito para mostrar a minha gratidão.

Agradeço a minha família pelo apoio que, muito antes de ser financeiro, me encorajou a trilhar o caminho da Engenharia Física, mesmo em uma cidade a 275 quilômetros da minha cidade natal. Agradeço a minha mãe que sempre me mandava parar tomar café porque não iria me fazer bem, pela me irmã que me fazia videochamada para ter uma companhia para lavar a louça e pelo meu pai que se alegrava muito quando contava as coisas que aprendia nas matérias.

Agradeço aos amigos da Engenharia Física que tornaram as matérias muito mais fáceis de se lidar e pelas inúmeras risadas na hora do almoço.

Agradeço também aos meus irmãos da ABU que tive a alegria de conhecer, e em meio a todo esse tempo me suportaram nas provas e me proporcionaram momentos de imensa alegria. Vocês me ensinaram como viver a vida e o que é a verdadeira amizade.

Agradeço a PIB Lorena que me acolheu com muito amor, me ajudou continuar crescendo rumo a estatura de Cristo e me mostrou o que é a comunhão da igreja.

Agradeço aos professores que além de ministrar com maestria as matérias, me inspiraram a trilhar o caminho que trilhei e a formar o profissional que sou. Uma gratidão especial ao Prof. Maurício Guimarães que sem ele, esse trabalho não teria sido possível.

Definitivamente não é fácil se formar em meio a uma pandemia, ter estagiado totalmente home-office e não ter a oportunidade de dar um último adeus para pessoas amadas, mas essa experiência nos mostrou o quão importante é cuidar de quem está próximo de nós e confiar na boa ciência que construímos até aqui.

Para finalizar, muitos jovens se sentem perdidos e com falta de propósito ao sair da faculdade pois finalmente precisam ser "adultos" e tomar responsabilidades que nunca antes tiveram. Eu me incluo nessa estatística mas me sinto temeroso do futuro, recordo-me de uma música que com sua estética anos 80, a pegada nostálgica dos sintetizadores e um poslúdio incrível, me lembra que: *O futuro tende a pertencer, a quem prefere crer pra ver.*

"[...] Não há um único centímetro quadrado, em todos os domínios de nossa existência, sobre os quais Cristo, que é soberano sobre tudo, não clame: 'É meu!'"

Abraham Kuyper

Resumo

Defronte as recentes inovações na área da engenharia aeroespacial, o controle de foguetes tem se tornado uma temática frequente em meio ao cenário mundial de pesquisa e desenvolvimento. Nessa circunstância, o presente trabalho propôs-se a estudar os assuntos pertinentes ao controle de sistemas, dinâmica dos corpos rígidos e aerodinâmica que ao concatenar essas três áreas do conhecimento, aplicou esses conceitos em um modelo de um foguete com dois graus de liberdade e *Thrust Vector Control* como atuador. Implementando um controle por alocação de polos e um controle ótimo e utilizando métodos semiempíricos para determinar as propriedades aerodinâmicas, simulou-se com o MATLAB a resposta a perturbação e ao impulso e foram comparadas as características de desempenho entre os controladores. Também foi realizado um mapa de polos que atendem a características de desempenho dadas junto com uma restrição de movimento lateral. Como resultado, observa-se que o controle ótimo tem desempenho superior nas características de desempenho em comparação ao controle por alocação de polos, dado que o mesmo tem a liberdade de escolher todos os autovalores do sistema realimentado. Por parte dos mapas de polos, constatou-se que a região de polos admissíveis se move a medida que a velocidade de incidência de ar no foguete aumenta, mostrando que é necessário o desenvolvimento de controladores que mudam suas características a medida que a velocidade varia. É sugerido, por fim que essa abordagem seja melhorada refinando conceitos aplicados na dinâmica do sistema junto com simulações não lineares e técnicas de controle mais sofisticadas.

Palavras-chave: Controle de sistemas, Controle ótimo, Alocação de polos, Aerodinâmica, Dinâmica de voo

Lista de ilustrações

Figura 1 – Principais sistemas de coordenadas.	15
Figura 2 – Simulação da distribuição de pressão ao redor de um foguete.	17
Figura 3 – Ângulo de ataque e forças no corpo.	18
Figura 4 – Padrão de uma onda de choque em $M = 3,5$	20
Figura 5 – C_D de uma esfera e um cone-cilindro em função de M	21
Figura 6 – Malha de elementos finitos de um foguete	23
Figura 7 – Resposta ao degrau de um sistema com os parâmetros t_p, t_r, t_d, t_s e M_p	25
Figura 8 – Diagramas de bode e as diferenças entre as respostas ao impulso.	27
Figura 9 – Processo com realimentação e entrada de referência	30
Figura 10 – Diagrama de blocos de um servossistema realimentado.	31
Figura 11 – Esquema do sistema estudado.	35
Figura 12 – Esquema do RASAero II	40
Figura 13 – Geometria desenvolvida	41
Figura 14 – Resposta a perturbação de 5° em Mach 0,7 através do controle ótimo	45
Figura 15 – Resposta ao degrau em Mach 0,7 através o controle ótimo	45
Figura 16 – Diagrama de Bode em Mach 0,7 através do controle ótimo	46
Figura 17 – Resposta a perturbação de 5° em Mach 0,7 através da alocação de polos	46
Figura 18 – Resposta ao degrau em Mach 0,7 através da alocação de polos	47
Figura 19 – Diagrama de Bode em Mach 0,7 através da alocação de polos	48
Figura 20 – Resposta a perturbação de 5° em Mach 2 através do controle ótimo	48
Figura 21 – Resposta ao degrau em Mach 2 através do controle ótimo	49
Figura 22 – Diagrama de Bode em Mach 2 através do controle ótimo	50
Figura 23 – Resposta a perturbação de 5° em Mach 2 através da alocação de polos	50
Figura 24 – Resposta ao degrau em Mach 2 através da alocação de polos	51
Figura 25 – Diagrama de Bode em Mach 2 através da alocação de polos	51
Figura 26 – Resposta a perturbação de 5° em Mach 5 através do controle ótimo	52
Figura 27 – Resposta ao degrau em Mach 5 através do controle ótimo	53
Figura 28 – Diagrama de Bode em Mach 5 através do controle ótimo	53
Figura 29 – Resposta a perturbação de 5° em Mach 5 através da alocação de polos	54
Figura 30 – Resposta ao degrau em Mach 5 através da alocação de polos	55
Figura 31 – Diagrama de Bode em Mach 5 através da alocação de polos	55
Figura 32 – Mapa de polos admissíveis em Mach 0,7	57
Figura 33 – Mapa de polos admissíveis em Mach 2	58
Figura 34 – Mapa de polos admissíveis em Mach 5	58

Lista de tabelas

Tabela 1 – Características de desempenho e descrição	25
Tabela 2 – Requisitos do sistema	39
Tabela 3 – Propriedades aerodinâmicas da geometria estudada providas pelo RA-SAero II	42
Tabela 4 – $C_{L\alpha}$ calculado	42
Tabela 5 – Outras variáveis relevantes no modelo	42
Tabela 6 – Autovalores das matrizes de estado	43
Tabela 7 – Comparação entre métodos de controle	56

Lista de abreviaturas e siglas

α	Ângulo de ataque
γ	Ângulo de empuxo
<i>TVC</i>	<i>Thrust Vector Control</i>
<i>A</i>	Força aerodinâmica axial
<i>N</i>	Força aerodinâmica normal
<i>D</i>	Força de arrasto
<i>L</i>	Força de sustentação
M_{aero}	Momento aerodinâmico
C_N	Coefficiente aerodinâmico de força normal
C_M	Coefficiente aerodinâmico de momento
C_D	Coefficiente aerodinâmico de arrasto
C_L	Coefficiente aerodinâmico de sustentação
$C_{L\alpha}$	Derivada do coeficiente aerodinâmico de sustentação em relação ao ângulo de ataque
$C_{D\alpha}$	Derivada do coeficiente aerodinâmico de arrasto em relação ao ângulo de ataque
$C_{M\alpha}$	Derivada do coeficiente aerodinâmico de momento em relação ao ângulo de ataque
<i>I</i>	Inércia do foguete
x_{cg}	Centro de gravidade do foguete
x_{cp}	Centro de pressão do foguete
<i>X</i>	Força aerodinâmica lateral
<i>Z</i>	Força aerodinâmica vertical
<i>g</i>	Gravidade
F_t	Força de empuxo

m	Massa do foguete
M	Massa da tubeira
l	Metade do comprimento do foguete
ρ	Densidade do ar
V_∞	Velocidade do corpo no infinito
V_w	Velocidade vertical
S_{ref}	Área transversal de referência
Re	Número de Reynolds
l_{ref}	Comprimento de referência
M_∞	Número de Mach no infinito
\mathbf{x}	Vetor de estado
\mathbf{u}	Vetor de entradas
\mathbf{y}	Vetor de saída
\mathbf{A}	Matriz de estado
\mathbf{B}	Matriz de entrada
\mathbf{C}	Matriz de saída
\mathbf{D}	Matriz de transmissão direta
CO	Controle ótimo
AP	Alocação de polos

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
2	DINÂMICA DO CORPO LIVRE	14
2.1	Sistemas de coordenadas e transformações de eixo	14
2.2	Equações de movimento	15
3	AERODINÂMICA	17
3.1	Conceitos fundamentais	17
3.1.1	Forças e momentos aerodinâmicos	17
3.1.2	Efeitos da compressibilidade dos gases e tipos de regime	19
3.2	Métodos de cálculo de propriedades aerodinâmicas	20
3.2.1	CFD	20
3.2.1.1	Equações de Navier-Stokes	21
3.2.1.2	Tipos de discretização	22
3.2.2	Formulação Semi-empírica e túnel de vento	24
4	CONTROLE DE SISTEMAS	25
4.1	Formalismos do controle	26
4.1.1	Funções de transferência	26
4.1.2	Espaço de Estados	26
4.1.2.1	Relação entre o espaço de estados e as funções de transferência	28
4.1.2.2	Observabilidade e Controlabilidade	28
4.2	Linearização de sistemas	29
4.3	Sistemas de malha fechada	30
4.3.1	Servossistemas de plantas com ação integral	31
4.3.2	Alocação de polos	32
4.3.3	Sistemas reguladores ótimos	33
5	METODOLOGIA	35
5.1	Hipóteses simplificadoras	35
5.2	Dinâmica do modelo	35
5.2.1	Linearização do modelo	38
5.3	Controladores e características de desempenho	38
5.4	Propriedades aerodinâmicas	39
6	RESULTADOS	41
6.1	Características mecânicas e aerodinâmicas	41

6.2	Análise de desempenho do controlador ótimo e por alocação de polos	43
6.2.1	Comparação entre controladores em Mach 0,7	44
6.2.1.1	Controle ótimo	44
6.2.1.2	Alocação de polos	44
6.2.2	Comparação entre controladores em Mach 2,0	47
6.2.2.1	Controle ótimo	47
6.2.2.2	Alocação de Polos	49
6.2.3	Comparação entre controladores em Mach 5,0	52
6.2.3.1	Controle ótimo	52
6.2.3.2	Alocação de polos	54
6.2.4	Resumo do desempenho entre métodos de controle	54
6.3	Mapa de polos admissíveis	56
7	CONCLUSÃO	59
8	SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS	60
	REFERÊNCIAS	61

1 Introdução

O controle de sistemas tem como objetivo entender os comportamentos dos mais diversos processos dinâmicos da natureza, afim de melhorar suas características de desempenho e/ou estabilizá-los em uma entrada de referência através de um ou mais atuadores no sistema. A entidade responsável por esses feitos é o controlador, que combina as informações de saída e entrada do sistema e gera um sinal para os atuadores. O desafio do controle é unir a dinâmica e os requisitos de projeto para conceber um controlador que tenha um desempenho aceitável para a situação estudada (BENNETT, 1996).

Com o advento da computação, a análise de sistemas complexos caracterizados pelas não-linearidades com múltiplas entradas e saídas se mostrou possível e a implementação dos diversos tipos de controladores se tornou mais simples. Igualmente o processamento de muitas variáveis de controle e a construção de rotinas para situações específicas possibilitou a expansão dessas abordagens para sistemas que anteriormente eram difíceis de controlar ou com grande risco associado ao controle (HOAG, 1969).

Apesar do controle ser utilizado desde a origem da engenharia aeroespacial em pilotos automáticos e controles de atitude, um feito recente do controle de sistemas foi a viabilidade da recuperação automática dos estágios como forma de baratear o custo das missões espaciais. A pioneira na realização desse feito em uma missão espacial foi a SpaceX que ao recuperar o primeiro estágio do Falcon 9, economiza cerca de 30% do custo de cada lançamento caso não houvesse a recuperabilidade (SELDING, 2016).

A abordagem usada para recuperação do Falcon 9 consiste no seguimento de uma rota traçada da posição inicial do veículo até o local da recuperação e leva em conta as características aerodinâmicas e mecânicas do foguete para a descrição da dinâmica. O atuador responsável por esse guiamento é o chamado *Thrust Vector Control* (TVC) que consegue orientar o vetor de empuxo em um ângulo entre $\pm 20^\circ$ (SUTTON, 2001).

Nesse trabalho foram estudadas as principais teorias de movimento dos corpos bem como os principais tópicos da aerodinâmica. Além disso, foram abordadas as ferramentas do controle linear para análise de sistemas e as técnicas de desenvolvimento de controladores que cumpram os requisitos de desempenho dados.

O objetivo desse trabalho é desenvolver o controle de ascensão no espaço de estados de um foguete de grau de liberdade reduzido, com a dinâmica de um pêndulo invertido exposto a forças aerodinâmicas e um TVC como atuador. Espera-se que o sistema realimentado seja estável e será comparado o desempenho entre o controlador ótimo e por alocação de polos. Em seguida deverá ser construído um mapa no plano complexo que contempla todos os polos que atendem a uma restrição máxima de movimento dada.

2 Dinâmica do corpo livre

2.1 Sistemas de coordenadas e transformações de eixo

Antes de definir as expressões que governam o movimento dos corpos no espaço, é fundamental entender os principais sistemas de coordenadas utilizados e quais os processos de transformação entre eles.

O primeiro sistema comumente adotado é o referencial inercial em um ponto fixo no espaço, no qual pode-se construir um sistema de coordenadas com vetores ortogonais como visto na Figura 1 denotado pelo subscrito i . Esse sistema é relevante uma vez que é nele que as leis de Newton são válidas (SIOURIS, 2004).

Outro sistema de coordenadas é o sistema de coordenadas no corpo, em que a origem do sistema está no centro de gravidade no corpo e as componentes dos eixos podem ser escolhidas da forma que simplifique o problema. Na Figura 1 pode-se ver esse sistema denotado pelo subscrito b . A vantagem de utilizar esse sistema é quando os fenômenos físicos são descritos nesse sistema ou os observadores estão nesse sistema.

Por fim o último sistema é o sistema terrestre, denotado pelo subscrito e , tem a característica que ponto de origem é posto em um lugar da superfície terrestre que gira com uma velocidade angular ω_e como visto na Figura 1. Esse sistema tem como vantagens o uso em aplicações transcontinentais ou espaciais onde a rotação da terra passa a ser algo relevante visto que o controle da missão está em um lugar fixo no globo.

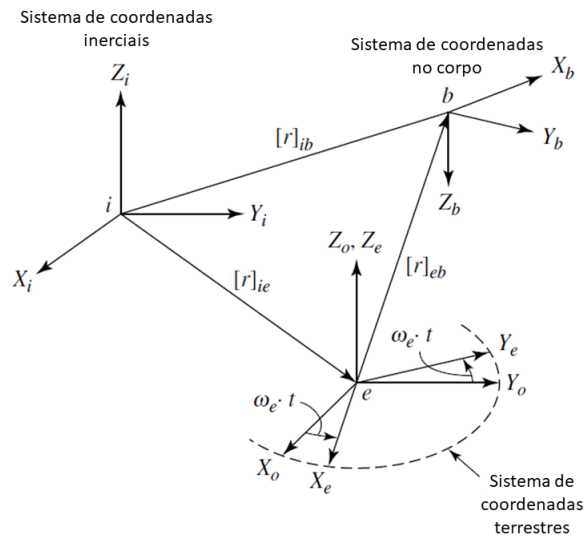
É frequente a necessidade de transformar variáveis como velocidades e forças de um sistema de coordenadas para outro, como do sistema inercial fixo para o sistema no corpo ou vice-versa.

Para realizar essas transformações, é comum o uso dos ângulos de Euler pois eles correspondem a uma sucessão de rotações em volta dos eixos coordenados que levam de um sistema para outro. A equação 2.1 mostra que para levar o vetor \mathbf{s}_2 a um vetor \mathbf{s}_1 no novo sistema de coordenadas, basta realizar rotação em volta do eixo x com um ângulo ϕ , similarmente uma rotação em volta do eixo y com um ângulo θ e finalmente uma rotação em volta do eixo z com um ângulo ψ .

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{s}_2 \quad (2.1)$$

De mesmo modo é necessário saber levar as velocidades angulares dos corpos

Figura 1 – Principais sistemas de coordenadas.



Fonte: adaptado de Siouris (2004).

estudados para as velocidades angulares nas coordenadas do observador ou vice-versa. A transformação que realiza essa conversão é mostrada na equação 2.2, onde as variáveis p , q e r são as velocidades angulares nas coordenadas do corpo e $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ e $\dot{\psi}$ correspondem as velocidades angulares no referencial inercial.

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

2.2 Equações de movimento

O movimento dos corpos pode ser descrito através da mecânica clássica por intermédio do formalismo newtoniano, lagrangiano e hamiltoniano porém esse trabalho irá se concentrar em enunciar as três leis da mecânica newtoniana em referenciais inerciais.

A primeira lei, também conhecida como o princípio da inercia, diz que todo corpo continua em seu estado de repouso ou de movimento uniforme em uma linha reta, a menos que seja forçado a mudar aquele estado por forças aplicadas sobre ele.

A segunda lei é mostrada na equação 2.3 indica que variação do momento é igual força imprimida e é produzida na direção de linha reta na qual aquela força é aplicada. A terceira lei explicita que para toda ação há sempre uma reação igual e contrária (MARION,

2013).

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \quad (2.3)$$

As leis de Newton precisam de correções ao considerá-las em relação a referenciais não-inerciais como o referencial no corpo. Aplicando nos corpos rígidos, a equação 2.4 mostra a correção necessária, onde $\boldsymbol{\Omega}$ é o vetor de velocidades angulares p , q e r . Um dos resultados dessa correção é que os movimentos rotacionais tem interação com os movimentos translacionais e inserem não linearidades nas equações de movimento.

$$\mathbf{F} = m \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} \right) \quad (2.4)$$

Para descrever as rotações dos corpos, pode-se utilizar a expressão do momento angular para corpos rígidos, como mostrada na equação 2.5 resolvida no referencial do corpo. O momento angular provocado por uma força externa é mostrado na equação 2.6 onde \mathbf{r} é o vetor que liga o centro de massa a região de aplicação da força.

$$\mathbf{M} = \frac{d}{dt}(\mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}) + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}) \quad (2.5)$$

$$\mathbf{M}_{ext} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{ext} \quad (2.6)$$

O termo \mathbf{I} é denominado tensor de inércia e pode ser calculado através da equação 2.7. O tensor de inércia insere no equacionamento informações intrínsecas do corpo como densidade e forma (MARION, 2013).

$$I_{ij} = \int_V (\delta_{ij} \sum_k x_k^2 - x_i x_j) dm \quad (2.7)$$

Ao reunir todas essas equações, têm-se a descrição completa do movimento de um corpo rígido no espaço através de um sistema de seis equações diferenciais não lineares.

3 Aerodinâmica

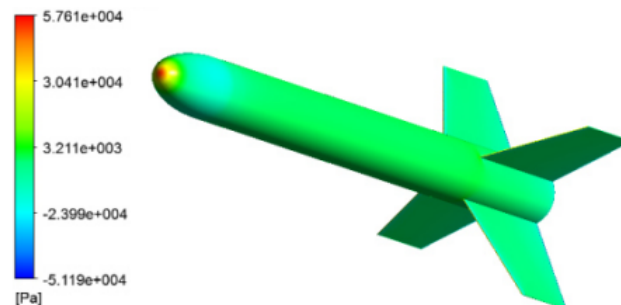
Após o equacionamento de um corpo rígido no espaço exposto a forças e momentos externos, faz-se necessário o estudo da origem dessas forças e momentos no corpo. Ao aplicar no escopo desse trabalho, essa seção se dedicará no estudo de como as forças e momentos aerodinâmicos se comportam em relação as diversas quantidades físicas.

3.1 Conceitos fundamentais

3.1.1 Forças e momentos aerodinâmicos

Dado um corpo arbitrário que se move no ar com uma velocidade no infinito V_∞ , os únicos mecanismos responsáveis pelas forças e momentos aerodinâmicos são os campos de tensões que se formam ao redor do corpo como mostrado no esquema da Figura 2 (ANDERSON, 2011).

Figura 2 – Simulação da distribuição de pressão ao redor de um foguete.



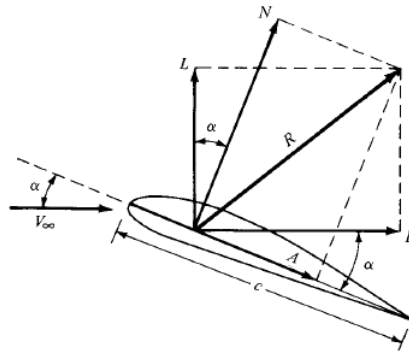
Fonte: adaptado de Fedaravičius et al. (2016).

A integral de superfície desses campos tem como resultado a força resultante \mathbf{R} , que pode ser decomposta em duas componentes principais em relação ao corpo: a força normal N e a força axial A , ou em relação a V_∞ : a sustentação L e o arrasto D , como mostrado no esquema da Figura 3.

Ao observar a Figura 3, pode-se observar o surgimento de uma nova quantidade, o ângulo de ataque α que é definido como o arco entre V_∞ e linha axial do veículo c . Esse ângulo interfere diretamente nas forças e momentos aerodinâmicos como será visto posteriormente.

Outro resultado que é obtido com a inclusão do ângulo de ataque, é que geometricamente se torna possível o cálculo da equação 3.1 que relaciona N e A com D e L através

Figura 3 – Ângulo de ataque e forças no corpo.



Fonte: adaptado de [Anderson \(2011\)](#).

de α .

$$\begin{bmatrix} N \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ D \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Para determinar as relações entre as quantidades físicas e as forças e momentos aerodinâmicos, pode-se utilizar a intuição e escolher algumas quantidades que empiricamente são relevantes para calculá-las. A equação 3.2 mostra que dado um corpo com um certo ângulo de ataque, a força R depende da densidade do ar ρ_∞ no infinito, da velocidade do corpo no infinito, do tamanho c do corpo, da viscosidade do ar μ_∞ no infinito e da velocidade do som a_∞ que está correlacionada com a compressibilidade do ar.

$$R = f(\rho_\infty, V_\infty, c, \mu_\infty, a_\infty) \quad (3.2)$$

Não se sabe qual o formato dessa função mas é possível recorrer ao teorema π de Buckingham, que estabelece que se uma equação física com n variáveis dimensionais, sendo que essas variáveis são compostas por r dimensões físicas fundamentais, a equação do processo físico pode ser representada por $n - r$ variáveis adimensionais construídas a partir das variáveis originais ([BUCKINGHAM, 1914](#)).

[Anderson \(2011\)](#) mostra todo o desenvolvimento do teorema π aplicado na força R e como resultado, têm-se que ela pode ser expressa através de um coeficiente adimensional C_R e a equação 3.3 mostra a relação entre R e C_R onde S_{ref} é a área de transversal do corpo em relação ao fluxo de ar. Outro resultado significativo é a equação 3.4 que mostra que C_R só depende de duas quantidades adimensionais onde a primeira é denominada

número de Reynolds Re e a segunda é o número de Mach no infinito M_∞ .

$$C_R = \frac{2R}{\rho_\infty S_{ref} V_\infty^2} \quad (3.3)$$

$$C_R = f\left(\frac{\rho_\infty c V_\infty}{\mu_\infty}, \frac{V_\infty}{a_\infty}\right) \quad (3.4)$$

Se generalizarmos esse resultado para um corpo genérico e um ângulo de ataque qualquer, a força R pode ser calculada através de Re , M_∞ , geometria do veículo e α . Esses resultados podem ser generalizados mais ainda em 3.5 para as forças N , A , L , D e em 3.6 para o momento M onde l_{ref} é o comprimento de referência do corpo.

$$H = \frac{C_H \rho_\infty S_{ref} V_\infty^2}{2}, \text{ para } H = N, A, D \text{ e } L \quad (3.5)$$

$$M_{aero} = \frac{C_M \rho_\infty S_{ref} V_\infty^2 l_{ref}}{2} \quad (3.6)$$

3.1.2 Efeitos da compressibilidade dos gases e tipos de regime

Como as forças e momentos aerodinâmicos se manifestam na presença de fluxos de ar, é fundamental entender os tipos de fluxos e suas características afim de formular hipóteses simplificadoras para as equações e desenvolver teorias aerodinâmicas mais robustas.

Das diversas formas de dividir os fluxos aerodinâmicos, é comum separá-los com base com o número de Mach que consiste na divisão da velocidade pela velocidade do som. O uso do número de Mach é relevante pois essencialmente os efeitos de compressibilidade do ar se manifestam a medida que aumenta a velocidade. A compressibilidade é a capacidade do ar de se comprimir, ou seja, a densidade ρ nas proximidades do corpo deixa de ser constante.

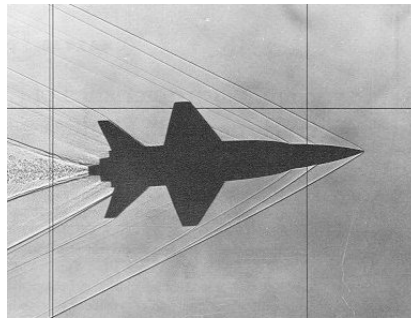
Com $M_\infty \ll 1$ em todo o corpo, o fluxo é denominado subsônico e nesse regime os efeitos de compressibilidade são pequenos, ou seja, é possível dizer que a densidade ρ é constante em toda superfície e vizinhança do corpo. A medida que a velocidade aumenta, chega-se no regime transônico que é dado quando o campo de velocidades ao redor do corpo tem velocidades maiores e menores que a velocidade do som mas todos muito próximos da velocidade do som. Esse fluxo se dá em um intervalo $0,8 < M_\infty < 1,2$ (ANDERSON, 2011).

O fluxo supersônico é caracterizado quando todos os vetores do campo de velocidades tem em módulo $M_\infty > 1$. Um fato que ocorre na transição para esse regime é a criação de uma onda de choque como pode-se ver na Figura 4. Também há uma forte descontinuidade das propriedades termodinâmicas dos gases em volta do corpo e conseqüentemente, isso

reflete nos coeficientes aerodinâmicos do veículo, como é mostrado na Figura 5 onde há um pico no C_D justo em $M_\infty = 1$. O estudo da termodinâmica também é importante porém além dos efeitos de compressibilidade serem relevantes, variáveis como entalpia, temperatura e entropia também devem ser levados em conta dada a energia do fluxo.

Em $M_\infty > 5$ designa-se o fluxo como hipersônico e nele a onda de choque começa a ficar tão próxima da superfície que a temperatura se intensifica de tal forma que começam a haver reações químicas no ar. A importância do estudo dos regimes hipersônicos se dá porque as velocidades de reentrada na atmosfera se dão nesse regime. Nesse regime têm-se também a manifestação do princípio da independência do número de Mach em que os coeficientes aerodinâmicos passam a ser independentes da velocidade, como se observa na Figura 5 (ANDERSON, 2006).

Figura 4 – Padrão de uma onda de choque em $M = 3,5$



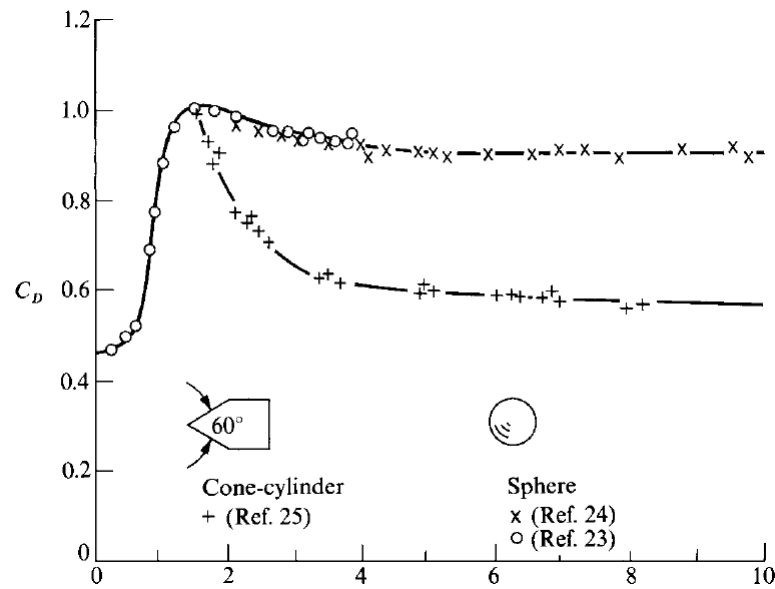
Fonte: adaptado de BIKLE (1964).

3.2 Métodos de cálculo de propriedades aerodinâmicas

A seção 3.1 mostrou que basta saber os campos de tensões ao longo do corpo ou os coeficientes aerodinâmicos que é praticável o cálculo das forças e momentos no corpo, porém não foi mostrado como calcular esses campos e coeficientes. Atualmente esse valores podem ser computados através de três métodos: o CFD (*Computational Fluids Dynamics*), os métodos semi-empíricos e o túnel de vento.

3.2.1 CFD

O CFD procura solucionar as equações de Navier-Stokes ou as suas diferentes variações de forma numérica através da discretização dos domínios espaço-temporais.

Figura 5 – C_D de uma esfera e um cone-cilindro em função de M 

Fonte: adaptado de Anderson (2006).

3.2.1.1 Equações de Navier-Stokes

Os aspectos físicos que governam quaisquer fluxos de fluidos é a conservação de massa, conservação de energia e conservação do momento. Aplicando esses conceitos em um volume e em uma superfície de controle, conseguimos obter a equação 3.7 em que o primeiro termo expressa a conservação da massa, o segundo reflete a conservação do momento e o terceiro é a equação de conservação da energia.

A equação 3.7 também é denominada por equações de Navier-Stokes onde \mathbf{V} é o vetor de velocidades de fluxo, ρ é a densidade local, p é o campo de pressões, \mathbf{T} é a distribuição de temperaturas, \dot{q} é a taxa de transferência de calor, k é a condutividade térmica do meio, \mathbf{F} são as forças externas e τ é a matriz de tensão cisalhante. Essa equação descreve o movimento de fluidos tridimensionais, compressíveis e viscosos dependentes no tempo perto do equilíbrio termodinâmico (ANDERSON, 1995).

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot (\mathbf{V}) &= 0 \\ \rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} &= -\nabla p + \nabla \cdot \tau + \rho \mathbf{F} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) = \rho \dot{q} + \nabla \cdot (k \nabla T) - \nabla \cdot (p \mathbf{V}) + \nabla \cdot (\tau \mathbf{V}) + \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}$$

Um fato a ser considerado é que essa equação carece de algumas modificações em fluxos hipersônicos visto que as altas temperaturas, reações químicas e efeitos de

não equilíbrio requerem um estudo mais complexo da termodinâmica (GREENSHIELDS; REESE, 2012).

Outra característica dessas equações é a difícil solução analítica dada a não linearidade e acoplamento, logo é indispensável nos debruçar nos métodos numéricos para encontrar essas soluções. Junto com a simulações, é fundamental comparar os resultados numéricos com os experimentos para validar os resultados oriundos dos métodos computacionais.

3.2.1.2 Tipos de discretização

No CFD, é necessário particionar finitamente o espaço, tempo ou qualquer outra quantidade para realizar os cálculos. O conjunto de todos os particionamentos é denominado malha.

Um dos métodos de discretização e solução numérica de equações diferenciais é o método das diferenças finitas. Esse método consiste em que um dado ponto $u_{i+1,j}$, que é uma das quantidades a serem calculadas no CFD, pode-se realizar uma expansão de Taylor em volta $u_{i,j}$, como na equação 3.8. O termo Δx é a distância entre os pontos da malha e quanto menor essa distância, mais pontos essa malha terá para um certo domínio, mais precisa é a solução da equação porém maior é o custo computacional (ANDERSON, 1995).

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \Delta x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} + \dots \quad (3.8)$$

Para definir a expressão da derivada, precisa-se truncar a série somente com os termos de primeira ordem e isolar $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}$ para obter a derivada do ponto (i,j) da malha como mostrado na equação 3.9. Verifica-se que a medida que $\Delta x \rightarrow 0$, o erro de truncamento vai a zero e o quociente se torna a expressão analítica da derivada.

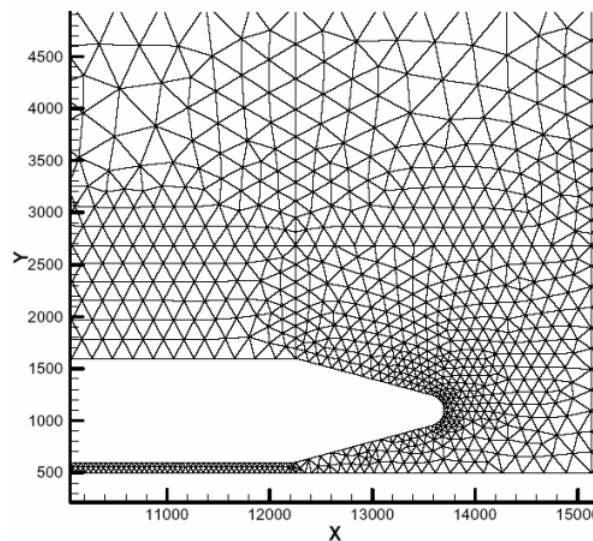
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.9)$$

Ao construir as expressões das derivadas de n-ésima ordem, pode-se inseri-las em qualquer equação diferencial parcial e dessa forma, têm-se um sistema de equações com o número de variáveis igual o número de pontos da malha. Para solução desse sistema, basta utilizar aos diferentes métodos de solução de sistemas como o método iterativo de Newton-Raphson se o sistema for não-linear, ou Gauss-Seidel caso o sistema for linear (ANDERSON, 1995).

Outro método de solução de equações que atualmente é o mais utilizado pelos softwares comerciais, é o método dos elementos finitos. Ele visa construir uma malha com

vários elementos como mostrados na Figura 6. Os pontos da malha são os nós e entre os pontos têm-se os elementos que comumente são quadrados ou triangulares. Uma das diferenças entre as malhas dos método das diferenças finitas e o método dos elementos finitos é que no primeiro, têm-se a solução da equação somente no ponto e no segundo há uma solução em todo o domínio do problema.

Figura 6 – Malha de elementos finitos de um foguete



Fonte: adaptado de Scalabrin et al. (2004).

A matemática por trás desse método consiste em aproximar a função a ser calculada no elemento como uma combinação linear finita de funções ϕ previamente definidas.

$$u = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i \quad (3.10)$$

A forma de determinar os coeficientes a_i pode ser feita através do método de Galerkin, método da colocação, método de Ritz e método dos mínimos quadrados em que todos buscam minimizar os resíduos ou funcionais dentro do elemento. Feitas as minimizações, assim como no método das diferenças finitas, há um sistema de equações com os todos os coeficientes da combinação linear de cada elemento. Note-se que ao contrário do método das diferenças finitas que busca a solução exata da equação, esse método procura um ajuste ótimo das funções ϕ_i dentro do elemento, fato que não diminui a precisão e a convergência dos valores (MORGAN, 1981).

Entre esses dois métodos, o método dos elementos finitos é amplamente mais utilizado uma vez que apesar de ter maior complexidade, tem uma precisão local melhor

e malha consegue se adaptar melhor a domínios complexos em comparação a malha retangular do método das diferenças finitas.

3.2.2 Formulação Semi-empírica e túnel de vento

Essa técnica de cálculo de coeficientes aerodinâmicos se dá pela junção de teorias aerodinâmicas simplificadas com análises experimentais em corpos com geometrias comuns na aviação. Esse método também utiliza de diferentes abordagens para diferentes partes de uma aeronave, estudando as propriedades de cada uma e analisando a interação entre elas (VUKELICH et al., 1988).

Um exemplo da aplicação desses métodos é no cálculo do coeficiente de força normal, no qual a sua distribuição em um corpo de revolução é dado através da equação 3.11 para fluxos subsônicos no qual S é área transversal local no corpo (BARROWMAN, 1967).

$$C_N(x) = \frac{2\alpha}{S_{ref}} \frac{dS}{dx} \quad (3.11)$$

Os benefícios da utilização desses métodos são a menor velocidade em que os dados são obtidos e o menor recurso computacional requerido. Em contra partida, esse método não tem uma precisão tão grande quanto o CFD, mas suficientemente preciso para aplicações práticas (MAURICE, 2009).

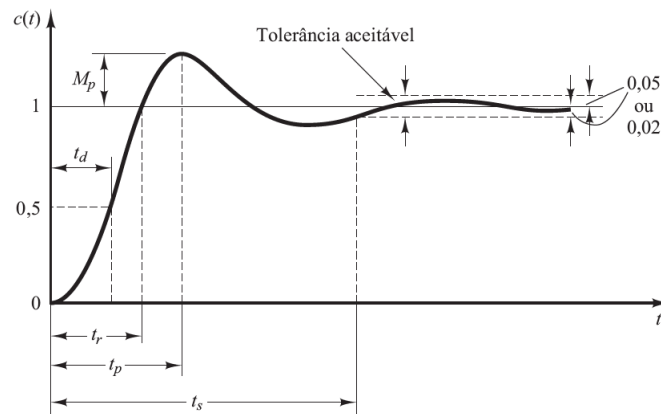
Outro método utilizado na aeronáutica é o túnel de vento, que consiste no uso de um protótipo de escala reduzida do desenho original da aeronave exposto a um túnel de vento que sopra ar em velocidades condizentes com a velocidade típica do veículo. Uma vez sujeito ao fluxo de ar, mede-se as forças e momentos desse protótipo através de sensores e finalmente têm-se os coeficientes aerodinâmicos.

Apesar desses experimentos gerarem dados muito precisos e foram cruciais para a validação dos métodos semi-empíricos, eles são mais caros e demorados que os métodos CFD (ALMEIDA et al., 2018).

4 Controle de sistemas

O controle de sistemas tem como o objetivo entender os comportamentos dos mais diversos processos da natureza afim de melhorar suas características de desempenho ou estabiliza-los em uma entrada de referência através de um ou mais atuadores no sistema. As características de desempenho como mostradas na Figura 7 são indicadores da resposta transiente do sistema antes de atingir o regime permanentes. São eles mostrados na Tabela 1 junto com suas definições (OGATA, 2010).

Figura 7 – Resposta ao degrau de um sistema com os parâmetros t_p , t_r , t_d , t_s e M_p



Fonte: adaptado de Ogata (2010).

Nas próximas seções serão abordados os formalismos e as ferramentas mais comuns do controle.

Tabela 1 – Características de desempenho e descrição

Característica de desempenho	Descrição
Tempo de atraso (t_d)	Tempo para que a resposta atinja metade do valor final.
Tempo de subida (t_r)	Tempo para que o sinal passe de 0 a 100% do valor final.
Tempo de pico (t_p)	Tempo que o sinal leva para que chegue ao primeiro pico de sobressinal.
Sobressinal (M_p)	Tamanho do sobressinal máximo a partir do valor final.
Tempo de acomodação (t_s)	Tempo necessário para que a resposta transitória alcance valores geralmente de 2% ou 5% em torno do valor final.

Fonte: adaptado de (OGATA, 2010).

4.1 Formalismos do controle

4.1.1 Funções de transferência

Supondo que um processo P é definido pela equação 4.1 onde u é a variável de entrada e y é a variável de saída, pode-se aplicar a transformada de Laplace nos dois lados e definir a equação 4.2 como a função de transferência do processo P ao dividir a transformada de Laplace da saída pelas transformada da entrada. Note que a função de transferência é independente da entrada seja qual ela for. No controle chamamos as raízes de $Y(s)$ de pólos e as raízes de $U(s)$ de zeros da função de transferência.

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y^{(1)} + a_n y = b_0 u^{(m)} + b_1 u^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} u^{(1)} + b_m u \quad (4.1)$$

$$G(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (4.2)$$

Outra informação importante que as funções de transferência trazem sobre o sistema são os diagramas de Bode. Eles elucidam como o processo responde as diversas entradas de frequências diferentes e também tem relação com velocidade de resposta do sistema ao impulso. Para uma função de transferência $G(s)$ pode-se definir os diagramas de Bode como na equação 4.3, onde M é denominado o ganho do sistema em decibéis (dB) e a fase ϕ em graus. Comumente são desenhados os gráficos de ganho como $20 \log_{10}(M)$.

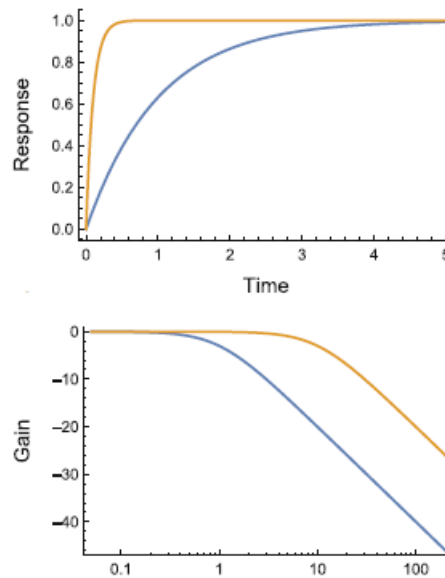
$$\begin{aligned} M &= |G(j\omega)| \\ \phi &= \angle G(j\omega) \end{aligned} \quad (4.3)$$

O significado físico dos diagramas de Bode é que para uma entrada $u = \sin(\omega_0 t)$, o sistema terá a resposta, no $t \rightarrow \infty$, de $y = M(\omega_0) \sin(\omega_0 t + \phi(\omega_0))$. Na Figura 8, é observável a diferença na resposta ao impulso entre a curva laranja e azul. Note que o sistema laranja, em que o ganho decai a partir de $\omega = 10$, tem um t_s menor que a curva azul onde o decaimento do ganho ocorre a partir de $\omega = 1$ (FRANK, 2017).

4.1.2 Espaço de Estados

Uma alternativa a função de transferência é o formalismo do espaço de estados que permite trabalhar com sistemas mais complexos e com requisitos de desempenho mais exigentes. Pode-se definir um processo P no espaço de estados através vetor de estados

Figura 8 – Diagramas de bode e as diferenças entre as respostas ao impulso.



Fonte: adaptado de Frank (2017).

4.4, pelo vetor de entradas 4.5, pelo vetor de saídas 4.6 e a equação 4.7 é a denominada equação de estados.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{aligned} \quad (4.7)$$

A vantagem do uso do espaço de estados na descrição do problema é que além de permitir uma análise temporal e não linear de sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas, todo o tratamento passa a ser matricial, fato que utiliza melhor das ferramentas

da computação atual. Outro benefício do espaço de estado é a não unicidade do conjunto de variáveis de estado, ou seja, pode-se escolher livremente os vetores de estado que eles carregarão a mesma informação sobre o comportamento do sistema.

4.1.2.1 Relação entre o espaço de estados e as funções de transferência

Se é possível descrever o mesmo sistema no espaço de estados e através de funções de transferência, deve haver alguma correlação entre 4.2 e 4.7. Para entender essa relação, pode-se aplicar a transformada de Laplace em 4.7 como em 4.8 e a equação 4.9 mostra a função de transferência a partir da equação de estado. O resultado mais importante dessa expressão é que os polos de $G(s)$ são os autovalores de \mathbf{A} . A importância da localidade dos polos do sistema se dá visto que a estabilidade do sistema se dá quando a parte real deles é negativa e também indicam características transientes do sistema (ROUTH, 1877).

$$\begin{aligned}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) &= \mathbf{B}U(s) \\ Y(s) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + DU(s)\end{aligned}\tag{4.8}$$

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D\tag{4.9}$$

4.1.2.2 Observabilidade e Controlabilidade

A observabilidade de um sistema é definida se em um instante t é possível definir o estado nesse mesmo t através da observação da saída. Já a controlabilidade de um sistema se dá quando é possível transferir um sistema de um estado inicial para qualquer outro estado em um tempo finito. A importância desses conceitos se dão porque controlar um sistema pode não ser possível se as condições observabilidade e controlabilidade não são cumpridas.

A condição de controlabilidade é que dada a equação de estado 4.7, o sistema é controlável se os vetores \mathbf{B} , \mathbf{AB} , ... e $\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}$ forem linearmente independentes ou o posto da matriz de controlabilidade $\mathbf{M} = [\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ for n . Ao extrapolar esse conceito para funções de transferência, é possível demonstrar que um sistema é controlável de não ocorrem cancelamentos de fatores entre os numeradores e denominadores de $G(s)$.

As condições de observabilidade são similares as condições de controlabilidade nas quais se para a equação de estado 4.7, o sistema é observável se $[\mathbf{C}^T \ \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T \ \dots \ \{(\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{C}^T}]$ tiver vetores coluna linearmente independentes ou o posto da matriz for n . No plano-s, a condição de observabilidade é a mesma que a condição de controlabilidade (KALMAN, 1960).

4.2 Linearização de sistemas

Todos os conceitos abordados na Seção 4.1 levaram em conta que os processos estudados são equações diferenciais lineares invariantes no tempo, mas fenômenos da natureza são na sua maioria essencialmente não lineares. Para superar esse problema, uma abordagem comum é a linearização das equações de estado em volta de um ponto de operação e com ela, pode-se realizar a análise da equação de estado já linearizada.

Dada uma equação de estado de um sistema genérico como pode ser visto em 4.10, pode-se determinar um ponto de operação em um estado $\bar{\mathbf{x}}$, com um sinal de controle $\bar{\mathbf{u}}$ e uma saída $\bar{\mathbf{y}}$ e calcular o jacobiano da função \mathbf{f} e \mathbf{g} em volta de $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{u}}$.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\end{aligned}\tag{4.10}$$

Ao calcular o jacobiano, obtêm-se as matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} como visto na equação 4.11. Essas matrizes compõem as equações de estado com um vetor de estado $\Delta\mathbf{x}$, um vetor de entrada $\Delta\mathbf{u}$ e um vetor de saída $\Delta\mathbf{y}$. O vetor de estado real é $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{x}$

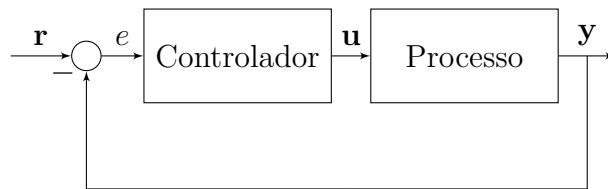
$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_r} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} \\ \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial u_r} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}\end{aligned}\tag{4.11}$$

Pode-se utilizar a linearização para controlar sistemas não lineares, pois a aproximação linear no ponto de equilíbrio captura suficientemente os aspectos essenciais da dinâmica, como garante o teorema de Hartman–Grobman (BARATCHART; CHYBA; POMET, 2007). As aproximações também podem ser utilizadas de forma que uma realimentação robusta o suficiente, o sistema converge para o ponto de equilíbrio em um longo espectro de condições iniciais e perturbações (FRANK, 2017).

4.3 Sistemas de malha fechada

Como na maioria dos projetos, as características intrínsecas do sistema não podem ser modificadas ou o sistema em si é naturalmente instável, costumamos utilizar a realimentação para melhorar as características e/ou estabilizar o sistema. Os sistemas realimentados são denominados sistemas de malha fechada e consistem em utilizar a informação da saída do sistema em prol dos objetivos previamente citados. A Figura 9 mostra um diagrama de blocos de um sistema realimentado onde \mathbf{r} são as entradas de referência definida pelo usuário, \mathbf{u} são as múltiplas ações de controle, \mathbf{y} são as saídas e \mathbf{e} é o erro $\mathbf{r}-\mathbf{y}$.

Figura 9 – Processo com realimentação e entrada de referência



Fonte: Autoria própria.

O controlador é um artefato que transforma o sinal de entrada em uma saída apropriada para o processo em questão. O desafio é projetar um bom controlador que atenda as características de desempenho requeridas pelo projeto. Os tipos mais comuns de controladores são os controladores PID, controladores por alocação de polos, controladores ótimos, controladores adaptativos e controladores preditivos. Nesse trabalho o escopo de estudo será restringido somente aos controladores por alocação de polos e controladores ótimos.

No formalismo do espaço de estados, se todas as variáveis estão disponíveis para a realimentação, é comum utilizar a realimentação do tipo $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$, onde \mathbf{K} é denominada matriz de ganho e determiná-la é o objetivo fundamental do design de controladores. Com essa realimentação, ao aplicar a equação de estado, é obtida a equação 4.12 e como explicitado anteriormente, se os autovalores de $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ tiverem a parte real negativa, o sistema é estável. Acrescentando uma entrada de referência ao sistema o sinal de controle passa a ser $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + Nr(t)$ e se $r(t)$ for uma constante, denominamos o sistema como um sistema regulador e se $r(t)$ varia no tempo, o sistema é um sistema rastreador.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{BK}\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} \quad (4.12)$$

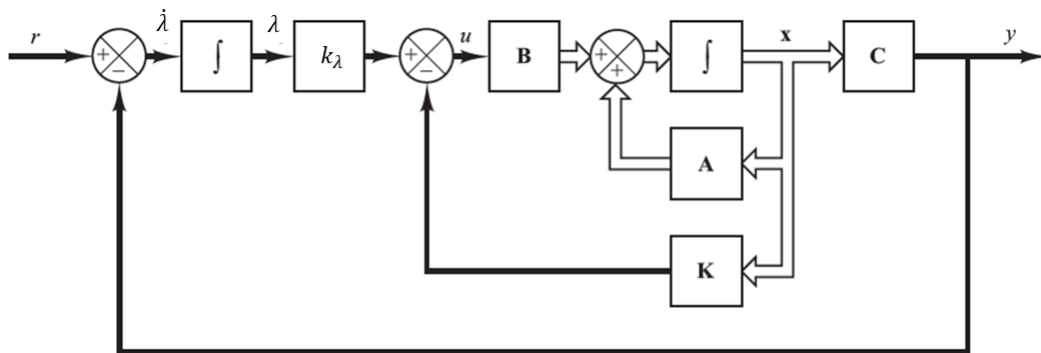
4.3.1 Servossistemas de plantas com ação integral

Se um sistema tem uma variável a ser controlada em um ponto de referência mas a mesma que não é definida diretamente na dinâmica mas somente através das suas derivadas, se diz que o sistema não tem integrador e é necessário um enfoque especial para esse caso.

Dado um sistema como na equação 4.4, têm-se que o sinal de controle realimentado tem a forma mostrada na equação 4.13, com o erro λ , uma entrada de referência r e o sistema como um todo é representado na Figura 10. A adição dessa integral do erro elimina o erro em regime permanente, melhora as características de desempenho e atenua incertezas no sistema.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -\mathbf{K}\mathbf{x} + k_\lambda\lambda \\ \dot{\lambda} &= r - y = r - \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \tag{4.13}$$

Figura 10 – Diagrama de blocos de um servossistema realimentado.



Fonte: adaptado de Ogata (2010).

Combinando as matrizes de estado com o controlador expresso na equação 4.13, têm-se um novo sistema 4.14 com um novo vetor de estados, inserção de um novo vetor de ganhos $\mathbf{K}_\lambda = [\mathbf{K} \mid -k_\lambda]$ e no acréscimo de uma ordem no sistema em si. Dessa forma, pode-se aplicar os mesmos conceitos de estabilidade para a nova matriz de estado e os mais diferentes métodos de determinação do vetor de ganhos \mathbf{K}_λ .

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ u &= \mathbf{K}_\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.14}$$

Após definido um vetor de ganhos que atenda aos requisitos do projeto, a dinâmica final do sistema pode ser representada pela equação 4.15. Dessa forma, o sistema é estável e converge assintoticamente para a entrada de referência.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & k_\lambda \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r \\ y &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.15)$$

4.3.2 Alocação de polos

Uma das formas para definir o vetor de ganhos \mathbf{K} é o método da alocação de polos, no qual conseguimos deslocar os polos do sistema original para quaisquer polos escolhidos bastando o sistema se completamente controlável (LANGENHOP, 1964). Se o polinômio característico de \mathbf{A} é $s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_1s + p_0$, pode-se definir a matriz \mathbf{P} como na equação 4.16, onde os p_n são os coeficientes do polinômio característico de \mathbf{A} .

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} & 1 \\ p_2 & p_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ p_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Se os polos desejados são $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, então a equação característica desejada é $s^n + r_{n-1}s^{n-1} + \dots + r_1s + r_0$. Com essas expressões a matriz \mathbf{K} pode ser calculada utilizando a matriz de controlabilidade \mathbf{M} , a matriz \mathbf{P} e um vetor das diferenças entre os coeficientes dos polinômios característicos de \mathbf{A} e dos polos desejados através da equação 4.17 (WILLEMS, 1971).

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} r_0 - p_0 \\ r_1 - p_1 \\ \vdots \\ r_{n-1} - p_{n-1} \end{bmatrix} (\mathbf{MP})^{-1} \quad (4.17)$$

Os polos podem ser escolhidos de acordo com alguns critérios baseados no estudo das respostas ao impulso unitário de sistema linear de segunda ordem. Considerando uma função de transferência de segunda ordem como mostrado na equação 4.18, têm-se a resposta ao impulso mostrada na equação 4.19. Os polos desse sistema são

$$-\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}.$$

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.18)$$

$$y = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \phi) \quad (4.19)$$

Pode-se calcular algumas características de desempenho dessa resposta ao impulso em função de ζ e ω_n como mostrado na equação 4.20.

$$\begin{aligned} t_p &= \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \\ M_p &= 1 + e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \\ t_{s2\%} &= -\frac{\ln(0.02\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta\omega_n} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Através dessas relações é possível determinar esses coeficientes com base nas características de desempenho desejadas e por fim definir o par de polos. Em sistemas de ordem maior que dois, os outros polos devem que ser escolhidos de forma que sejam não dominantes e influenciem pouco no sistema. Os polos dominantes são definidos como os polos com menor parte real dentre todos os polos e definem maior parte do comportamento do sistema.

4.3.3 Sistemas reguladores ótimos

A abordagem do controle ótimo busca definir a matriz \mathbf{K} de uma ação de controle $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ de forma que ela minimize um funcional como o escrito na equação 4.21. Esse funcional pode ser interpretado como uma função da energia do sistema em intervalo de tempo $t_f - t_0$ e a escolha das matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} ponderam a importância de cada variável nesse cálculo. O único requisito dessa técnica é que o sistema seja totalmente controlável e observável para que exista uma matriz \mathbf{K} ótima (KALMAN, 1964).

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} dt \quad (4.21)$$

O desafio dessa técnica é escolher corretamente as matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} que tenham as características de desempenho desejadas porém, por mais que torne o processo ótimo, nem sempre as características de desempenho são satisfatórias. As formas mais comuns de determinação são a heurística, regra de Bryson e o uso de algoritmos otimizadores.

A regra de Bryson consiste em escolher as matrizes diagonais \mathbf{Q} e \mathbf{R} como na equação 4.22, no qual as variáveis \tilde{x}_i são os valores máximos aceitáveis para x_i e \tilde{u}_j são os valores máximos aceitáveis para u_j (MCLEAN, 1995).

$$\begin{aligned}\mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & q_n \end{bmatrix}, & q_n &= \frac{1}{\tilde{x}_n^2} \\ \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} s_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & s_r \end{bmatrix}, & s_r &= \frac{1}{\tilde{u}_r^2}\end{aligned}\tag{4.22}$$

Os algoritmos otimizadores procuram calcular \mathbf{Q} e \mathbf{R} ao variar seus valores em busca de um conjunto que satisfaça as características de desempenho desejadas.

5 Metodologia

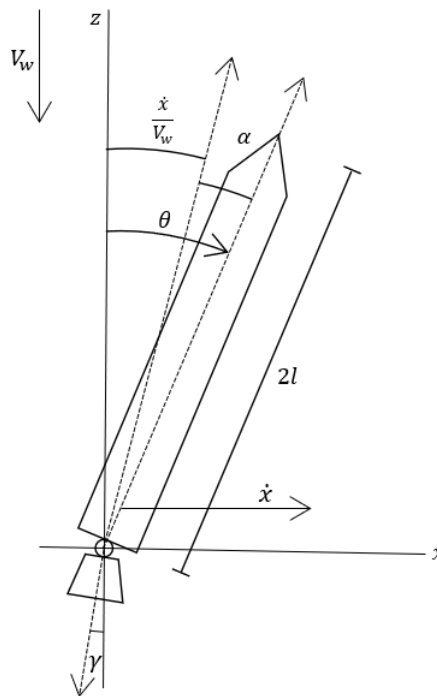
5.1 Hipóteses simplificadoras

Como o sistema real consiste em um modelo com seis graus de liberdade, três de rotação e três de translação, será adotado um modelo com um grau de rotação e um de translação na horizontal para reduzir a complexidade da análise.

O sistema será representado fisicamente como o problema de controle do pêndulo invertido acrescido com forças e momentos aerodinâmicos e empuxo provido por um TVC. Nesse modelo, o carro é correspondido pela tubeira e o pêndulo pelo foguete.

5.2 Dinâmica do modelo

Figura 11 – Esquema do sistema estudado.



Fonte: Autoria própria.

Para deduzir a dinâmica do modelo, representado na Figura 11, inicia-se pela equação de movimento 5.1 da tubeira, onde as forças atuantes são o empuxo e a reação E na horizontal. M é a massa da tubeira e o ângulo γ é o ângulo que o empuxo F_t é projetado em relação ao foguete, logo a força atuante na horizontal depende da composição

entre θ e γ . Será considerado que não há forças aerodinâmicas atuando na tubeira dada a disparidade de dimensão entre o corpo do foguete e a mesma.

$$M\ddot{x} = F_t \sin(\gamma + \theta) - E \quad (5.1)$$

Ao realizar a somatória das forças no centro de massa do foguete, obtêm-se como resultado a equação 5.2, no qual X é a força aerodinâmica no eixo x e l é metade do comprimento do foguete.

$$m \frac{d^2}{dt^2}(x + l \sin \theta) = m\ddot{x} + ml(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) = E + X \quad (5.2)$$

A somatória das forças verticais no centro de massa do foguete é representada pela equação 5.3 no qual Z é a força aerodinâmica no eixo z e P é a reação vertical na base do foguete.

$$m \frac{d^2}{dt^2}(l \cos \theta) = -ml(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) = P - mg + Z \quad (5.3)$$

O movimento rotacional do foguete em volta do centro de massa é dado na equação 5.4 pela soma dos momentos, no qual I é a inércia do foguete e M_{aero} é o momento aerodinâmico provocado pelo movimento. A inércia pode ser calculada através da aproximação do foguete a um cilindro de densidade constante, raio r e comprimento $2l$, sendo assim, $I = \frac{m(3r^2 + 4l^2)}{12}$.

$$I\ddot{\theta} = Pl \sin \theta - El \cos \theta + M_{aero} \quad (5.4)$$

Ao isolar N e P nas equações 5.2 e 5.3, e inserir nas equações 5.1 e 5.4, têm-se o sistema de equações não lineares acoplados de segunda ordem que descreve o problema, como mostrado na equação 5.5.

$$\begin{cases} M\ddot{x} = F_t \sin(\gamma + \theta) - (m\ddot{x} + ml(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) - X) \\ I\ddot{\theta} = M_{aero} - (m\ddot{x} + ml(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) - X)l \cos \theta \\ \quad + (-ml(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) + mg - Z)l \sin \theta \end{cases} \quad (5.5)$$

Considerando um fluxo de ar com velocidade V_w e incidência paralela ao eixo vertical, como na Figura 11, têm-se a formação de um ângulo de ataque dado por $\alpha = \theta - \frac{\dot{x}}{V_w}$ como sugerido por [Wie Wei Du \(2008\)](#). Com o ângulo de ataque induzido pelo fluxo, chegamos a conclusão que as forças X e Z são dadas pela equação 5.6 através da decomposição da sustentação e arrasto. A força de arrasto, sustentação e o momento aerodinâmico pode

ser visto na equação 5.7, que é muito semelhante a equação 3.5, porém com a adição do termo a mais, proveniente da composição das velocidades V_w e \dot{x} .

$$\begin{cases} X = L \cos \frac{\dot{x}}{V_w} - D \sin \frac{\dot{x}}{V_w} \\ Z = -L \sin \frac{\dot{x}}{V_w} - D \cos \frac{\dot{x}}{V_w} \end{cases} \quad (5.6)$$

$$\begin{cases} L = \frac{C_L \rho_\infty S_{ref} (V_w^2 + \dot{x}^2)}{2} \\ D = \frac{C_D \rho_\infty S_{ref} (V_w^2 + \dot{x}^2)}{2} \\ M_{aero} = \frac{C_M \rho_\infty S_{ref} l_{ref} (V_w^2 + \dot{x}^2)}{2} \end{cases} \quad (5.7)$$

A equação 5.5 permite o cálculo das condições de equilíbrio do sistema ou seja, onde $\dot{\theta}$ e \dot{x} são nulos. Com um pouco de álgebra, se observam as relações na equação 5.8 e dependem totalmente do atuador e das forças e momentos aerodinâmicos. Pode-se expandir os coeficientes aerodinâmicos C_D , C_L e C_M para baixos ângulos de ataque e próximo da velocidade V_w para $C_D = C_{D_0} + C_{D_\alpha} \alpha$, $C_L = C_{L_\alpha} \alpha$ e $C_M = C_{M_\alpha} \alpha$. Os valores dos coeficientes de sustentação e momento podem ser tomados como nulos em um ângulo de ataque nulo porque como foguetes costumam ser figuras axissimétricas, têm-se a implicação desse comportamento.

Observa-se que as forças aerodinâmicas instabilizam o pêndulo, todavia conforme o ângulo de ataque aumenta, a sustentação empurra o sistema horizontalmente e o momento tem atuação direta em θ e saber a magnitude dessas forças é fundamental visto que F_t deve no mínimo, ser equiparável a essas forças.

$$\begin{cases} F_t \sin(\gamma + \theta) = -X \\ 0 = M_{aero} + Xl \cos \theta + (mg - Z)l \sin \theta \end{cases} \quad (5.8)$$

Uma análise mais criteriosa do sistema 5.8 mostra que para existir um ângulo γ_e , é preciso que $|F_t| > |X|$ e em termos de engenharia, como o ângulo máximo típico de um TVC é no máximo $\pm 20^\circ$, é necessário estipular um F_t que permita ao atuador variar entre esses limites sem que ocorra a saturação do mesmo.

Com esse desenvolvimento, é possível resolver esse sistema não linear, bastando conhecer as características aerodinâmicas e mecânicas do veículo e velocidade do fluxo de vento para obter os ângulos θ_e e γ_e em que o sistema se equilibra. Ao desenvolver esses sistema em função de θ é fácil ver que a primeira solução do sistema é com $\theta_e = 0$ e conseqüentemente $\gamma_e = 0$ facilitando os cálculos posteriores.

5.2.1 Linearização do modelo

Dado que toda a teoria de controle construída requer que os sistemas sejam lineares, é necessária a linearização do modelo em volta das condições de equilíbrio através da suposição que θ e x vão variar pouco o suficiente para que as não-linearidades sejam relevantes. Como mostrado anteriormente, as constantes no tempo podem ser desprezadas, restando somente as parcelas que contribuem com as variáveis de estado. A equação 5.9 mostra o sistema linearizado através do cálculo simbólico do MATLAB, lembrando que a letra l é metade do comprimento total do foguete. Ao isolar as segundas derivadas, é possível escrever as equações na forma de matrizes de estado e avançar nos cálculos.

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + m\ddot{\theta} = F_t\gamma + F_t\theta + \frac{C_{L\alpha}\rho_\infty S_{ref}V_w^2}{2}\theta - (C_{D0} + C_{L\alpha})\frac{\rho_\infty S_{ref}V_w}{2}\dot{x} \\ (I + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = \rho_\infty S_{ref}lV_w^2(C_{M\alpha} + \frac{C_{L\alpha}}{2} + \frac{C_{D0}}{2})\theta \\ -\rho_\infty S_{ref}lV_w(C_{M\alpha} + \frac{C_{L\alpha}}{2} + \frac{C_{D0}}{2})\dot{x} + mgl\theta \end{cases} \quad (5.9)$$

5.3 Controladores e características de desempenho

Os controladores implementados serão os controladores ótimos e por alocação de polos e seguem o diagrama de blocos mostrado na Figura 10 com todas as variáveis disponível para a realimentação. No controle ótimo, ao utilizar a regra de Bryson para determinar os coeficientes da matriz \mathbf{R} e \mathbf{Q} , é preciso definir quais os deslocamentos e velocidades máximas admissíveis e o ângulo de empuxo máximo admissível. Para a alocação de polos, será utilizada a abordagem indicada na Seção 4.3.2.

Em um primeiro passo, as características de desempenho analisadas são o sobressinal, amplitude de γ para que não haja saturação do mesmo, frequência de corte do sistema baseado nos resultados obtidos por Wu, Xie e Yang (2012) e os valores limites esse requisito são mostrados na Tabela 2. Essas características serão avaliadas no contexto da simulação linear da resposta ao impulso e a resposta a perturbação, no qual a perturbação inserida é $\theta = 5^\circ$. A atenuação de $-3dB$ foi escolhida pois é um parâmetro típico utilizado na literatura e representa uma atenuação de aproximadamente de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ do sinal de entrada, ou em termos de energia, 50% da energia de entrada. Nesse trabalho será comparada a performance entre o controlador por alocação de polos e o controlador ótimo e seus devidos diagramas de bode.

Em um segundo passo, será definido um conjunto de controladores que atendem a um limite máximo de deslocamento no eixo horizontal de $\pm 2,5$ metros a partir da condição inicial mediante a perturbação de 5° . O conjunto de controladores será expresso como um mapa no plano complexo de polos que atendem a essa especificação. O método utilizado na construção desse mapa será o cálculo iterativo de cada resposta a perturbação com

Tabela 2 – Requisitos do sistema

Requisito	Valor
Tempo de acomodação (2%)	2s
γ máximo	20°
θ máximo	30°
Frequência de corte (-3dB)	20Hz

Fonte: Autoria própria.

um controlador com polo $a_n \pm b_n i$ em um intervalo de 0 a -5 na parte real e 0 a 15 na parte complexa, e se esse atender o limite máximo indicado e os requisitos de γ , esse polo é selecionado como aceitável. Serão repetidos os dois passos nas velocidades de Mach 0,7, 2 e 5 para entender como o sistema se comporta a medida que as forças aerodinâmicas aumentam. Essas velocidades foram escolhidas porque em 0,7 têm-se o comportamento transônico, em Mach 2 têm-se o fluxo supersônico e Mach 5, hipersônico.

5.4 Propriedades aerodinâmicas

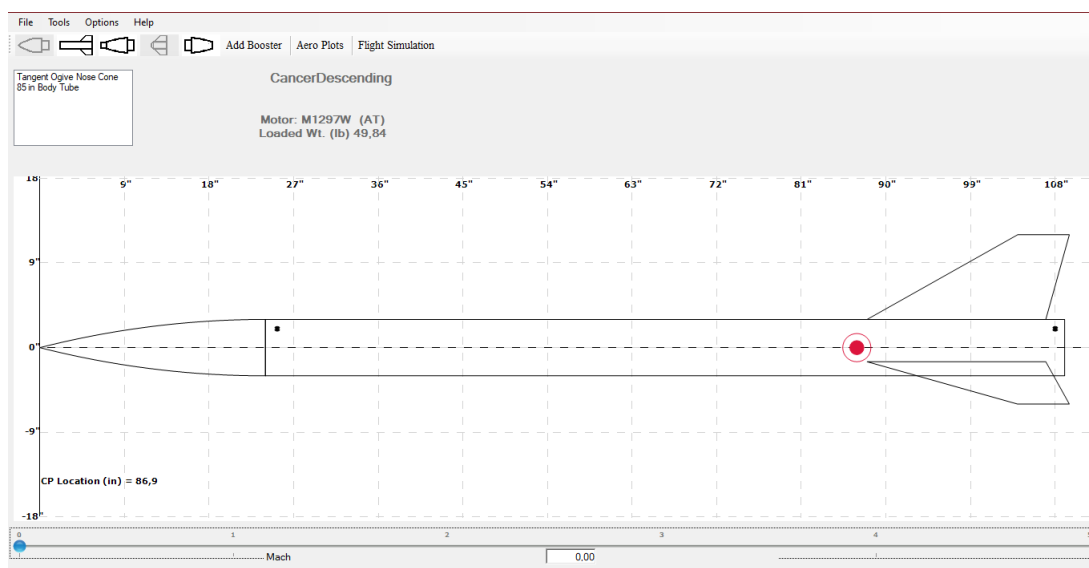
As propriedades aerodinâmicas do veículo a ser estudado serão obtidas através do software RASAero II, que utiliza dos métodos de Barrowman para determinação dos coeficientes aerodinâmicos. Esses métodos consistem no cálculo de coeficientes aerodinâmicos em cada parte do separada do corpo da aeronave para em seguida calcular a interação entre elas e finalmente juntar cada parcela de contribuição. As principais simplificações consistem em ângulos de ataque próximos a zero e fluxos estacionários e na junção de resultados teóricos com resultados experimentais (BARROWMAN, 1967).

A Figura 12 mostra um exemplo no software que assim como o método de cálculo, a construção da geometria a ser simulada consiste no desenho de cada parte respectivamente.

O software fornece os coeficientes C_D , C_L em várias velocidades e em ângulos de ataque iguais a zero, 2° e 4° graus. Para obter C_{D_α} e C_{L_α} , será calculada uma reta entre os três pontos de ângulos de ataque para cada velocidade. Para o cálculo do momento aerodinâmico, como o software usa o conceito de centro de pressão, o coeficiente de momento será dado por 5.10, onde C_N é o coeficiente de força normal, x_{cg} é a posição do centro de gravidade e x_{cp} é a posição do centro de pressão, no qual será considerada a média entre os três ângulos de ataque para ser tido como constante.

A definição de centro de pressão é dada como ponto onde o momento aerodinâmico é nulo e a analogia em que pode-se utilizar para a expressão 5.10, é que a força normal é aplicada no corpo com uma alavanca do tamanho $x_{cp} - x_{cg}$ em relação ao centro de massa, criando assim um momento no corpo. Esse conceito é importante visto que dele se obtém a estabilidade de uma aeronave de forma que se $\frac{\partial C_{M_\alpha}}{\partial \alpha} < 0$, o foguete é estável, ou em

Figura 12 – Esquema do RASAero II



Fonte: Autoria própria.

termos prático, se o centro de pressão está após do centro de gravidade do veículo a partir do nariz, o foguete é estável.

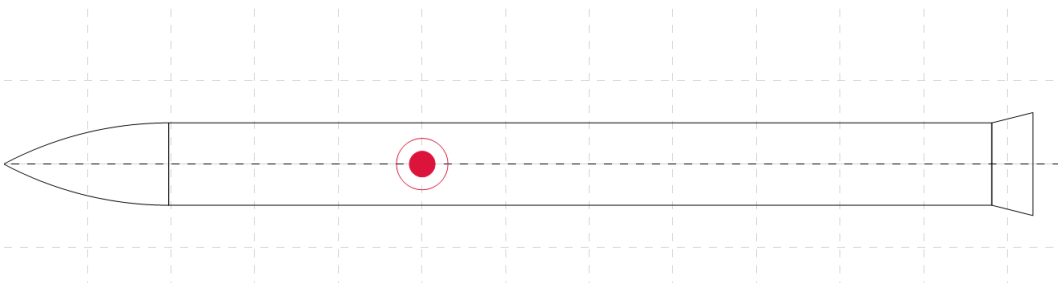
$$C_M = \frac{C_N(x_{cp} - x_{cg})}{l_{ref}} \quad (5.10)$$

6 Resultados

6.1 Características mecânicas e aerodinâmicas

A geometria estudada mostrada na Figura 13, consiste em um nariz de formato ogival com 0,2 metros de diâmetro e 0,4 metros de comprimento, um corpo de 2 metros e saias que vão dos 0,2 metros de diâmetro aos 0,25 metros ao longo de 0,5 metros, totalizando 2,5 metros de comprimento total.

Figura 13 – Geometria desenvolvida



Fonte: Autoria própria.

Os resultados obtidos pelo RASAero II podem ser vistos na Tabela 3 e mostram resultados que condizem com o esperado, como a não existência de sustentação a um ângulo de ataque nulo dada a simetria do veículo. O software provê o cálculo do C_N mas pela simetria da geometria, a força normal é nula em um ângulo de ataque nulo, bastando então somente o conhecimento do C_{N_α} . Um fato importante sobre os dados obtidos na Tabela 3 é a instabilidade do sistema nas três velocidades visto que o centro de pressão está sempre anterior ao centro de massa, fato que pode dificultar o controle.

Com os dados da Tabela 3, é possível calcular C_{L_α} para cada velocidade e o resultado pode ser visto na Tabela 4. Para entender a magnitude dessas forças aerodinâmicas, pode-se calcular o valor da sustentação na condição inicial da resposta a perturbação de 5° , onde ao utilizar a equação 5.7, têm-se que em Mach 0,7 a sustentação tem $264,83N$, em Mach 2 há o valor de $2246,63N$ e em Mach 5, $12537,18N$.

Outras características utilizadas nas simulações são observadas na Tabela 5. A massa m do foguete, massa M da tubeira e a força F_t de empuxo foram estimadas com os valores factíveis de foguetes existentes na atualidade como mostra por Vasek, Polacek e Konecny (2020). Ao utilizar todas as características mecânicas e aerodinâmicas para resolver o sistema de equações 5.8, obtém-se que $\theta_e = \gamma_e = 0$, fato esperado dado que

Tabela 3 – Propriedades aerodinâmicas da geometria estudada providas pelo RASAero II

Mach	α (°)	C_D	C_L	$C_{N_\alpha} (rad^{-1})$	$x_{cp} (m)$
0,7	0	0,221	0,000	2,812	1,02
0,7	2	0,221	0,081	2,812	1,05
0,7	4	0,221	0,180	2,812	1,08
2,0	0	0,434	0,000	3,125	0,88
2,0	2	0,434	0,088	3,125	0,92
2,0	4	0,434	0,187	3,125	0,94
5,0	0	0,258	0,000	2,655	0,98
5,0	2	0,258	0,085	2,655	1,00
5,0	4	0,258	0,167	2,655	0,99

Fonte: Autoria própria.

Tabela 4 – C_{L_α} calculado

Mach	$C_{L_\alpha} (rad^{-1})$
0,7	2,578
2,0	2,679
5,0	2,392

Fonte: Autoria própria.

$C_L = C_M = 0$ em um ângulo de ataque nulo.

Tabela 5 – Outras variáveis relevantes no modelo

M	10kg
m	100kg
I	208,583 kg · m ²
ρ_∞	1,3kg · m ⁻³
F_t	10kN

Fonte: Autoria própria.

Sendo assim, as matrizes de estado do sistema em cada velocidade podem ser vistas nas equações 6.1, 6.2 e 6.3 respectivamente com um vetor de estado $\mathbf{x} = [\theta \dot{\theta} x \dot{x}]$, e sendo como saída, o deslocamento horizontal do sistema.

Como é possível observar na Tabela 4.3.2, pelo menos um autovalores das matrizes \mathbf{A} tem a parte real maior ou igual a zero, denotando que em todas as velocidade o sistema é instável. Também é observado que a as matrizes de observabilidade e controlabilidade para todas as velocidades tem o posto 4, garantindo a observabilidade e controlabilidade do sistema. Ao comparar as matrizes de estado entre si, observa-se que as contribuições de θ aumentam significadamente com a velocidade V_w , amortecem a dinâmica de θ mas contribuem para a desestabilização na dinâmica de x . As contribuições de \dot{x} para a dinâmica também aumentam medida que a velocidade V_w cresce mas não são tão relevantes quanto

θ .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -45,4664 & 0 & 0 & 0,0054 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 170,1646 & 0 & 0 & -0,1308 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -51,0065 \\ 0 \\ 148,8710 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

$$\mathbf{C} = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \quad \mathbf{D} = [0]$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -54,3963 & 0 & 0 & 0,0439 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 386,7638 & 0 & 0 & -0,4464 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -51,0065 \\ 0 \\ 148,8710 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

$$\mathbf{C} = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \quad \mathbf{D} = [0]$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -71,3779 & 0 & 0 & 0,0612 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1478,0708 & 0 & 0 & -0,9132 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -51,0065 \\ 0 \\ 148,8710 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

$$\mathbf{C} = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \quad \mathbf{D} = [0]$$

Tabela 6 – Autovalores das matrizes de estado

Mach	Autovalores
0,7	$[0 \ -0,01 \pm 6,7427i \ -0,1107]$
2,0	$[0 \ -0,1563 \pm 7,3709i \ -0,1338]$
5,0	$[0 \ -0,6323 \pm 8,4512i \ 0,3514]$

Fonte: Autoria própria.

6.2 Análise de desempenho do controlador ótimo e por alocação de polos

Ao empregar a regra de Bryson para determinar os coeficientes da matriz \mathbf{R} e \mathbf{Q} , têm-se as matrizes calculadas na equação 6.4, onde o deslocamento máximo admissível é de 1 metro, a velocidade máxima admissível é de 10 m/s, a variação máxima de θ é de 30° , a velocidade máxima de rotação admissível é de 10 rad/s e o γ máximo é de 2° para garantir a permanência na região de trabalho do TVC. A quinta variável da matriz

leva em conta o peso do erro entre o valor da saída e o valor de referência que interfere diretamente no tempo de acomodação, e esse peso foi adotado como 100.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 3,6475 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8,2070 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

$$\mathbf{R} = [820,7016]$$

Partindo para a abordagem da alocação de polos e como definido anteriormente, o requisito de tempo de acomodação em 2% é de 2 segundos e pode-se inserir um requisito de sobressalto máximo de 20% e sendo assim, através das equações 4.20, têm-se um tempo de pico de 0,8 segundos aproximadamente, ζ calculado de 0,456 e um ω_n de 4,417, fazendo o par de polos a serem alocados serem $-2,0143 \pm 3,9318i$ junto com três polos distantes em -5. As próximas subseções se dedicarão à comparação da performance entre os dois controladores para cada velocidade estudada.

6.2.1 Comparação entre controladores em Mach 0,7

6.2.1.1 Controle ótimo

Na Figura 14 têm-se a resposta a perturbação que mostra um γ máximo de $9,42^\circ$. Os deslocamentos e velocidades horizontais são satisfatórios mediante aos limites impostos na regra de Bryson. As variações de θ e $\dot{\theta}$ também são satisfatórias, uma vez que têm-se $5,6^\circ$ em θ e de 0,83 rad/s aproximadamente em $\dot{\theta}$. O tempo de acomodação da saída do sistema em 2% é de aproximadamente 1,9 segundos, muito próximo do requisito máximo.

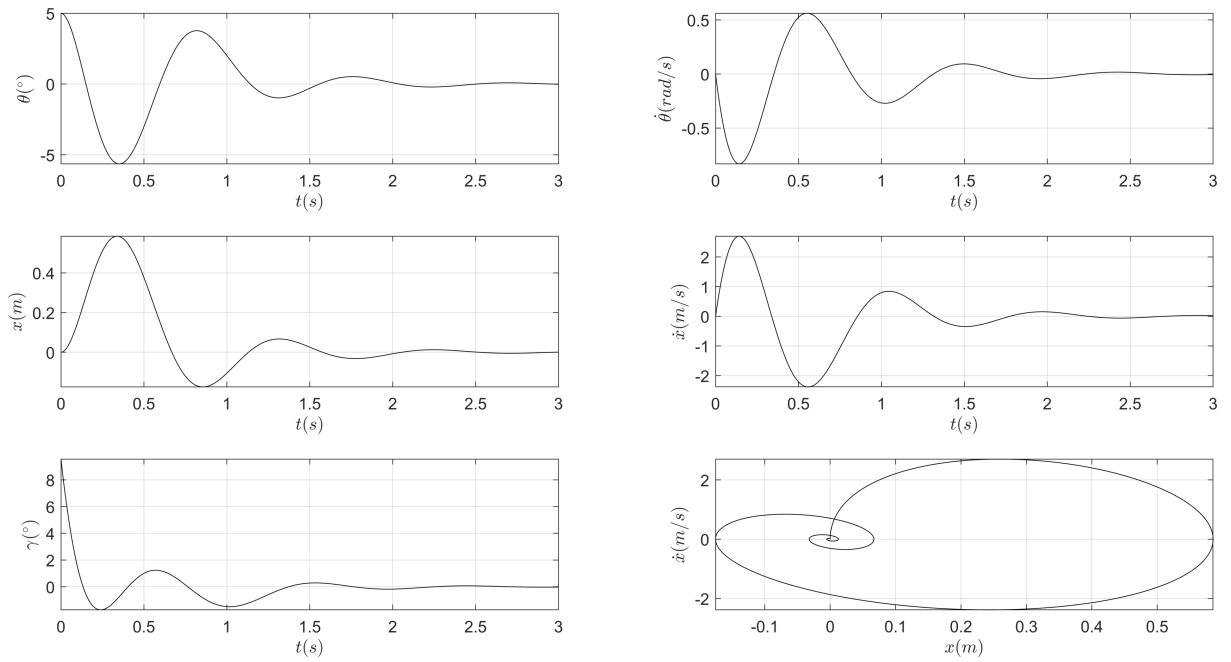
Já na Figura 15, têm-se a resposta a impulso unitário que mostra um γ máximo de $1,56^\circ$. Os deslocamentos e velocidades horizontais também são satisfatórios mediante aos limites impostos. As variações de θ e $\dot{\theta}$ também são satisfatórias, dados que o máximo é de 3° em θ e de 0,17 rad/s aproximadamente em $\dot{\theta}$. O tempo de acomodação da saída do sistema em 2% é de aproximadamente 1,79 segundos.

O diagrama de Bode pode ser visto na Figura 16 e a frequência de corte em -3dB é de aproximadamente em 0,48 Hz, frequência muito abaixo do requisito especificado.

6.2.1.2 Alocação de polos

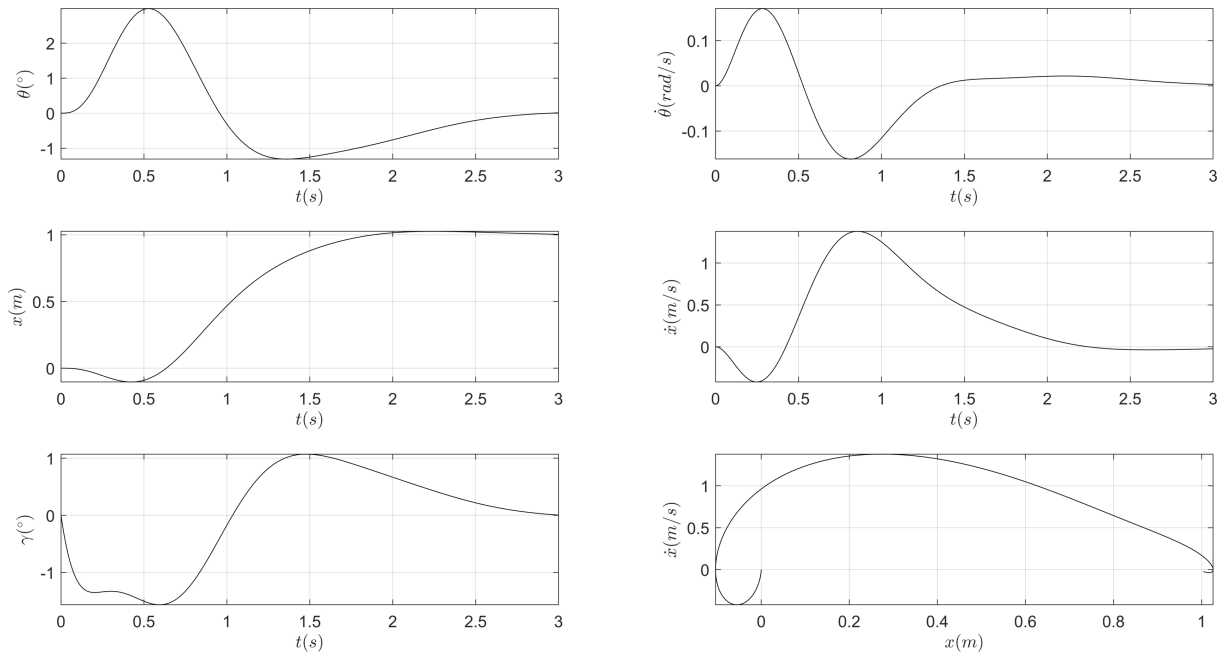
Partindo para a alocação de polos, a Figura 17 mostra a resposta a perturbação no qual o γ máximo é de $24,77^\circ$, valor que supera o máximo ângulo de empuxo admissível. O deslocamento máximo na horizontal é de 0,57 metros e a velocidade máxima é de 3,32

Figura 14 – Resposta a perturbação de 5° em Mach 0,7 através do controle ótimo



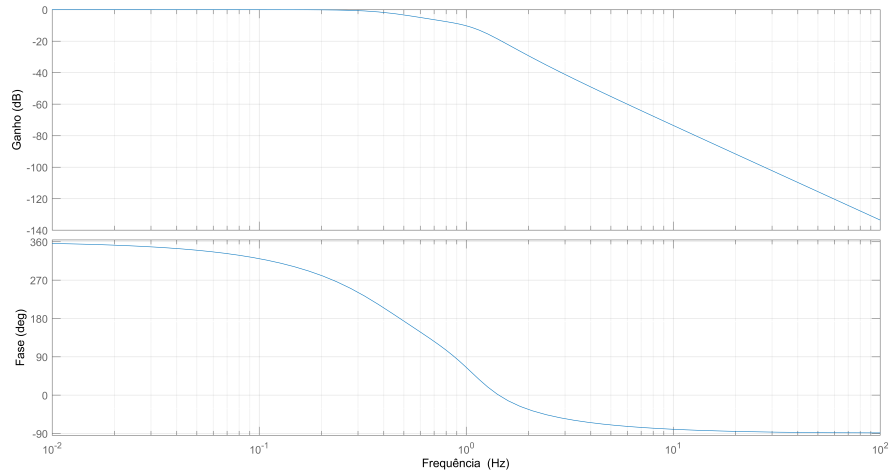
Fonte: Autoria própria.

Figura 15 – Resposta ao degrau em Mach 0,7 através o controle ótimo



Fonte: Autoria própria.

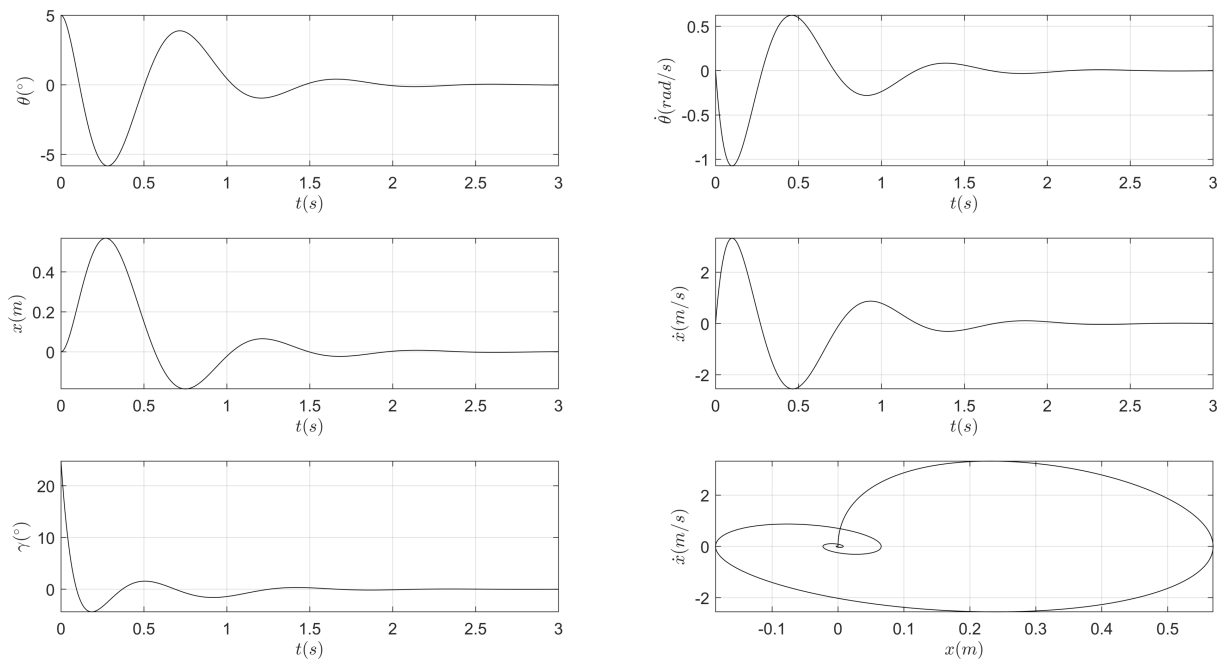
Figura 16 – Diagrama de Bode em Mach 0,7 através do controle ótimo



Fonte: Autoria própria.

m/s. O ângulo θ máximo é $5,82^\circ$ e um $\dot{\theta}$ máximo de $1,07$ rad/s. O tempo de acomodação da perturbação é de $1,75$ segundos.

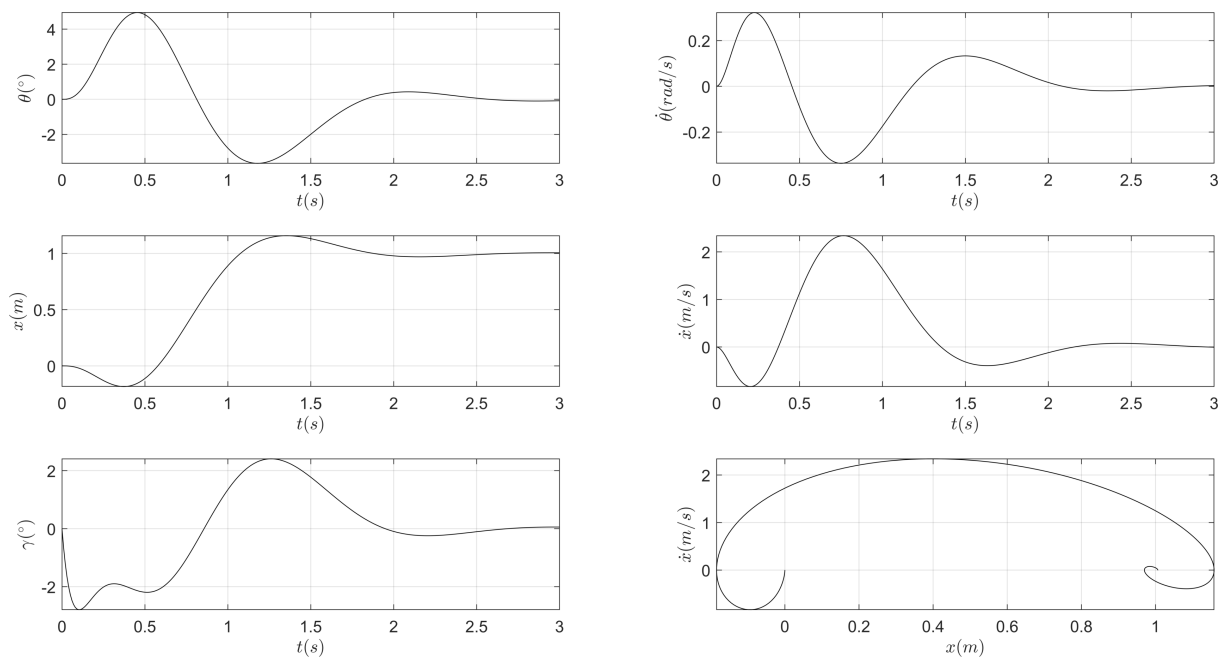
Figura 17 – Resposta a perturbação de 5° em Mach 0,7 através da alocação de polos



Fonte: Autoria própria.

A Figura 18 mostra a resposta ao degrau no qual o γ máximo é de $2,8^\circ$. A velocidade máxima horizontal é de $2,34$ m/s. O ângulo θ máximo é 5° e um $\dot{\theta}$ máximo de $0,33$ rad/s. O tempo de acomodação da é de $1,8$ segundos.

Figura 18 – Resposta ao degrau em Mach 0,7 através da alocação de polos



Fonte: Autoria própria.

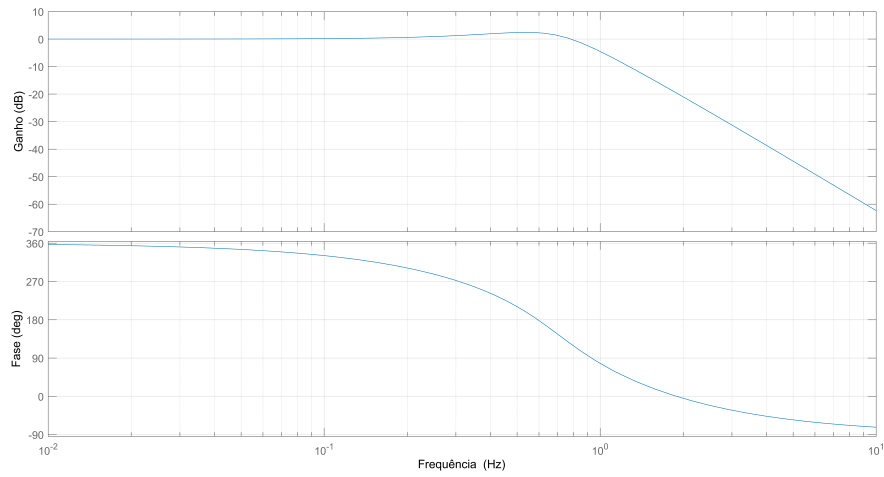
O diagrama de Bode pode ser visto na Figura 19 e a frequência de corte em -3 dB é de aproximadamente em $0,93$ Hz, frequência muito abaixo do requisito especificado. Outro fato relevante sobre esse diagrama de bode é que entre 0 Hz e $0,78$ Hz o ganho do sistema é maior que 0 dB com um máximo de $2,44$ dB em $0,53$ Hz. O ideal é que o além do requisito de frequência de corte, o sistema deve ter alguma atenuação em todas as frequências para não ocorrer nenhuma realimentação que possa destruir o sistema.

6.2.2 Comparação entre controladores em Mach 2,0

6.2.2.1 Controle ótimo

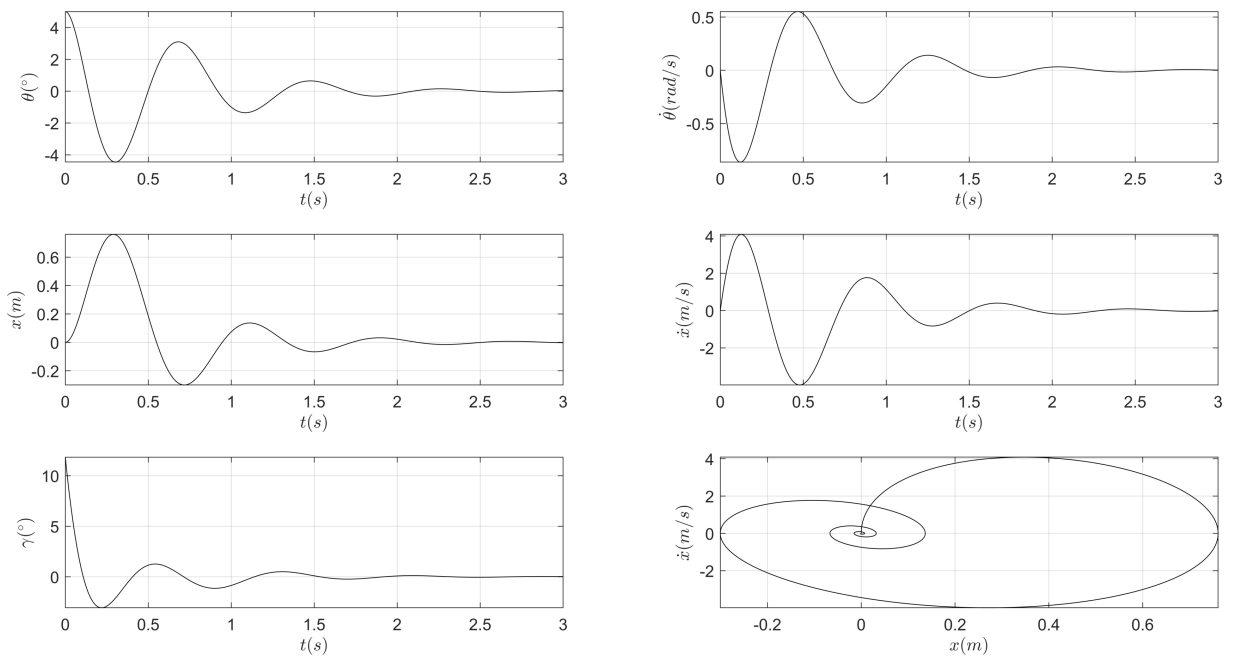
Em Mach 2, têm-se a resposta a perturbação na Figura 20, que mostra um γ máximo de $11,84^\circ$. Os deslocamentos e velocidades horizontais são satisfatórios mediante aos limites impostos através da regra de Bryson. As variações de θ e $\dot{\theta}$ também são satisfatórias, em razão do máximo ter o valor de $4,45^\circ$ em θ e de $0,86$ rad/s aproximadamente em $\dot{\theta}$. O tempo de acomodação da saída do sistema em 2% é de aproximadamente 2 segundos, no limite do requisito máximo.

Figura 19 – Diagrama de Bode em Mach 0,7 através da alocação de polos



Fonte: Autoria própria.

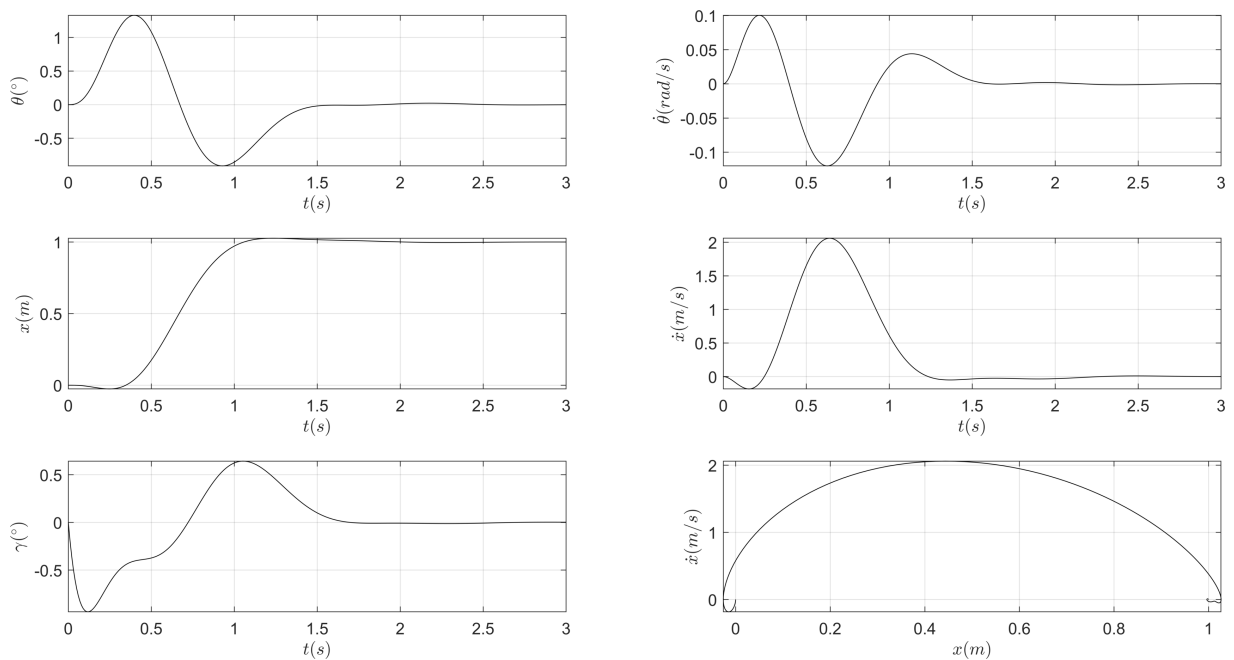
Figura 20 – Resposta a perturbação de 5° em Mach 2 através do controle ótimo



Fonte: Autoria própria.

Já na Figura 21, têm-se a resposta a impulso unitário que mostra um γ máximo de $0,93^\circ$. Os deslocamentos e velocidades horizontais também são satisfatórios mediante aos limites impostos pela regra de Bryson. As variações de θ e $\dot{\theta}$ também são satisfatórias, de forma que o máximo é de $1,33^\circ$ em θ e de $0,12$ rad/s aproximadamente em $\dot{\theta}$. O tempo de acomodação da saída do sistema em 2% é de aproximadamente 1,02 segundos.

Figura 21 – Resposta ao degrau em Mach 2 através do controle ótimo



Fonte: Autoria própria.

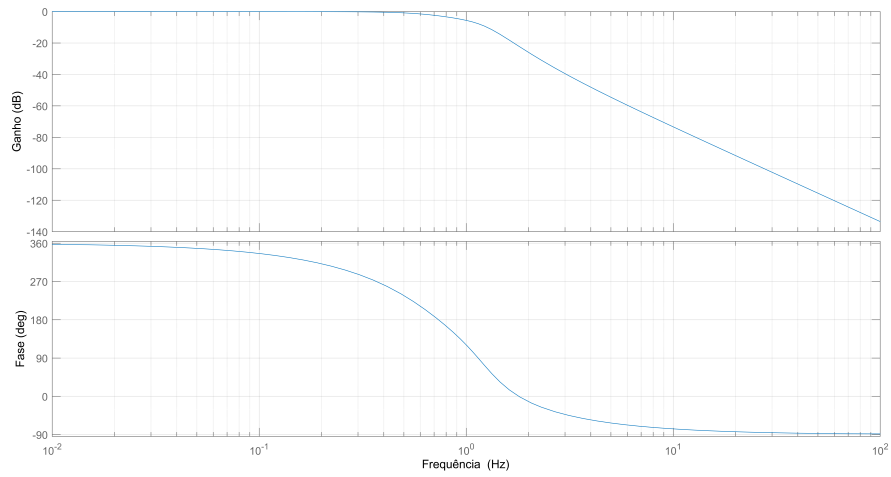
O diagrama de Bode pode ser visto na Figura 22 e a frequência de corte em -3dB é de aproximadamente em 0,76 Hz, frequência muito abaixo do requisito especificado.

6.2.2.2 Alocação de Polos

Seguindo adiante no controlador por alocação de polos, a Figura 23 mostra a resposta a perturbação no qual o γ máximo é de $11,46^\circ$. Os deslocamentos máximos na horizontal é de 0,81 metros e a velocidade máxima é de 3,68 m/s. O ângulo θ máximo é os 5° da condição inicial e um $\dot{\theta}$ máximo de 0,68 rad/s. O tempo de acomodação da perturbação é de 1,79 segundos.

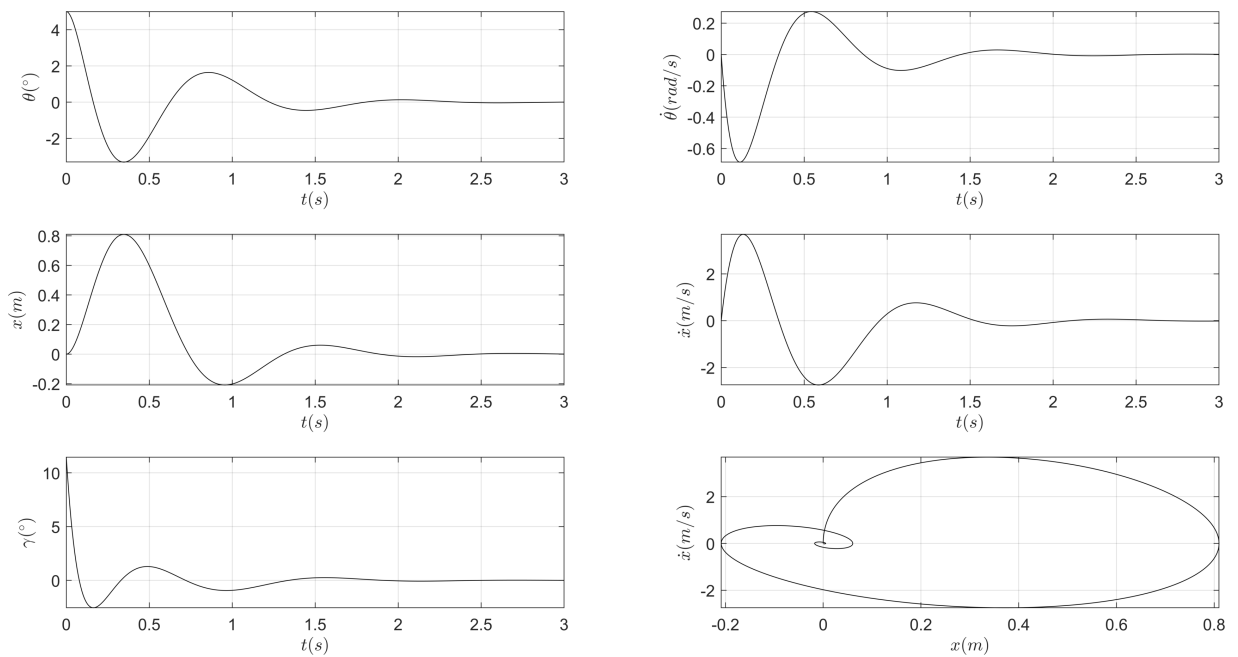
A Figura 24 mostra a resposta ao degrau no qual o γ máximo é de $0,5^\circ$. A velocidade máxima horizontal é de 1,52 m/s. O ângulo θ máximo é $0,85^\circ$ e um $\dot{\theta}$ máximo de 0,054 rad/s. O tempo de acomodação da perturbação é de 1,8 segundos.

Figura 22 – Diagrama de Bode em Mach 2 através do controle ótimo



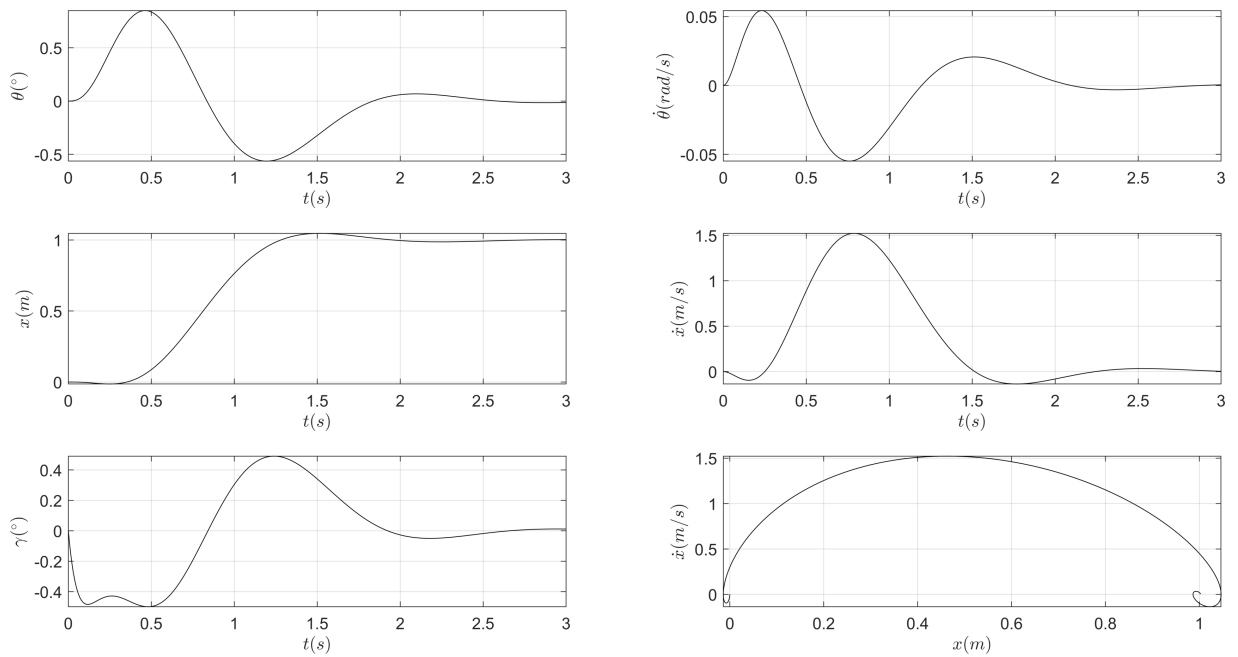
Fonte: Autoria própria.

Figura 23 – Resposta a perturbação de 5° em Mach 2 através da alocação de polos



Fonte: Autoria própria.

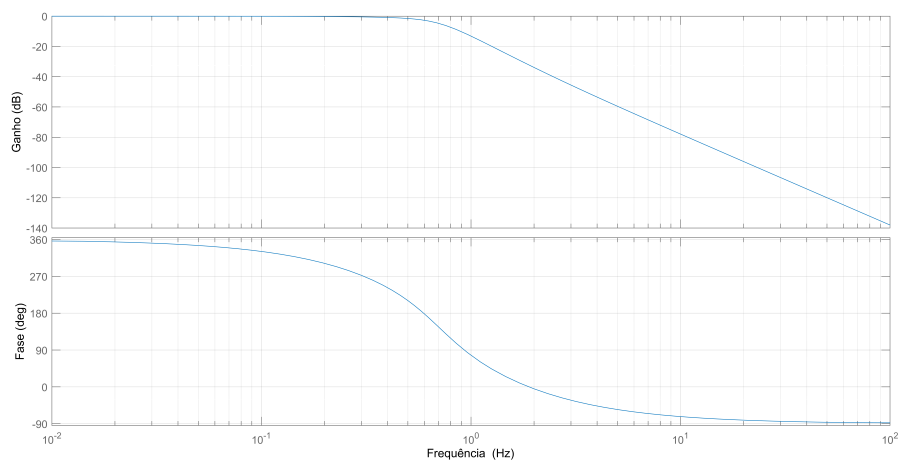
Figura 24 – Resposta ao degrau em Mach 2 através da alocação de polos



Fonte: Autoria própria.

O diagrama de Bode pode ser visto na Figura 25 e a frequência de corte em -3dB é de aproximadamente em 0,61Hz, frequência muito abaixo do requisito especificado.

Figura 25 – Diagrama de Bode em Mach 2 através da alocação de polos



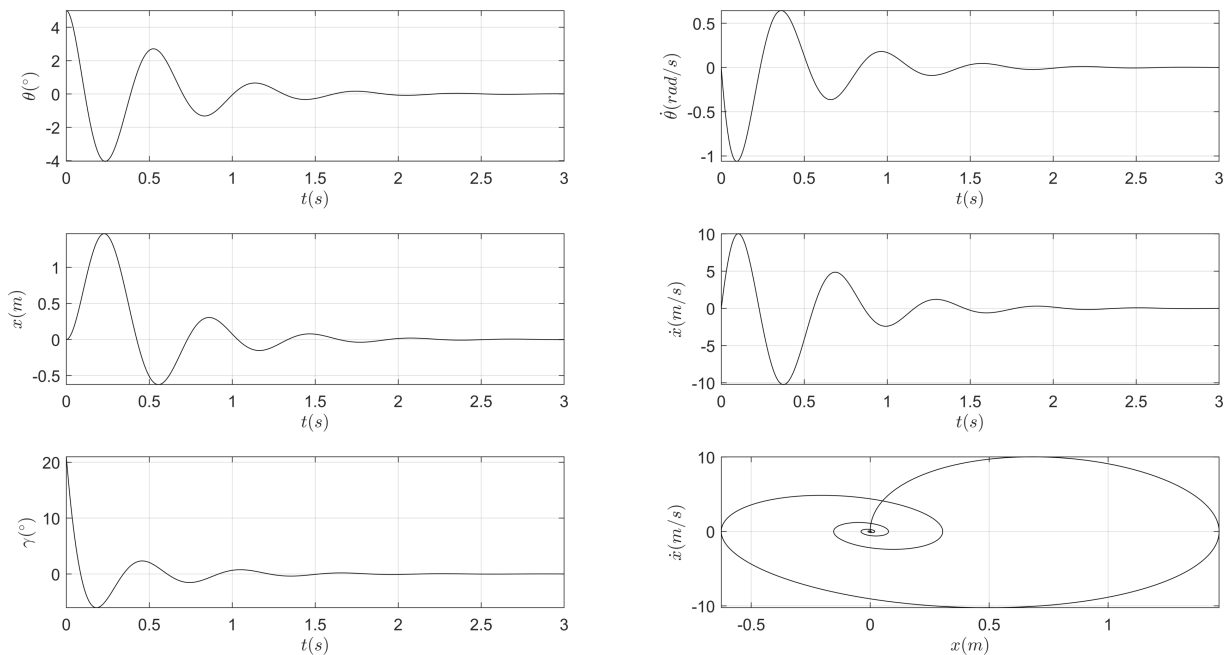
Fonte: Autoria própria.

6.2.3 Comparação entre controladores em Mach 5,0

6.2.3.1 Controle ótimo

Em Mach 5, têm-se a resposta a perturbação na Figura 26, que mostra um γ máximo de $18,7^\circ$. Apesar do deslocamento máximo ser em 1,4 metros, que supera a máxima distância admitida na regra de Bryson, como o deslocamento não foi tido como requisito de aceitação, esse desempenho é aceitável. As variações de θ e $\dot{\theta}$ também são satisfatórias, pois o máximo é de 4° em θ e de $1,06$ rad/s aproximadamente em $\dot{\theta}$. O tempo de acomodação da saída do sistema em 2% é de aproximadamente 1,87 segundos, próximo do limite do requisito máximo de 2 segundos.

Figura 26 – Resposta a perturbação de 5° em Mach 5 através do controle ótimo

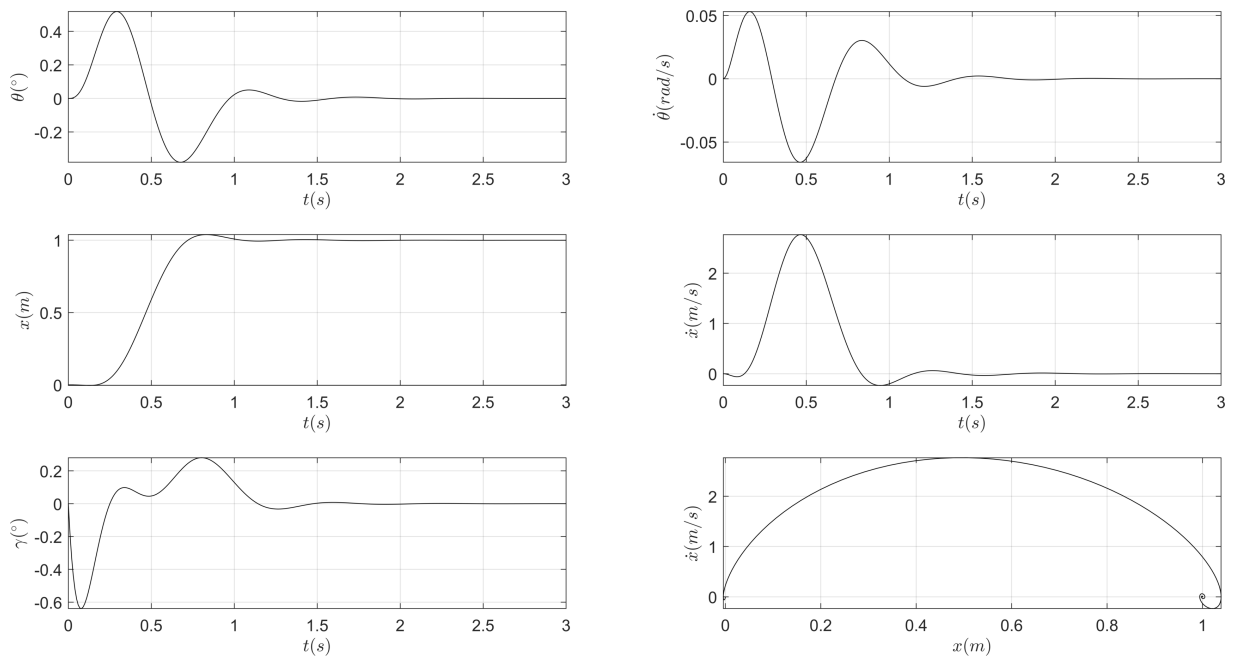


Fonte: Autoria própria.

Já na Figura 27, têm-se a resposta a impulso unitário que mostra um γ máximo de $0,64^\circ$. Os deslocamentos e velocidades horizontais também são satisfatórios mediante aos limites impostos. As variações de θ e $\dot{\theta}$ também são satisfatórias, uma vez que o máximo é de $0,52^\circ$ em θ e de $0,06$ rad/s aproximadamente em $\dot{\theta}$. O tempo de acomodação da saída do sistema em 2% é de aproximadamente 0,96 segundos.

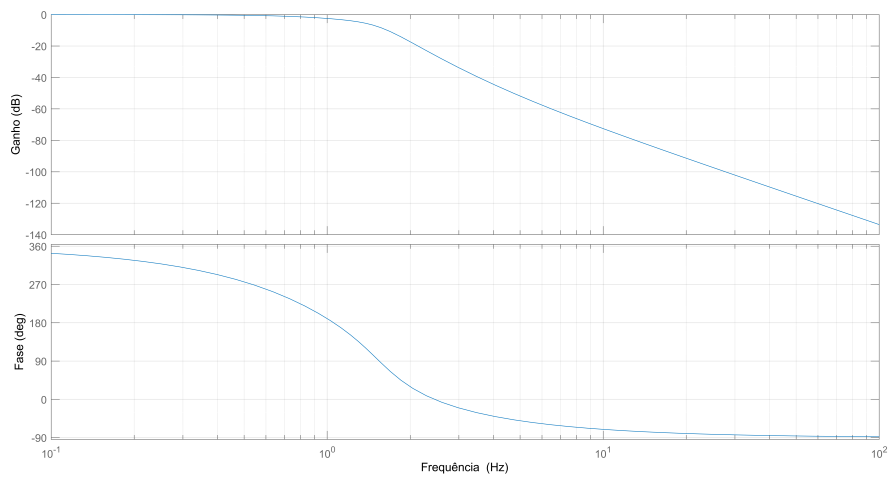
O diagrama de Bode pode ser visto na Figura 28 e a frequência de corte em -3dB é de aproximadamente em 1,08 Hz, frequência muito abaixo do requisito especificado.

Figura 27 – Resposta ao degrau em Mach 5 através do controle ótimo



Fonte: Autoria própria.

Figura 28 – Diagrama de Bode em Mach 5 através do controle ótimo

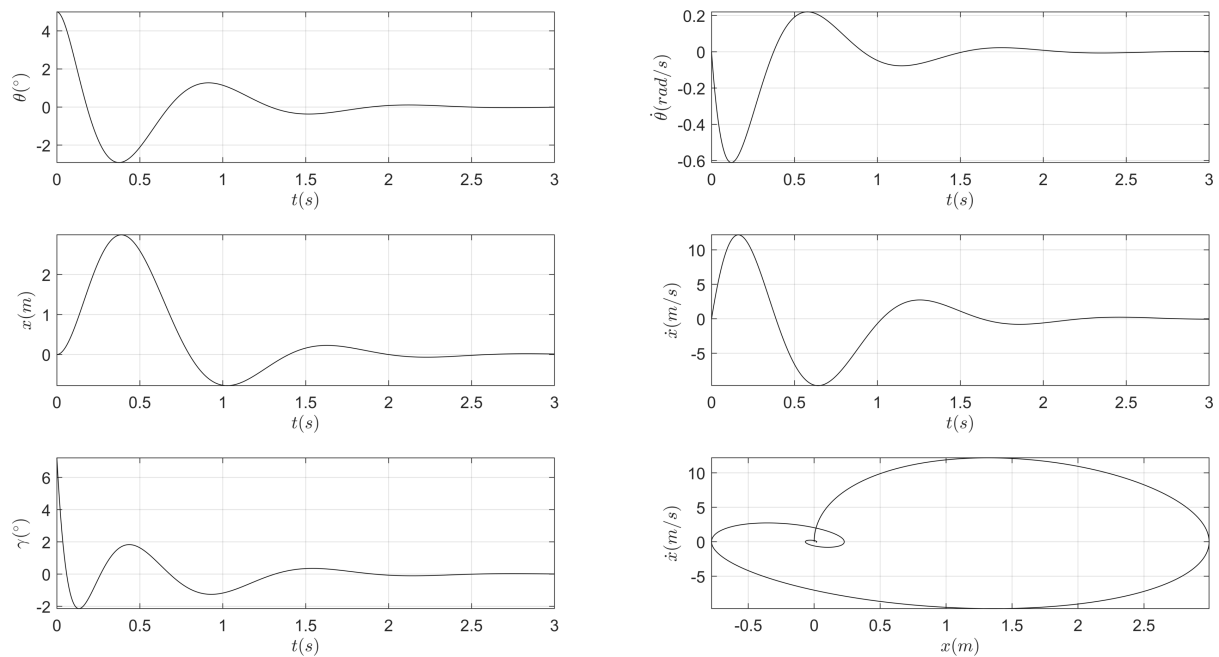


Fonte: Autoria própria.

6.2.3.2 Alocação de polos

A Figura 29 mostra a resposta a perturbação no qual o γ máximo é de $7,21^\circ$. Os deslocamentos máximos na horizontal é de 3 metros e a velocidade máxima é de 3,68 m/s. O ângulo θ máximo é os 5° da condição inicial e um $\dot{\theta}$ máximo de 0,61 rad/s. O tempo de acomodação da perturbação é de 2,5 segundos, valor acima do requisito especificado.

Figura 29 – Resposta a perturbação de 5° em Mach 5 através da alocação de polos



Fonte: Autoria própria.

A Figura 30 mostra a resposta ao degrau no qual o γ máximo é de $0,14^\circ$. A velocidade máxima horizontal é de 1,4 m/s. O ângulo θ máximo é $0,17^\circ$ e um $\dot{\theta}$ máximo de 0,01 rad/s. O tempo de acomodação da perturbação é de 1,77 segundos.

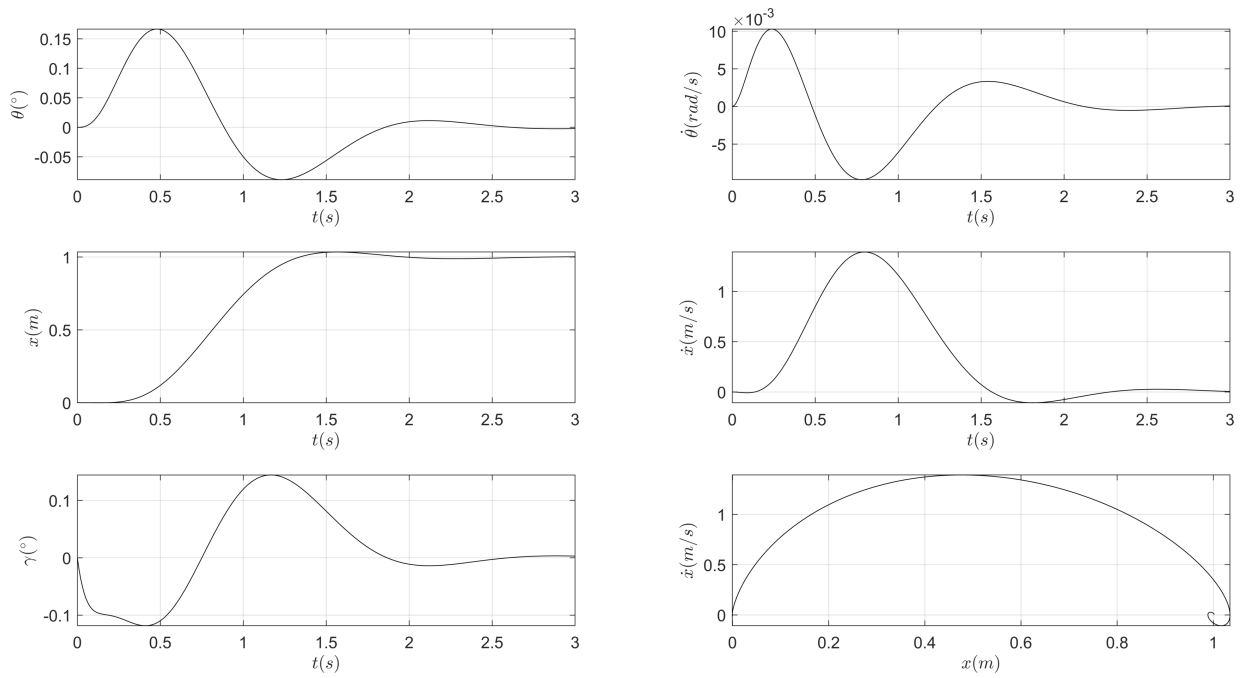
O diagrama de Bode pode ser visto na Figura 31 e a frequência de corte em -3dB é de aproximadamente em 0,55Hz, frequência muito abaixo do requisito especificado.

6.2.4 Resumo do desempenho entre métodos de controle

Pode-se ver na Tabela 7, um resumo entre as características dos sistema com os controladores ótimos (CO) e por alocação de polos (AP). O controle ótimo atendeu majoritariamente melhor aos requisitos, principalmente por não superar nenhum deles ao contrário a alocação de polos.

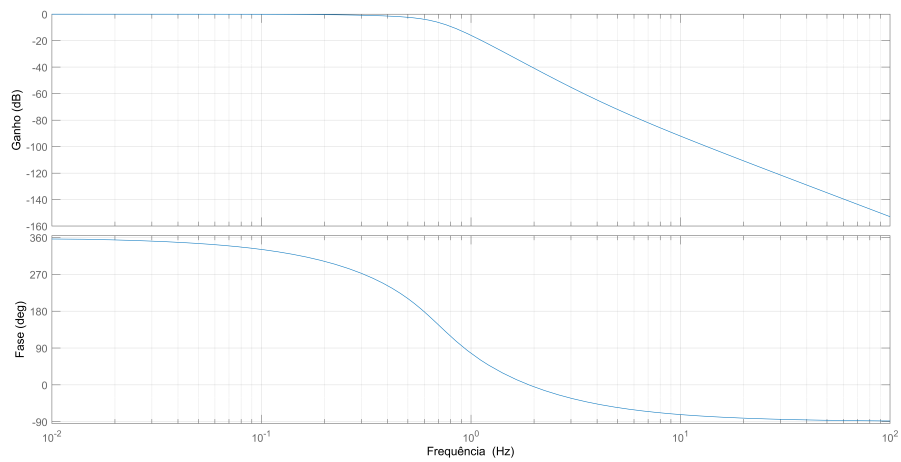
Entretanto observa-se que a performance do controlador por alocação de polos foi superior no tempo de acomodação na resposta a perturbação em Mach 0,7 e Mach 2, em

Figura 30 – Resposta ao degrau em Mach 5 através da alocação de polos



Fonte: Autoria própria.

Figura 31 – Diagrama de Bode em Mach 5 através da alocação de polos



Fonte: Autoria própria.

Tabela 7 – Comparação entre métodos de controle

	Mach 0,7		Mach 2,0		Mach 5,0	
	CO	AP	CO	AP	CO	AP
Resposta a perturbação						
Tempo de acomodação (s)	1,90	1,75	2,00	1,79	1,87	2,50
γ máximo ($^{\circ}$)	9,42	24,77	11,84	11,46	18,7	7,21
θ máximo ($^{\circ}$)	5,60	5,82	4,45	5,00	4,00	5,00
Deslocamento máximo (m)	0,58	0,57	0,76	0,81	1,40	3,00
Resposta ao degrau						
Tempo de acomodação (s)	1,79	1,80	1,02	1,80	0,96	1,77
γ máximo ($^{\circ}$)	1,56	2,80	0,93	0,50	0,64	0,14
θ máximo ($^{\circ}$)	3,00	5,00	1,33	0,85	0,52	0,17

Fonte: Autoria própria.

γ máximo de Mach 2 e Mach 5 e finalmente em θ onde também se revela melhor que o controle ótimo em Mach 2 e Mach 5 da resposta ao degrau.

Explica-se a alta ação de controle, representada por altos ângulos γ iniciais, como uma alta rejeição a perturbações uma vez que com um mínimo de desvio, o sistema logo procura se estabilizar. Também observa-se que apesar das forças aerodinâmicas instabilizarem o sistema e crescerem com a velocidade, as características de desempenho da resposta ao degrau melhoram, no qual parece que como o sistema parte do equilíbrio e encaminha para o equilíbrio, o controlador busca utilizar as forças aerodinâmicas a seu favor.

6.3 Mapa de polos admissíveis

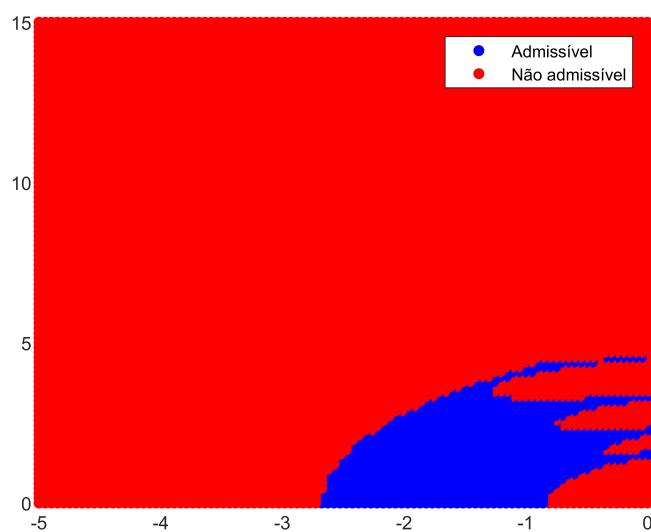
O mapa de polos admissíveis foi construído, como mencionado anteriormente, ao iterar através de vários polos dominantes do sistema e em cada iteração, avaliar se os requisitos de desempenho são atendidos, com a inclusão do requisito de restrição ao movimento lateral, no qual o sistema deve se ater em um espaço de 5 metros, ou seja, 2,5 metros para a esquerda e para a direita partindo do meio.

Essa abordagem é relevante pois todo sistema físico real está sujeito a incertezas, logo sabendo dessas incertezas, os polos alocados se tornarão uma densidade de polos contidos no plano complexo. Ao cruzar o mapa dos polos admissíveis com a densidade de polos possíveis do sistema dadas as incertezas, é possível os polos a serem alocados que maximizem a probabilidade de que o sistema real atenda aos requisitos de desempenho especificados e confira uma alta robustez ao controlador (ADAMSON et al., 2019).

As Figuras 32, 33 e 33 mostram o mapa simulado em Mach 0,7, 2 e 5 respectivamente, que é interpretado como um plano de Argand-Gauss, onde os pontos azuis são os polos que atendem os requisitos de desempenho e os vermelhos são os que não atendem. Pode-se

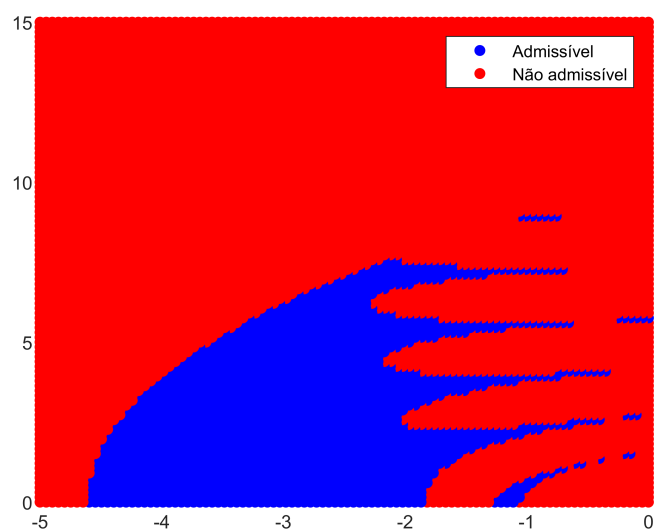
comparar os resultados da Seção 6.2 com os mapas gerados, onde vê-se que os polos $-2,0143 \pm 3,9318i$ só são admissíveis no mapa de Mach 2. Os polos ideais para cada velocidade estariam no meio da zona admissível, como em $-1 \pm 2i$ em Mach 0,7, $-3 \pm 2i$ em Mach 2 e $-3 \pm 2i$ em Mach 5. O fato da zona admissível se mover consideravelmente com a velocidade indica que o ideal é desenvolver um controlador que varie com a velocidade para atender os requisitos.

Figura 32 – Mapa de polos admissíveis em Mach 0,7



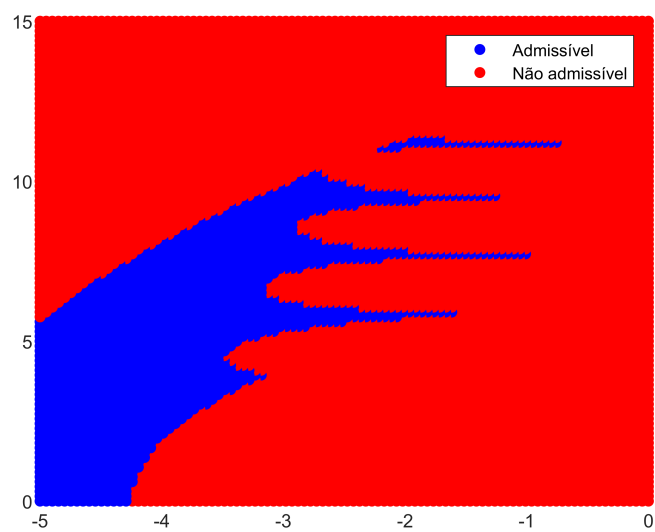
Fonte: Autoria própria.

Figura 33 – Mapa de polos admissíveis em Mach 2



Fonte: Autoria própria.

Figura 34 – Mapa de polos admissíveis em Mach 5



Fonte: Autoria própria.

7 Conclusão

Neste trabalho apresentou-se o estudo, modelagem e simulação linear de um pêndulo invertido submetido a forças aerodinâmicas utilizando o controle no espaço de estado e foi analisado a resposta dos controladores a perturbação de 5° e a resposta ao degrau.

Os resultados apontam que o controle ótimo tende a desempenhar melhor mediante a variação de velocidade incidente, principalmente em razão da liberdade que esse controlador tem em alocar todos os cinco autovalores do sistema, ao passo que a abordagem da alocação de polos está limitada a dois.

Pode-se observar que a inércia do pêndulo é uma variável relevante pois pode admitir valores ordens de grandeza superiores as outras variáveis, e isso pode apresentar algum tipo de empecilho caso haja aplicação desse trabalho a foguetes de grandes dimensões.

Outro fato intrínseco da dinâmica que impede uma melhor performance do sistema, é a forma que o empuxo atua no pêndulo, que ao invés de contribuir diretamente no movimento translacional ou rotacional, atua somente na reação de apoio do pêndulo.

Uma característica que não foi considerada no modelo, pela complexidade que adiciona ao trabalho, é o fato que o atuador não tem uma resposta instantânea, mas sim uma resposta retardada em relação à um sinal de entrada. Um efeito que uma resposta não instantânea do atuador pode provocar, é o aumento da banda de passagem em -3dB , podendo assim, não atenuar as frequências características em um foguete.

Pode-se concluir nesse trabalho que se é possível controlar um foguete em ascensão através do direcionamento de empuxo mesmo com geometrias instáveis e altas perturbações. A relevância desse trabalho se dá pelo estudo preliminar e embrionário da recuperação automática de foguetes, que atualmente no Brasil os recupera através de paraquedas e assim, com o seguimento desse trabalho, pode-se deixar o país mais competitivo no mercado aeroespacial.

8 Sugestão para trabalhos futuros

Ao longo deste trabalho, foram abordados diversos tópicos suficientemente relevantes para um devido aprofundamento. Portanto, como forma de promover o desenvolvimento científico e tecnológico, algumas sugestões para futuros trabalhos são:

- Simulação dos controladores na dinâmica não-linear.
- Avaliação do desempenho de outros tipos de controladores no sistema desenvolvido.
- Estudo do controle não-linear para determinação de perturbações impossíveis de serem reguladas.
- Inserção de uma dinâmica de segunda ordem no atuador.
- Implementação de sistema com mais graus de liberdade e de massa variável.
- Cálculos CFD e análise modal para um modelo aeroelástico mais acurado.

Referências

- ADAMSON, L. et al. Pole placement in uncertain dynamic systems by variance minimisation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 127, p. 290–305, 2019. ISSN 0888-3270. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327019301608>>. Citado na página 56.
- ALMEIDA, O. d. et al. Low Subsonic Wind Tunnel - Design and Construction. *Journal of Aerospace Technology and Management*, scielo, v. 10, 00 2018. ISSN 2175-9146. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2175-91462018000100200&nrm=iso>. Citado na página 24.
- ANDERSON, J. D. *Computational Fluid Dynamics*. McGraw-Hill Education, 1995. (Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=dJceAQAIAAJ>>. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.
- ANDERSON, J. D. *Hypersonic and High-temperature Gas Dynamics*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2006. (AIAA education series). ISBN 9781563477805. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=UgWmQgAACAAJ>>. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.
- ANDERSON, J. D. *Fundamentals of Aerodynamics*. [S.l.]: McGraw-Hill, 2011. ISBN 978-0-07-339810-5. Citado 3 vezes nas páginas 17, 18 e 19.
- BARATCHART, L.; CHYBA, M.; POMET, J.-B. A grobman–hartman theorem for control systems. *Journal of dynamics and differential equations*, Springer, v. 19, n. 1, p. 75–107, 2007. Citado na página 29.
- BARROWMAN, J. The practical calculation of the aerodynamic characteristics of slender finned vehicles. National Aeronautics and Space Administration, 1967. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 39.
- BENNETT, S. A brief history of automatic control. *IEEE Control Systems Magazine*, v. 16, n. 3, p. 17–25, 1996. Citado na página 13.
- BIKLE, P. F. *Aerodynamic Characteristics of Supersonic-Hypersonic Flight*. 1964. Disponível em: <<https://history.nasa.gov/SP-60/ch-5.html>>. Citado na página 20.
- BUCKINGHAM, E. On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 4, p. 345–376, Oct 1914. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.4.345>>. Citado na página 18.
- FEDARAVIČIUS, A. et al. Analysis of aerodynamic characteristics of the rocket-target for the „stinger” system. *Problemy Mechatroniki : uzbrojenie, lotnictwo, inżynieria bezpieczeństwa*, Vol. 7, Nr 1 (23), p. 7–16, 2016. Opracowanie ze środków MNiSW w ramach umowy 812/P-DUN/2016 na działalność upowszechniającą naukę. Citado na página 17.

FRANK, S. A. *Control theory tutorial: basic concepts illustrated by software examples*. Zenodo, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.5281/zenodo.1043922>>. Citado 3 vezes nas páginas 26, 27 e 29.

GREENSHIELDS, C. J.; REESE, J. M. Rarefied hypersonic flow simulations using the navier–stokes equations with non-equilibrium boundary conditions. *Progress in Aerospace Sciences*, v. 52, p. 80 – 87, 2012. ISSN 0376-0421. Applied Computational Aerodynamics and High Performance Computing in the UK. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0376042111000601>>. Citado na página 22.

HOAG, D. G. *APOLLO NAVIGATION, GUIDANCE, AND CONTROL SYSTEMS: A PROGRESS REPORT*. 1969. Disponível em: <<https://web.mit.edu/digitalapollo/Documents/Chapter6/hoagprogreport.pdf>>. Citado na página 13.

KALMAN, R. On the general theory of control systems. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 1, n. 1, p. 491 – 502, 1960. ISSN 1474-6670. 1st International IFAC Congress on Automatic and Remote Control, Moscow, USSR, 1960. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667017700948>>. Citado na página 28.

KALMAN, R. E. When Is a Linear Control System Optimal? *Journal of Basic Engineering*, v. 86, n. 1, p. 51–60, 03 1964. ISSN 0021-9223. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3653115>>. Citado na página 33.

LANGENHOP, C. E. On the stabilization of linear systems. *Proceedings of the American Mathematical Society*, American Mathematical Society, v. 15, n. 5, p. 735–742, 1964. ISSN 00029939, 10886826. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2034589>>. Citado na página 32.

MARION, J. B. *Classical dynamics of particles and systems*. [S.l.]: Academic Press, 2013. Citado na página 16.

MAURICE, A. F. Aerodynamic performance predictions of a sa-2 missile using missile datcom. 2009. Disponível em: <<https://calhoun.nps.edu/handle/10945/4578>>. Citado na página 24.

MCLEAN, D. Control of spacecraft and aircraft. *Aeronautical Journal*, v. 99, p. 76–76, 1995. Citado na página 34.

MORGAN, K. The finite element method: A first approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 17, n. 2, p. 309–309, 1981. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1620170215>>. Citado na página 23.

OGATA, K. *Modern Control Engineering*. Prentice Hall, 2010. (Instrumentation and controls series). ISBN 9780136156734. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=Wu5GpNAelzkC>>. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 31.

ROUTH, E. *A Treatise on the Stability of a Given State of Motion: Particularly Steady Motion*. Macmillan and Company, 1877. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=xLQEAAAAYAAJ>>. Citado na página 28.

- SCALABRIN, L. C. et al. Three dimensional flow simulations with the finite element technique over a multi-stage rocket. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, scielo, v. 26, p. 107 – 116, 06 2004. ISSN 1678-5878. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1678-58782004000200001&nrm=iso>. Citado na página 23.
- SELDING, P. B. de. *SpaceX's reusable Falcon 9: What are the real cost savings for customers?* 2016. Disponível em: <<https://spacenews.com/spacexs-reusable-falcon-9-what-are-the-real-cost-savings-for-customers/>>. Citado na página 13.
- SIOURIS, G. M. *Missile guidance and control systems*. Springer-Verlag New York, Inc., 2004. ISBN 978-0-387-00726-7. Disponível em: <<https://link.springer.com/book/10.1007/b97614>>. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.
- SUTTON, O. B. G. P. *Rocket Propulsion Elements*. JOHN WILEY, INC., 2001. ISBN 0-471-32642-9. Disponível em: <http://mae-nas.eng.usu.edu/MAE_5540_Web/propulsion_systems/subpages/Rocket_Propulsion_Elements.pdf>. Citado na página 13.
- VASEK, D.; POLACEK, J.; KONECNY, P. Improved estimation of air-to-air missile aerodynamic characteristics with using cfd method. *Advances in Military Technology*, v. 15, n. 2, 2020. Citado na página 41.
- VUKELICH, S. R. et al. *Missile DATCOM. Volume 1*. [S.l.], 1988. Citado na página 24.
- WIE WEI DU, M. W. B. Analysis and design of launch vehicle flight control systems. In: _____. *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*. [s.n.], 2008. Disponível em: <<https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2008-6291>>. Citado na página 36.
- WILLEMS, S. M. J. Controllability, observability, pole allocation, and state reconstruction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 16, n. 6, p. 582–595, 1971. Citado na página 32.
- WU, L.; XIE, C.; YANG, C. Aeroelastic stability of a slender missile with constant thrust. *Procedia Engineering*, v. 31, p. 128–135, 2012. ISSN 1877-7058. International Conference on Advances in Computational Modeling and Simulation. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877705812010260>>. Citado na página 38.