INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Bacharelado em Matemática

Cayo Leitão Costa

Álgebras de Boole e a Dualidade de Stone

São Paulo

2º Semestre de 2023

Cayo Leitão Costa

Álgebras de Boole e a Dualidade de Stone

Monografia apresentada à disciplina
MAT–0148 — Introdução ao Trabalho Científico,
Departamento de Matemática,
Instituto de Matemática e Estatística,
Universidade de São Paulo.

Área de Concentração: TEORIA DOS CONJUNTOS

Orientadora: Profª Dra. Christina Brech – USP

São Paulo

2º Semestre de 2023

Ficha catalográfica elaborada com dados inseridos pelo autor
Biblioteca Carlos Benjamin de Lyra
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

Leitão Costa, Cayo
Algebras de Boole e a Dualidade de Stone / Cayo Leitão Costa; orientadora, Christina Brech. - São Paulo, 2023.
164 p.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Matemática / Instituto de Matemática e Estatística / Universidade de São Paulo.
Bibliografia

1. Álgebras de Boole. 2. Representação de Stone. 3. Dualidade de Stone. 4. Estruturas livres. 5. Espaços de Parovičenko. I. Brech, Christina. II. Título.

Bibliotecárias do Serviço de Informação e Biblioteca
Carlos Benjamin de Lyra do IME-USP, responsáveis pela
estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Maria Lúcia Ribeiro CRB-8/2766; Stela do Nascimento Madruga CRB 8/7534.

Folha de Avaliação

Aluno: Cayo Leitão Costa

Título: Álgebras de Boole e a Dualidade de Stone

Data: 2º Semestre de 2023

Banca Examinadora

Profª Dra. Christina Brech – USP (Orientadora)

Profª Dra. Lucia Renato Junqueira – USP

Profº Dr. Renan Maneli Mezabarba – UESC

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu pai e a minha mãe. Devo a eles minha vida, criação e educação e também todo o conforto e a estabilidade necessários para um estudo tranquilo.

Agradeço a minha irmã que sempre foi uma amiga paciente e que me forneceu caronas frequentes, tornando o instituto mais perto da minha casa.

Agradeço aos meus amigos de infância, Leandro Adriano dos Santos e Karine Queiroz Bandini, por nunca cansarem de mim e por sempre gentilmente me lembrar que existem coisas além da matemática.

Agradeço aos meus colegas de instituto Christian Kendi Kohatsu Tanigava, Murilo Falcirolli Amorim, Luccas Nunes Guth e Mateus Lopes Pedra, que me ensinaram que matemática é uma arte coletiva com a capacidade de unir pessoas.

Agradeço a minha colega de curso Anny Beatriz Silva de Azevedo, não apenas por ouvir minhas frequentes divagações matemáticas sem rumo, pelas incontáveis horas de estudo comigo, pelas críticas bem fundados e pelos conselhos bem intencionados que sempre foram úteis, mas também por ser uma incrível amiga.

Agradeço especialmente a minha amiga e namorada Mariana Moraes Cardoso, quem me incentivou a estudar matemática e entrar no curso, por toda a força, dedicação, paciência e principalmente pelo amor concedido mesmo entre os nervosismos e a falta de tempo que este projeto gerou.

Agradeço a minha orientadora Christina Brech, pela sua paciência, tempo, inspiração e por sempre oferecer novas visões da matemática e do mundo.

Agradeço aos funcionários do IME-USP e da Biblioteca Carlos Benjamin de Lyra por seus serviços.

Por fim, agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo financiamento através do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC).

"A cardinal principle of modern mathematical research may be stated as a maxim: One must always topologize."

Marshall Harvey Stone

Resumo

LEITÃO COSTA, C. **Álgebras de Boole e a Dualidade de Stone**. 2023. 164 p. Monografia (Bacharelado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2º Semestre de 2023.

Esta monografia tem como objetivo principal motivar, demonstrar e aplicar a dualidade de Stone em uma linguagem matemática voltada para aqueles já familiarizados com conceitos básicos da teoria dos conjuntos e com estruturas algébricas.

Álgebras de Boole são estruturas algébricas introduzidas inicialmente por George Boole em 1854, que buscava descrever axiomaticamente a teoria de lógica proposicional clássica. No século seguinte, os estudos de Henry Maurice Sheffer, Adolf Lindenbaum e Alfred Tarski estabeleram concretamente álgebras de Boole como parte de teoria de lógica e reticulados.

Porém foi com o trabalho de Marshall Harvey Stone que álgebras de Boole se tornaram relevantes para um público maior de matemáticos. Em 1936, Stone publicou o primeiro resultado do que hoje denominamos dualidade de Stone, estabeleceu uma relação de caráter categórico entre álgebra abstrata e topologia conjuntista.

A maior parte das definições e notações deste texto provêm da obra *Handbook of Boolean Algebras, Volume 1* de Sabine Koppelberg, enquanto as discussões históricas da importância da teoria se devem principalmente à introdução do livro *Stone Spaces* de Peter. T. Johnstone. Outras referências serão indicadas quando se tornarem mais relevantes.

O texto em si é dividido em quatro capítulos. O primeiro estabelece a fundação da teoria, trazendo os conceitos e teoremas essenciais que serão utilizados ao longo do texto. O segundo capítulo traz as demonstrações clássicas da dualidade de Stone, com ênfase em como o resultado poderia ser naturalmente descoberto. O terceiro capítulo se trata de como algumas construções usuais de álgebras de Boole interagem com a dualidade de Stone. Por fim, o quarto capítulo traz algumas aplicações da dualidade em topologia e teoria dos conjuntos.

Palavras-chave: álgebras de Boole, representação de Stone, dualidade de Stone.

Abstract

LEITÃO COSTA, C. **Boolean Algebras and Stone's Duality**. 2023. 164 p. Monografia (Bacharelado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2º Semestre de 2023.

This monograph's main objective is to motivate, demonstrate and apply Stone's duality in a mathematical language aimed at those already familiar with basic concepts of set theory and with algebraic structures.

Boolean algebras are algebraic structures initially introduced by George Boole in 1854, which sought to axiomatically describe the theory of classical propositional logic. In the following century, studies by Henry Maurice Sheffer, Adolf Lindenbaum and Alfred Tarski concretely established Boolean algebras as part of logic theory and lattice theory.

However, it was with the work of Marshall Harvey Stone that Boolean algebras became relevant to a wider audience of mathematicians. In 1936, Stone published the first result of what we now call the Stone duality, establishing a categorical relationship between abstract algebra and point-set topology.

Most of the definitions and notations in this text come from the *Handbook of Boolean Algebras, Volume 1* by Sabine Koppelberg, while the historical discussions of the importance of the theory are mainly due to the introduction of the book *Stone Spaces* by Peter . T. Johnstone. Other references will be indicated when they become more relevant.

The text itself is divided into four chapters. The first establishes the foundation of the theory, bringing the essential concepts and theorems that will be used throughout the text. The second chapter presents Stone's classic demonstrations of duality, with an emphasis on how the result could be naturally discovered. The third chapter deals with how some common constructions of Boolean algebras interact with Stone duality. Finally, the fourth chapter presents some applications of the duality in topology and set theory.

Keywords: Boolean algebras, Stone representation, Stone duality.

Lista de Abreviaturas e Siglas

PIF	Propriedade da Intersecção Finita
PSE	Propriedade da Separação Enumerável
PSEF	Propriedade da Separação Enumerável Forte
CH	Hipótese do Contínuo, isto é, a suposição de que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$

Lista de Símbolos

ω	O primeiro ordinal infinito
$\aleph_0$	O cardinal infinito enumerável
$\aleph_1$	O primeiro cardinal não-enumerável
A^+	A álgebra de Boole A sem seu elemento minimal
$\mathrm{Ult}A$	O conjunto de ultrafiltros da álgebra de Boole A
$\mathrm{Clop}X$	O conjunto de abertos fechados do espaço topológico X
$\mathfrak{T}_X$	A topologia de um espaço topológico X
$\mathbb{N}$	O conjunto de números naturais
$\mathbb{Q}$	O conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$	O conjunto dos números reais

Sumário

Capítulo I

Fundamentos da álgebra booleana

Existem duas visões clássicas de álgebras de Boole: como estrutura algébrica e como ordem parcial. Cada visão tem suas vantagens e na prática usamos as duas indistinguivelmente. Assim, introduzimos ambas as visões e como elas se relacionam na seção 1, tratamos dos conceitos que são mais naturalmente provindos da teoria de ordem na seção 2 e dos provindo mais naturalmente da teoria algébrica na seção 3.

Neste capítulo, as principais referências são [Kop89] e [BS81].

1 Aritmética elementar

Naturalmente, começamos com a definição de álgebra de Boole e como suas operações se comportam. Mesmo para aqueles familiarizados com reticulados distributivos, recomendamos ler os exemplos desta seção, já que o usaremos frequentemente no resto do texto.

1.1 Definições e primeiros exemplos

Definição 1.1. Uma *álgebra de Boole* é uma estrutura $(A, +, \cdot, -, 0, 1)$ com duas operações binárias ($+$ e $\cdot$), uma operação unária ($-$) e dois elementos 0 e 1 de A na qual valem os dez axiomas a seguir para todos x, y e z elementos de A:

(B1) $x + y = y + x$

(B1′) $x \cdot y = y \cdot x$

(B2) $x + (y + z) = (x + y) + z$

(B2′) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

(B3) $x + (x \cdot y) = x$

(B3′) $x \cdot (x + y) = x$

(B4) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

(B4′) $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$

(B5) $x + (-x) = 1$

(B5′) $x \cdot (-x) = 0$

Os axiomas $(B1)$ e $(B1')$, $(B2)$ e $(B2')$, $(B3)$ e $(B3')$, $(B4)$ e $(B4')$ e $(B5)$ e $(B5')$ são denominados respectivamente propriedades comutativas, associativas, absortivas, distributivas e complementares.

Quando a estrutura estiver clara, nos referimos a álgebra de Boole simplesmente com o conjunto A, e as operações $+$,$\cdot$ e - são respectivamente denominadas soma, produto (ou multiplicação) e menos (ou complemento). Para evitar uso excessivo de parênteses, determinamos uma ordem de operações, a operação menos tem precedência sobre a operação produto, que então tem precedência sobre a operação soma. Além disso, dizemos que a álgebra tem certa cardinalidade se o conjunto A tiver tal cardinalidade.

Essa definição não é a mais sucinta possível. De fato, mostraremos que álgebras de Boole podem ser caracterizadas de forma mais simples usando ordens parciais no Teorema 1.37, mas a motivação para esta definição como dada fica justificada pelo seguinte exemplo.

Exemplo 1.2 (Álgebra das partes)**.** Seja X um conjunto e denote por $\wp(X)$ o conjuntos das partes de X, isto é, o conjunto de todos os subconjuntos de X. A estrutura $(\wp(X), \cup, \cap, ^c, \emptyset, X)$, onde $Y^c = X \setminus Y$, é uma álgebra de Boole, já que os dez axiomas da definição se tornam propriedades elementares de teoria de conjuntos. $\wp(X)$ é denominada a *álgebra das partes de* X.

Assim, com esse exemplo, a definição acima esclarece que se procura estudar as propriedades de estruturas com operações que agem como união finita, intersecção finita e complemento de conjuntos e também as funções que preservam tal estrutura, o que justifica a próxima definição.

Definição 1.3. Sejam $(A, +_A, \cdot_A, -_A, 0_A, 1_A)$ e $(B, +_B, \cdot_B, -_B, 0_B, 1_B)$ álgebras de Boole e $f : A \to B$ uma função. Dizemos que f é um *homomorfismo entre álgebras de Boole* se

$$\begin{array}{lll} f(0_A) = 0_B & f(1_A) = 1_B & \\ f(x +_A y) = x +_B y & f(x \cdot_A y) = f(x) \cdot_B f(y) & f(-_A x) = -_B f(x) \end{array}$$

para todos elementos x e y de A.

Além disso, se f for um homomorfismo injetor, sobrejetor ou bijetor, dizemos que f é respectivamente um *monomorfismo*, *epimorfismo* ou *isomorfismo*. Se existir um isomorfismo entre duas álgebras A e B, dizemos que elas são isomorfas e denotamos $A \cong B$.

Observe que, na definição anterior, as características distintas das álgebras A e B foram subscritas com suas respectivas álgebras para clareza da definição, porém quando trabalhamos com álgebras distintas, se não houver risco de confusão, vamos denotar suas operações sem o subscrito para deixar a notação e a leitura mais agradáveis.

Dado um conjunto X, dizemos que uma álgebra de Boole é uma *álgebra de conjuntos sobre* X se a soma, produto e o menos forem respectivamente a união, intersecção e o complemento de conjuntos e o elemento 1 de A for X. Dizemos simplesmente que A é uma *álgebra de conjuntos* se existir um conjunto X tal que A é uma álgebra de conjuntos sobre X.

Dizemos também que uma álgebra de conjuntos A é simplesmente uma *álgebra de partes* se existe conjunto X tal que $A = \wp(X)$.

Observação 1.4. Observe que toda álgebra de partes $\wp(X)$ depende apenas da cardinalidade de X, no sentido que se $|X| = |Y|$, então $\wp(X) \cong \wp(Y)$. De fato, se $f : X \to Y$ é uma bijeção, então é um bom exercício verificar que

$$\begin{array}{rccc} F: & \wp(X) & \to & \wp(Y) \\ & S & \mapsto & f[S] \end{array}$$

é um isomorfismo entre as álgebras.

Note que toda álgebra de partes é uma álgebra de conjuntos, porém vamos exemplificar a seguir uma álgebra de conjuntos que não é de partes.

Exemplo 1.5 (Álgebra finita-cofinita)**.** Seja X um conjunto. Dizemos que um subconjunto Y de X é dito *cofinito* (em X) se $X \smallsetminus Y$ é finito. Seja

$$A = \{Y \subseteq X \mid Y \text{ é finito ou cofinito}\}.$$

O conjunto A é uma álgebra de conjuntos, denominada *álgebra finita-cofinita sobre* X e denotada por $\mathrm{FinCofin}X$. De fato, para mostrar que A é uma álgebra de Boole, basta mostrar que ele é fechado para união e intersecção finitas, já que claramente o complemento de um finito é um cofinito e vice-versa.

Vamos analisar alguns casos. Se $a, b \in A$ são ambos finitos, então $a \cup b$ é finito. Se $a, b \in A$ e a é cofinito, então $X \smallsetminus (a \cup b)$ é um subconjunto de $X \smallsetminus a$, que é finito, logo $X \smallsetminus (a \cup b)$ é finito e $a \cup b$ cofinito. Portanto A é fechado por uniões finitas.

Agora, com A fechado por uniões finita e complementos, dados $a, b \in A$, temos que

$$a \cap b = X \smallsetminus ((X \smallsetminus a) \cup (X \smallsetminus b))$$

pertence a A, já que escrevemos $a \cap b$ em função de uniões e complementos de elementos de A.

Note que se um conjunto X é finito, então a álgebra finita-cofinita de X, coincide com a álgebra das partes de X, já que todo subconjunto de X é finito. Porém no caso em que X é infinito, essas álgebras diferem. De fato, se X é infinito, é possível escolher $\{x_n \mid n \in \omega\}$

um subconjunto enumerável de X, de modo que $\{x_{2n} \mid n \in \omega\} \in \wp(X) \smallsetminus \mathrm{FinCofin}X$ e portanto $\mathrm{FinCofin}X \subsetneq \wp(X)$.

Esse é nosso primeiro exemplo de duas álgebras distintas em que uma álgebra está contida na outra. Isto motiva a próxima definição.

Definição 1.6. Sejam $(A, +_A, \cdot_A, -_A, 0_A, 1_A)$ e $(B, +_B, \cdot_B, -_B, 0_B, 1_B)$ álgebras de Boole. Dizemos que A é uma subálgebra (de Boole) de B se $A \subseteq B$, $0_A = 0_B$, $1_A = 1_B$ e as operações $+_A, \cdot_A, -_A$ são respectivamente as operações $+_B, \cdot_B, -_B$ restritas aos elementos de A. Além disso, se A é uma subálgebra de B e $A \subsetneq B$, dizemos que A é uma subálgebra própria de B.

É imediato dessa definição que um subconjunto qualquer X de uma álgebra de Boole A é uma subálgebra de A se X contém 0, 1 e é fechado pelas operações de A. Neste caso, X é também em si uma álgebra de Boole, já que os axiomas necessários valem para todos os elementos de A, e $X \subseteq A$.

Proposição 1.7. *FinCofin$X$ é uma subálgebra de $\wp(X)$, que é própria se e somente se X é infinito. Além disso, se X tem cardinalidade infinita κ, então FinCofin$X$ também tem cardinalidade κ.*

Demonstração: Claramente $\mathrm{FinCofin}X$ é uma subálgebra de $\wp(X)$, que coincide com $\wp(X)$ se X é finito. Agora, suponha que X é infinito e sejam F e C respectivamente os conjuntos de elementos finitos e cofinitos de X. $\mathrm{FinCofin}X$ é então a união disjunta de F e C e $|F| = |C|$, já que todo finito pode ser associado a um único cofinito através do complemento em relação a X e vice-versa. O conjunto de unitários $\{\{x\} \mid x \in X\}$ constitui apenas conjuntos finitos de X, e assim está contido em F, e logo $\kappa \leq |F|$. Assim $|F|$ é infinito e $|\mathrm{FinCofin}X| = |F| + |C| = |F| + |F| = |F|$.

Por outro lado, considere, para cada n natural, $F_n = \{Y \subseteq F \mid |Y| = n\}$ o conjunto dos subconjuntos de F de cardinalidade exatamente n. Temos que

$$|F_n| \leq |\{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in F\}| = |X^n| = |X|^n = |X| = \kappa$$

e F é a união disjunta de todos os F_n, e assim

$$|F| = \left| \bigcup_{n \in \omega} F_n \right| = \sum_{n \in \omega} |F_n| \leq \sum_{n \in \omega} \kappa = \aleph_0 \cdot \kappa = \kappa.$$

Portanto $|\mathrm{FinCofin}X| = |F| = \kappa$. ∎

Corolário 1.8. *Todo cardinal infinito κ é a cardinalidade de uma álgebra de Boole.*

O análogo ao corolário acima para cardinais finitos não vale, o que será mais fácil de demonstrar quando introduzirmos álgebras relativas na subseção 2.3.

Todos os exemplos de álgebras de Boole apresentadas até agora foram álgebras de conjuntos. A seguir vamos apresentar uma álgebra de Boole que não é uma álgebra de conjuntos.

Exemplo 1.9 (Álgebra de dois elementos)**.** Considere a seguinte tabela verdade, onde V e F representam os conceitos de "Verdadeiro"e "Falso".

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg p$
V	V	V	V	F
V	F	F	V	F
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

É simples verificar que a estrutura $(\{V, F\}, \wedge, \vee, \neg, F, V)$ satisfaz os dez axiomas apresentados em 1.1 e portanto é uma álgebra de Boole.

Se $B = \{0_B, 1_B\}$ também é uma álgebra de Boole com exatamente dois elementos, então é fácil verificar que o mapa que associa $0_B \mapsto F$ e $1_B \mapsto V$ é um isomorfismo. Portanto, $\{V, F\}$ é a única álgebra de cardinalidade 2, exceto por isomorfismos. Denominamos $\{V, F\}$ como a *álgebra com dois elementos* e a denotamos simplesmente por 2.

Outra forma de encontrar uma álgebra com apenas dois elementos é considerar a álgebra das partes de um conjunto com apenas um elemento. De fato, se $X = \{x\}$, então $\wp(X) = \{\emptyset, X\}$ é uma álgebra de Boole com apenas dois elementos. Assim, apesar de $\{V, F\}$ como apresentada acima não ser uma álgebra de conjuntos, ela é isomorfa a uma álgebra de partes e logo pode ser vista como uma álgebra de conjuntos e é como a trataremos daqui para frente. Em particular, se $X = \{\emptyset\}$, então $\wp(X) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ é o cardinal $\{0, 1\} = 2$, justificando nossa notação para a álgebra com dois elementos. É possível também obter uma álgebra com um único elemento, como apresentamos a seguir.

Exemplo 1.10 (Álgebra trivial)**.** Considere A a álgebra das partes do conjunto vazio. A possui apenas um elemento, $(\{\emptyset\})$. Novamente, toda álgebra com apenas um elemento será isomorfa a A, com isomorfismo dado pela única função possível. Dizemos que A é a *álgebra trivial*.

Alguns autores pedem uma condição adicional de que $0 \neq 1$ na definição de álgebra de Boole justamente para evitar a presença da álgebra trivial, já que será uma consequência do lema 1.26 que esta é a única álgebra que isto ocorre. Aqui, queremos que todo $\wp(X)$ seja uma álgebra de Boole, até mesmo nesse caso particular, e se necessário diremos que uma álgebra é *não trivial* se $0 \neq 1$, isto é, ela tiver mais de um elemento.

Porém, aqui pedimos que toda álgebra de Boole contenha os elementos (não necessariamente distintos) 0 e 1, portanto não existe escolha de operações booleanas que torne o conjunto vazio uma álgebra de Boole.

Agora, para começar um estudo mais profundo de álgebras de Boole, precisamos compreender bem como as operações se comportam, o que será o objetivo das próximas seções.

1.2 Princípio da Dualidade e idempotência

Antes de embarcar no estudo da aritmética das álgebras de Boole, vamos provar um resultado elementar que simplifica significativamente as demonstrações das próximas seções.

Note que, na definição 1.1 de álgebras de Boole, os axiomas (B1')-(B5') podem ser obtidos dos axiomas (B1)-(B5) simplesmente trocando respectivamente $+, \cdot$ e 1 por $\cdot, +$ e 0, e vice-versa. De forma mais geral, se ϕ é uma afirmação sobre álgebras de Boole escrita em termos de suas operações e de elementos arbitrários, então a afirmação obtida pela troca de papéis descrita acima é denominada a *afirmação dual* e denotada $d\phi$. Assim, com essa linguagem, temos que $d(Bi) = (Bi')$ e $d(Bi') = (Bi)$ para i de 1 a 5. Essa simetria gera o seguinte teorema.

Teorema 1.11 (Princípio da Dualidade)**.** *Uma afirmação é verdadeira em toda álgebra de Boole se e somente se a afirmação dual é verdadeira em toda álgebra de Boole.*

Demonstração: Seja ϕ uma afirmação verdadeira em toda álgebra de Boole e $A = (A, +, \cdot, -, 0, 1)$ uma álgebra de Boole qualquer. Considere a estrutura dual $dA = (A, \cdot, +, -, 1, 0)$, como observado anteriormente, $d(Bi) = d(Bi')$ e $d(Bi') = d(Bi)$, logo dA é uma álgebra de Boole e portanto ϕ é verdadeira em dA. Pela dualidade da definição de dA, ϕ ser verdadeira em dA implica que $d\phi$ é verdadeira em A.

Reciprocamente, se $d\phi$ é verdadeira em toda álgebra de Boole, pelo demonstrado anteriormente, $dd\phi$ é verdadeira em toda álgebra de Boole, e claramente $dd\phi = \phi$. ■

Observe que poderíamos então ter definido uma álgebra de Boole como sendo uma estrutura na qual valem $(B1)$-$(B5)$ (ou $(B1')$-$(B5')$) e o Princípio da Dualidade, reduzindo a definição para apenas seis axiomas. Em 1933, foi provado em [Hun33] que é possível definir uma álgebra de Boole com apenas três axiomas em função da soma, produto e complemento. Para um resumo do estudo da quantidade mínima de axiomas necessários para caracterizar uma álgebra de Boole, recomendamos [McC+02], no qual uma axiomática com único axioma é apresentada.

Como exemplo de uma aplicação do Princípio da Dualidade, vamos provar uma propriedade das operações $+$ e $\cdot$ que é comumente associada com o termo "booleano", a idempotência.

Proposição 1.12 (Idempotência)**.** *Seja A uma álgebra de Boole. As operações $+$ e $\cdot$ são idempotentes, isto é, $a + a = a$ e $a \cdot a = a$, para todo $a \in A$.*

Demonstração: Seja $x \in A$, então

$$\begin{aligned} x + x &= x + x \cdot (x + x) && \text{pela propriedade absortiva do produto (B3')} \\ &= x && \text{pela propriedade absortiva da soma (B3)} \end{aligned}$$

e $x \cdot x = x$ para todo $x \in A$, pois é a afirmação dual da que acabamos de provar. ■

Assim, ao provar uma afirmação, o Princípio da Dualidade imediatamente prova sua afirmação dual, o que é uma técnica que usaremos de forma rotineira daqui em diante.

1.3 Ordem parcial booleana e reticulados

Dizemos que um conjunto P é *parcialmente ordenado por* R se R é uma relação binária sobre os elementos de P na qual

- xRx;
- Se xRy e yRz, então xRz;
- Se xRy e yRx, então $x = y$,

para todo $x, y, z \in X$, isto é, R é reflexiva, transitiva e anti-simétrica, respectivamente. Neste caso, dizemos que R é uma ordem parcial sobre P, ou que o par (P, R) é uma ordem parcial.

Vamos considerar o exemplo motivador 1.2 da álgebra das partes de X. Neste caso, $\wp(X)$ é naturalmente parcialmente ordenada pela relação $\subseteq$ de inclusão, e se A é uma álgebra de conjuntos, o mesmo pode ser feito. Vamos generalizar essa ordem, para parcialmente ordenar toda álgebra de Boole, caracterizando a inclusão de conjuntos em função da união ou da intersecção. É um fato da teoria de conjuntos que

$$X \subseteq Y \iff X \cap Y = X \iff X \cup Y = Y.$$

Vamos provar que a segunda equivalência vale no contexto mais geral das álgebras de Boole.

Lema 1.13. *Sejam A uma álgebra de Boole e $a, b \in A$. Então $a \cdot b = a$ se e só se $a + b = b$.*

Demonstração: Sejam $x, y \in A$ e suponha que $x \cdot y = y$. Então

$$\begin{aligned} x + y &= x + (x \cdot y) \\ &= x && \text{pela propriedade absortiva da soma (B3)} \end{aligned}$$

e a recíproca segue do Princípio da Dualidade. ■

Assim, temos motivação para definir a seguinte relação.

Definição 1.14. Seja A uma álgebra de Boole. Para $x, y \in A$, definimos

$$x \leq y \overset{\text{def}}{\iff} x \cdot y = x \overset{1.13}{\iff} x + y = y$$

e dizemos que $\leq$ é a *ordem parcial booleana* de A. Lemos $x \leq y$ como simplesmente *x é menor que y (em A)*.

Note que a ordem parcial booleana claramente depende da álgebra em que foi definida, logo seria apropriado denota-la por $\leq_A$, mas novamente prezamos por uma notação mais leve e colocaremos o subscrito apenas quando necessário para clareza. Vamos verificar que a ordem parcial booleana é, de fato, uma ordem parcial em sua álgebra de Boole.

Lema 1.15. *Seja A uma álgebra de Boole. A ordem parcial booleana de A é uma ordem parcial em A.*

Demonstração: Sejam A uma álgebra de Boole, $x, y, z \in A$ e $\leq$ a relação definida acima. Vamos mostrar que $\leq$ é reflexiva, transitiva e anti-simétrica.

Pela idempotência da operação $+$[1.12], temos que $x + x = x$, logo $x \leq x$. Assim, a relação $\leq$ é reflexiva. Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então

$$\begin{aligned} x + z &= x + (y + z) && \text{pois } y \leq z \\ &= (x + y) + z && \text{pela associatividade da soma } (B2) \\ &= y + z && \text{pois } x \leq y \\ &= z && \text{pois } y \leq z \end{aligned}$$

Logo, a relação $\leq$ é transitiva. Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então

$$\begin{aligned} x &= x + y && \text{pois } x \leq y \\ &= y + x && \text{pela comutatividade da soma } (B1) \\ &= y && \text{pois } y \leq x \end{aligned}$$

Logo, a relação é anti-simétrica. Portanto, $\leq$ é uma ordem parcial em A. ■

Note que numa álgebra de conjuntos, a ordem parcial booleana coincide com a ordem parcial da inclusão de conjuntos. Para estudar as propriedades da ordem parcial booleana, vamos introduzir a noção de reticulado, mas antes vamos relembrar algumas definições usuais da teoria de ordens.

Definição 1.16. Seja $(P, \leq)$ uma ordem parcial, e $M \subseteq P$.

- Um elemento $p \in P$ é dito um *limitante inferior* de M se $p \leq m$ para todo $m \in M$.
- Um elemento $q \in P$ é dito um *limitante superior* de M se $m \leq q$ para todo $m \in M$.

- Um elemento $i \in P$ é dito o *ínfimo* de M, e denotado por $\inf M$, se i é o maior limitante inferior de M. Se tal elemento i existir, dizemos que M admite ínfimo.
- Um elemento $s \in P$ é dito o *supremo* de M, e denotado por $\sup M$, se s é o menor limitante superior de M. Se tal elemento s existir, dizemos que M admite supremo.

Definição 1.17. Sejam P um conjunto e $\leq$ uma relação nele. Dizemos que $(P, \leq)$ é um reticulado se $(P, \leq)$ é uma ordem parcial na qual todo subconjunto finito admite ínfimo e supremo.

Observe que para demonstrar que uma ordem $(P, \leq)$ é um reticulado, basta mostrar que os subconjuntos de P com dois elementos admitem ínfimo e supremo. De fato, com essa suposição, temos que todo subconjunto finito $M = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq P$ admite ínfimo, pois é fácil verificar por indução que $\inf\{x_1, \ldots, x_n\} = \inf\{x_1, \inf\{x_2, \ldots, x_n\}\}$.

Proposição 1.18. *Sejam A uma álgebra de Boole e $\leq$ sua ordem parcial booleana. Então $(A, \leq)$ é um reticulado no qual* $\inf\{x, y\} = x \cdot y$ *e* $\sup\{x, y\} = x + y$.

Demonstração: Pelo lema 1.15, $(A, \leq)$ é uma ordem parcial e, pela observação acima, basta mostrar que para quaisquer $x, y \in A$, $\{x, y\}$ admite ínfimo e supremo. De fato, $x + y$ é um limitante superior de x e de y, pois

$$\begin{array}{rcll} x + (x + y) & = & (x + x) + y & \text{pela associatividade da soma} \\ & = & x + y & \text{pela idempotência da soma} \end{array}$$

e analogamente para y. Agora suponha que z é um limitante superior de x e de y, então

$$\begin{array}{rcll} (x + y) + z & = & x + (y + z) & \text{pela associatividade da soma} \\ & = & x + z & \text{pois } y \leq z \\ & = & z & \text{pois } x \leq z \end{array}$$

e portanto $x + y \leq z$, o que mostra que $\sup\{x, y\} = x + y$. Aplicando o Princípio da Dualidade na afirmação que acabamos de provar, temos que $\inf\{x, y\} = x \cdot y$. ■

Corolário 1.19. *Sejam A uma álgebra de Boole, $\leq$ sua ordem parcial booleana e $x, y \in A$. Então $x \cdot y \leq x, y \leq x + y$.*

Observação 1.20. Considere uma estrutura $(A, +, \cdot)$ que satisfaz a coleção de axiomas, que temporariamente denotaremos por $\mathfrak{X}$, dado pelos axiomas $(B1)$-$(B3)$ e $(B1')$-$(B3')$ da definição 1.1. Em tal estrutura, o Princípio da Dualidade vale pela mesma demonstração de 1.11, apenas considerando menos axiomas. Note que todas as outras demonstrações dessa seção até agora usaram exclusivamente os axiomas de $\mathfrak{X}$, assim, os resultados até agora mostram que é possível definir uma ordem parcial $\leq$ em $(A, +, \cdot)$ que torna $(A, \leq)$ um reticulado.

Reciprocamente, se $(L, \leq)$ é um reticulado, podemos definir as operações $x + y = \sup\{x, y\}$ e $x \cdot y = \inf\{x, y\}$ e temos que $(L, +, \cdot)$ satisfaz os axiomas de $\mathfrak{X}$, pois $\sup\{x, y\} = \sup\{y, x\}$ prova a comutatividade da soma, $\sup\{\sup\{x, y\}, z\} = \sup\{x, y, z\} = \sup\{x, \sup\{y, z\}\}$ prova a associatividade, $\sup\{x, \inf\{x, y\}\} = x$ prova a absortividade e, analogamente, o mesmo pode ser feito para o ínfimo.

Não é difícil ver que, aplicando o primeiro processo a $(A, +, \cdot)$ e aplicando o segundo processo ao reticulado resultante $(A, \leq)$, obtemos novamente $(A, +, \cdot)$. Assim, como ambos compartilham o conjunto base A, podemos livremente pensar em A como uma estrutura $(A, +, \cdot)$ que satisfaz os axiomas de $\mathfrak{X}$ ou como um reticulado $(A, \leq)$.

Felizmente, a ordem parcial booleana interage de forma simples com as operações de $+$ e $\cdot$, como demonstramos a seguir.

Lema 1.21. *Sejam A uma álgebra de Boole e $\leq$ sua ordem parcial booleana. As operações $+$ e $\cdot$ são monótonas, isto é, se $x \leq x'$ e $y \leq y'$, então $x + y \leq x' + y'$ e $x \cdot y \leq x' \cdot y'$.*

Demonstração: Suponha que $x \leq x'$ e $y \leq y'$. Basta usar comutatividade e associatividade da soma para obter

$$(x + y) + (x' + y') = (x + x') + (y + y') = x' + y'.$$

Logo, $x + y \leq x' + y'$ e segue do Princípio da Dualidade que $x \cdot y \leq x' \cdot y'$. ■

A ordem parcial booleana também interage da forma esperada com a operação $-$, como mostraremos em 1.35.

Queremos estender a observação 1.20 acima para incluir os axiomas $(B4)$, $(B5)$, $(B4')$ e $(B5')$, isto é, caracterizar as propriedades distributivas, complementares e a operação $''-''$ no contexto do reticulado criado pela ordem parcial booleana, e este será o objetivo das próximas seções.

1.4 As propriedades distributivas

Olhemos então para os axiomas $(B4)$ e $(B4')$, primeiro mostrando que a presença de ambos na definição 1.1 é redundante.

Lema 1.22. *Em todo reticulado, as leis distributivas $(B4)$ e $(B4')$ são equivalentes.*

Demonstração: Seja $(L, \leq)$ um reticulado, considere a sua estrutura $(A, +, \cdot)$ da observação 1.20

e suponha que vale $(B4)$ nela. então para $x, y, z \in A$, temos que

$$\begin{aligned}
(x+y)\cdot(x+z) &= (x+y)\cdot x + (x+y)\cdot z && \text{pela distributividade } (B4)\\
&= (x\cdot x) + (y\cdot x) + (x\cdot z) + (y\cdot z) && \text{pela distributividade } (B4)\\
&= x + (x\cdot y) + (x\cdot z) + (y\cdot z) && \text{pela idempotência de } \cdot\\
&= x + x\cdot z + y\cdot z && \text{por absorvidade } (B3)\\
&= x + (y\cdot z) && \text{por absorvidade } (B3)
\end{aligned}$$

logo vale $(B4')$. A recíproca vale pelo Princípio da Dualidade. ■

Como estamos interessados em estruturas que satisfazem $(B4)$ e $(B4')$, vamos introduzir a seguinte definição.

Definição 1.23. Um reticulado é dito distributivo se para todos x, y e z elementos dele, vale que

$$\inf\{\sup\{x,y\}, \sup\{x,z\}\} = \sup\{x, \inf\{y,z\}\}.$$

Observação 1.24. Como a expressão da definição acima é simplesmente a propriedade distributiva $(B4)$ escrita em termos de ínfimo e supremo, logo pelo lema 1.4, um reticulado é distributivo se e só se vale a propriedade distributiva $(B4')$, isto é

$$\sup\{\inf\{x,y\}, \inf\{x,z\}\} = \inf\{x, \sup\{y,z\}\}.$$

1.5 Reticulados complementados

Vamos primeiro relembrar mais algumas definições da teoria de ordens parciais.

Definição 1.25. Sejam $(P, \leq)$ uma ordem parcial e $M \subseteq P$.

- Um elemento $x \in M$ é *minimal* (em M) se não existir elemento de M menor que ele.
- Um elemento $y \in M$ é *maximal* (em M) se não existir elemento de M maior que ele.
- Um elemento n é o *mínimo* de M se todo elemento de M é maior que n, neste caso, denotamos que $\min M = n$ e dizemos que M admite mínimo.
- Um elemento m é o *máximo* de M se todo elemento de M é menor que m, neste caso, denotamos que $\max M = n$ e dizemos que M admite máximo.
- A ordem $(P, \leq)$ é dita *limitada* se P admite mínimo e máximo.

Agora, olhemos para os axiomas $(B5)$ e $(B5')$. Note que se 1 e $1'$ são elementos que satisfazem $(B5)$, então, aplicando $(B5)$ duas vezes, temos que $1 = 1 + (-1) = 1'$, isto é, o elemento 1 de uma álgebra de Boole é único. Pelo Princípio da Dualidade, segue que $(B5')$ caracteriza um único elemento 0 de uma álgebra de Boole.

Aplicando 1.18 para uma álgebra de conjuntos $\wp(X)$, temos que ela é um reticulado na qual todo subconjunto finito $M \subseteq \wp(X)$ tem ínfimo $\bigcap M$ e supremo $\bigcup M$. Nesta álgebra, o conjunto vazio está contido em todos os outros e não contém nenhum, logo é minimal na sua ordem parcial booleana, a ordem da inclusão. Analogamente, o conjunto X é maximal na ordem parcial booleana dessa álgebra.

Assim, na álgebra $\wp(X)$, os seus elementos $0 = \emptyset$ e $1 = X$ coincidem respectivamente com o menor e o maior elemento da sua ordem parcial booleana. Vamos mostrar que esse fato vale numa álgebra qualquer.

Lema 1.26. *Sejam A uma álgebra de Boole e $\leq$ sua ordem parcial booleana. Então o reticulado $(A, \leq)$ é limitado. Mais precisamente,* 0 *e* 1 *são respectivamente o menor e o maior elemento de A.*

Demonstração: Seja $x \in A$ e vamos mostrar que $0 \leq x \leq 1$. Pela propriedade complementar $(B5)$, temos que $x + (-x) = \sup\{x, -x\} = 1$, logo 1 é um limitante superior de x e portanto $x \leq 1$, e que $0 \leq x$ segue pelo Princípio da Dualidade. ■

Observação 1.27. Muitas vezes, é vantajoso trabalhar com a ordem parcial booleana sem o elemento mínimo, assim por conveniência, denotaremos $A \smallsetminus \{0\}$ por A^+. Dizemos que os elementos de A^+ são os elementos *positivos* de A, pelo fato destes elementos serem maiores que o elemento zero. É claro que A^+ não é uma álgebra de Boole se A tem mais do que 2 elementos.

Aplicando a definição 1.14 da ordem parcial booleana no lema acima, recuperamos os seguintes fatos aritméticos.

Corolário 1.28. *Seja A uma álgebra de Boole e $a \in A$. Então*

(i) $a + 0 = a$.

(ii) $a + 1 = 1$.

(iii) $a \cdot 0 = 0$.

(iv) $a \cdot 1 = a$.

Observação 1.29. Uma consequência do corolário anterior é que dados dois elementos em uma álgebra de Boole, sempre podemos decompor um "em função do" outro. Mais precisamente, sejam A uma álgebra de Boole e $x, y \in A$, temos que

$$\begin{aligned} x &= x \cdot 1 && \text{pelo corolário 1.28} \\ &= x \cdot (y + -y) && \text{pela propriedade complementar } (B5) \\ &= x \cdot y + x \cdot -y && \text{pela distributiva } (B4) \end{aligned}$$

Assim, escrevemos x como uma soma de dois produtos que envolvem apenas x e y, podemos pensar que $x \cdot y$ é o "pedaço de x dentro de y" e $x \cdot -y$ é o "pedaço de x fora de y".

Agora, falta apenas situar a operação "$-$" da álgebra de Boole no contexto de reticulados. Começamos definindo os elementos que satisfazem $(B5)$ e $(B5')$ a seguir.

Definição 1.30. Seja $(L, \leq)$ um reticulado limitado, no qual m e M são seu mínimo e máximo, respectivamente. Dizemos que um elemento $x \in L$ admite complemento se existe $y \in L$ tal que $\inf\{x, y\} = m$ e $\sup\{x, y\} = M$. Se todo elemento de L admite complemento, dizemos que L é complementado.

Observação 1.31. Note que a definição acima é simétrica pela comutatividade das operações, isto é, se x é um complemento de y, então y é um complemento de x.

Assim, se a estrutura $(A, +, \cdot)$ de um reticulado admite operação "$-$" satisfazendo $(B5)$ e $(B5')$, claramente $-x$ é um complemento de x para todo $x \in A$, logo A é complementado. Vamos mostrar a seguir que neste caso $-x$ é o único complemento de x.

Lema 1.32. *Se um elemento de um reticulado distributivo limitado admite complemento, então esse complemento é único.*

Demonstração: Seja A um reticulado distributivo limitado e suponha que $y, z \in A$ sejam complementos de $x \in A$. Então

$$\begin{aligned}
z &= z \cdot 1 && \text{pelo corolário 1.28} \\
&= z \cdot (x + y) && \text{pois } y \text{ é complemento de } x \text{, logo } 1 = x + y \\
&= z \cdot x + z \cdot y && \text{pela propriedade distributiva } (B4) \\
&= 0 + z \cdot y && \text{pois } z \text{ é complemento de } x \text{, logo } x \cdot z = 0 \\
&= z \cdot y && \text{pelo corolário 1.28}
\end{aligned}$$

Logo $z \leq y$. Trocando o papel de y e z nas equações acima, obtemos que $y \leq z$, portanto $y = z$ segue por anti-simetria da ordem. ■

Agora, vamos provar alguns resultados aritméticos envolvendo complementos.

Lema 1.33. *Sejam A uma álgebra de Boole e $x, y \in A$. Então*

(i) $- - x = x$.

(ii) $-0 = 1$ *e* $-1 = 0$.

(iii) *Se* $-x = -y$, *então* $x = y$.

Demonstração: *(i)* Pela unicidade do complemento, basta mostrar que x é um complemento de $-x$, mas isso é verdade pela observação 1.31. *(ii)* Pelo corolário 1.28, $0+1=1$ e $0 \cdot 1 = 0$, logo 0 e 1 são complementos um do outro. *(iii)* Se $-x = -y$, então o complemento deles é o mesmo, pelo primeiro item do corolário, segue que $x = --x = --y = y$. ■

Proposição 1.34 (Leis de De Morgan). *Sejam A uma álgebra de Boole e $x, y \in A$. Então*

$$-(x+y) = -x \cdot -y \qquad e \qquad -(x \cdot y) = -x + -y.$$

Demonstração: Vamos mostrar que $-x \cdot -y$ é o complemento de $(x+y)$. De fato

$$\begin{aligned}
(x+y)\cdot(-x\cdot -y) &= x\cdot(-x\cdot -y) + y\cdot(-x\cdot -y) && \text{pela propriedade distributiva } (B4)\\
&= (x\cdot -x)\cdot -y + (y\cdot -y)\cdot -x && \text{por associatividade e comutatividade}\\
&= 0\cdot -y + 0\cdot -x && \text{pela propriedade complementar } (B5')\\
&= 0+0 && \text{pelo corolário 1.28}\\
&= 0 && \text{pelo corolário 1.28}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(x+y)+(-x\cdot -y) &= ((x+y)+-x)\cdot((x+y)+-y) && \text{pela propriedade distributiva } (B4')\\
&= (x+-x+-y)\cdot(y+-y+x) && \text{por associatividade e comutatividade}\\
&= (1+-y)\cdot(1+x) && \text{pela propriedade complementar } (B5')\\
&= 1\cdot 1 && \text{pelo corolário 1.28}\\
&= 1 && \text{pelo corolário 1.28}
\end{aligned}$$

e que $-x + -y$ é o complemento de $x \cdot y$ segue pelo Princípio da Dualidade. ■

Lema 1.35. *Sejam A uma álgebra de Boole, $\leq$ sua ordem parcial booleana e $x, y \in A$. Se $x \leq y$, então $-x \geq -y$.*

Demonstração: Suponha que $x \cdot y = x$. Então $-(x \cdot y) = -x$ e, pelas Leis de De Morgan[1.34], $-(x \cdot y) = -x + -y = -x$, logo $-y \geq -x$. ■

Corolário 1.36. *Seja A uma álgebra de Boole, $\leq$ sua ordem parcial booleana e $x, y, z \in A$. Então*

(i) $x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x \Leftrightarrow x \cdot -y = 0$.

(ii) $z \cdot x \leq y \Leftrightarrow x \leq -z + y$.

Demonstração: *(i)* A primeira equivalência segue imediatamente do lema 1.35 e do primeiro item do lema 1.33. Para a segunda, supondo que $-y \leq -x$, por monotonicidade, $x \cdot -y \leq x \cdot -x = 0$, mas como 0 é o menor elemento da ordem parcial booleana, segue a igualdade. Reciprocamente, se $x \cdot -y = 0$, então

$$\begin{aligned} x &= x \cdot y + x \cdot -y && \text{pela observação 1.29} \\ &= x \cdot y && \text{pela hipótese e o corolário 1.28} \end{aligned}$$

(ii) Se $z \cdot x \leq y$, então

$$\begin{aligned} x &= x \cdot z + x \cdot -z && \text{pela observação 1.29} \\ &\leq y + x \cdot -z && \text{pela hipótese e a monotonicidade da soma} \\ &\leq y + -z && \text{pela monotonicidade da soma e o corolário 1.19} \end{aligned}$$

Reciprocamente, se $x \leq y + -z$, então

$$\begin{aligned} z \cdot x &= z \cdot (y + -z) && \text{pela monotonicidade do produto} \\ &\leq z \cdot y + z \cdot -z && \text{pela propriedade distributiva } (B4) \\ &\leq z \cdot y && \text{pela propriedade complementar } (B5') \text{ e o corolário 1.28} \\ &\leq y && \text{pelo corolário 1.19} \end{aligned}$$

■

1.6 A álgebra de Boole como um reticulado distributivo complementado

Finalmente, temos as ferramentas necessárias para enunciar um resultado essencial da teoria: a conexão entre álgebras de Boole e reticulados. Ele não será explicitamente demonstrado, já que ele é simplesmente uma junção dos resultados das seções 1.3, 1.4 e 1.5.

Teorema 1.37. *Dada uma álgebra de Boole $(A, +, \cdot, -, 0, 1)$, a ordem $(A, \leq)$, onde $\leq$ é a ordem parcial booleana, é um reticulado distributivo complementado, no qual os elementos 0 e 1 são respectivamente seu mínimo e máximo, o elemento $-x$ é o complemento de cada elemento $x \in A$ e tal que o supremo e o ínfimo são dados por*

$$\sup\{x, y\} = x + y \qquad e \qquad \inf\{x, y\} = x \cdot y.$$

Reciprocamente, dado um reticulado distributivo complementado $(L, \leq)$, a estrutura

$$(L, \sup\{\cdot,\cdot\}, \inf\{\cdot,\cdot\}, -, \min L, \max L)$$

é uma álgebra de Boole. Além disso, esses processos são inversos um do outro.

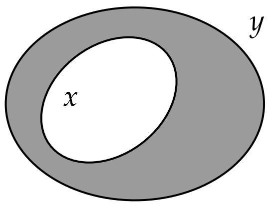
Assim, demos duas visões complementares sobre álgebras de Boole: como estrutura algébrica e como ordem parcial, e o processo descrito no teorema acima estabelece uma correspondência biunívoca entre elas. A partir de agora não haverá distinção entre essas duas visões, identificaremos livremente álgebras de Boole como reticulados distributivos complementados e vice-versa. Usaremos todos os resultados aritméticos provados até aqui sem referência explícita e reservamos o símbolo $\leq$ para *sempre* significar a ordem parcial booleana, quando $\leq$ estiver comparando elementos de uma álgebra de Boole.

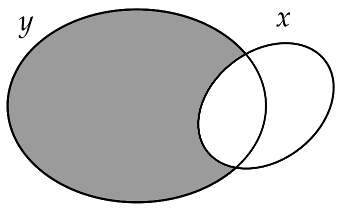
Observação 1.38. Dados elementos arbitrários distintos x e y em uma álgebra de Boole, sempre temos que ou $x \cdot -y > 0$ ou $-x \cdot y > 0$.

De fato, dados x e y, temos duas opções: eles são comparáveis ou não. Se eles são comparáveis, podemos supor que $x < y$, e neste caso $-x > -y$, portanto $-x \cdot y > -y \cdot y = 0$. Supondo que $y < x$, obteríamos que $x \cdot -y > 0$.

Agora, como podemos escrever y como $y = y \cdot x + y \cdot -x$, supondo que $-x \cdot y = 0$, temos que $y = y \cdot x$ e logo $y \leq x$. Assim se x e y não são comparáveis, $-x \cdot y \neq 0$ e portanto $-x \cdot y > 0$. Analogamente, supondo $x \cdot -y = 0$, obtemos que x e y são comparáveis.

Para dar mais intuição, a seguir representamos dois casos, onde o elemento $-x \cdot y$ está representado em cinza e os outros dois casos podem ser obtidos trocando o papel de x e y.





Este fato justifica quando muitas vezes, durante as demonstrações das próximas seções, dados dois elementos distintos x e y em uma álgebra de Boole, podemos assumir sem perda de generalidade que $x \cdot -y > 0$.

1.7 Homomorfismos de ordem e a diferença simétrica

A visão de álgebras de Boole como reticulados tem muitas vantagens, já que podemos aplicar elementos e resultados de teoria de ordens na nossa teoria. Relembramos as seguintes definições:

Definição 1.39. Sejam $(P, \leq_P)$ e $(Q, \leq_Q)$ ordens parciais e $f : P \to Q$ uma função. Dizemos que

- f é um *homomorfismo de ordem*, ou simplesmente uma *função monótona*, se, para todos $x, y \in P$, $x \leq_P y$ implicar $f(x) \leq_Q f(y)$.
- f é um *isomorfismo de ordem* se f é uma função bijetora tal que, para todos $x, y \in P$, temos que $x \leq_P y$ se e somente se $f(x) \leq_Q f(y)$.

- P e Q são *ordem-isomorfas* se existir um isomorfismo de ordem $f : P \to Q$.

Lema 1.40. *Todo homomorfismo entre álgebras de Boole é um homomorfismo de ordem.*

Demonstração: Seja $f : A \to B$ um homomorfismo entre álgebras de Boole e $x, y \in A$. Suponha que $x \leq y$, então $x + y = y$ e logo $f(x) + f(y) = f(y)$. Portanto $f(x) \leq f(y)$ e f é monótona. ■

Nem todo homomorfismo de ordem é um homomorfismo entre álgebras de Boole. Apesar disso, alguns homomorfismos de ordem entre álgebras de Boole nos será interessante, em particular, as funções que preservam apenas ínfimos.

Definição 1.41. Seja $f : A \to B$ uma função entre álgebras de Boole. Dizemos que f é um semi-homomorfismo entre álgebras de Boole se $f(1) = 1$, $f(0) = 0$ e $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ para todos x e y elementos da álgebra.

Claramente todo semi-homomorfismo é uma função monótona e todo homomorfismo é um semi-homomorfismo, porém a função $f : \wp(\{a, b\}) \to 2$ que associa $\{a, b\} \mapsto 1$ e associa todos os outros elementos a zero é um semi-homomorfismo que não é homomorfismo. Esta função também é um exemplo de homomorfismo de ordem que não é homomorfismo de álgebras de Boole.

Proposição 1.42. *Uma função entre álgebras de Boole é um isomorfismo entre álgebras de Boole se e somente se é isomorfismo de ordem.*

Demonstração: Seja $f : A \to B$ uma função entre álgebras de Boole. Se f é um isomorfismo de álgebras de Boole, então f é bijetora e, pelo lema 1.40, monótona. Dados $x, y \in A$, se $x \nleq y$, então $x + y \neq y$ e como f é injetora, temos que $f(x + y) = f(x) + f(y) \neq f(y)$ e portanto $f(x) \nleq f(y)$, mostrando que f é um isomorfismo de ordem.

Reciprocamente, suponha que f é um isomorfismo de ordem e sejam $x, y \in A$. Como $x \leq x + y$, temos que $f(x) \leq f(x + y)$ e analogamente $f(y) \leq f(x + y)$. Assim pela monotonicidade da ordem, temos que $f(x) + f(y) \leq f(x + y)$. Suponha por absurdo que existe $t \in B$ tal que $f(x) + f(y) < t \leq f(x + y)$. Como f é sobrejetora, existe $z \in A$ tal que $f(z) = t$ e assim $f(z) \leq f(x + y)$, logo $z \leq x + y$. Analogamente $f(x) + f(y) < f(z)$ implica que $f(x) < f(z)$ e $f(y) < f(z)$ e logo $x < z$ e $y < z$. Assim temos que $x + y < z \leq x + y$, um absurdo, e portanto $f(x) + f(y) = f(x + y)$. Uma demonstração completamente análoga mostra que $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$.

Agora, como $0 \leq x$ para todo $x \in A$ e f é monótona, temos que $f(0) \leq f(x)$, pela sobrejetividade de f, concluímos que $f(0) = 0$. Analogamente, o fato que $x \leq 1$ para todo $x \in A$ implica que $f(1) = 1$.

Por fim, dado $x \in A$, como $x \cdot -x = 0$, temos que $f(x \cdot -x) = f(x) \cdot f(-x) = f(0) = 0$. Analogamente, como $x + -x = 1$, temos que $f(x) + f(-x) = 1$ e portanto $f(-x) = -f(x)$. Concluímos que f é um isomorfismo entre álgebras de Boole. ∎

Corolário 1.43. *Sejam A e B álgebras de Boole. A é isomorfa a B se e somente se A é ordem-isomorfa a B.*

As proposições acima resultam essencialmente do fato que homomorfismos "preservam" propriedades definidas finitamente a partir das operações booleanas. Outro exemplo desse tipo de comportamento é dado a seguir com a diferença simétrica.

Definição 1.44. Seja A uma álgebra de Boole. Definimos a operação $\triangle$ em A, dada por

$$x \triangle y = x \cdot -y + y \cdot -x$$

para todos $x, y \in A$. Lemos $x \triangle y$ como a *diferença simétrica entre x e y*.

Note que a diferença simétrica depende de em qual álgebra foi definida, assim seria mais apropriado denotá-la por $\triangle_A$, mas assim como na ordem parcial booleana, prezamos por uma notação mais sucinta e não indicaremos a álgebra, exceto quando necessário para clareza.

Em particular, se uma álgebra A é uma álgebra de conjuntos, temos que a diferença simétrica

$$x \triangle y = (x \cap (1_A \setminus y)) \cup (y \cap (1_A \setminus x)) = (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$$

é exatamente a noção conjuntista de diferença simétrica entre dois conjuntos.

Lema 1.45. *Sejam A uma álgebra de Boole e $x, y \in A$. Então $x = y$ se e somente $x \triangle y = 0$.*

Demonstração: Basta notar que se $x = y$, então $x \leq y$ e $y \leq x$ e portanto $x \cdot -y = 0$ e $y \cdot -x = 0$, mostrando que $x \cdot -y + y \cdot -x = x \triangle y = 0$. Para todas as implicações utilizadas, a sua recíproca vale, o que mostra o lema. ∎

Lema 1.46. *Todo homomorfismo entre álgebras de Boole preserva a diferença simétrico, isto é, se $f : A \to B$ é um homomorfismo, então para todos $x, y \in A$, vale que $f(x \triangle y) = f(x) \triangle f(y)$.*

Demonstração: Suponha que $f : A \to B$ é um homomorfismo e sejam $x, y \in A$. Então

$$f(x \triangle y) = f(x \cdot -y + y \cdot -x) = f(x) \cdot -f(y) + f(y) \cdot -f(x) = f(x) \triangle f(y)\,,$$

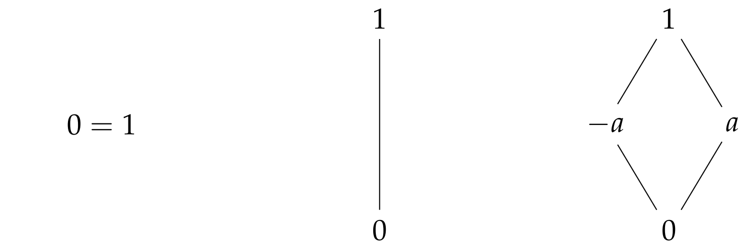
e logo f preserva a diferença simétrica. ∎

1.8 Visualização de reticulados e mais exemplos

A visualização de álgebras de Boole como generalização de álgebras de conjuntos nos dá acesso à representação visual conjuntista usual de conjuntos, como foi usada na observação 1.38. Porém, usando o teorema 1.37, obtemos outra visualização de álgebras de Boole usando reticulados, que é particularmente útil quando a álgebra é finita.

Dado um reticulado, podemos visualizá-lo como um grafo entre seus elementos, onde um traço entre elementos indica que eles são comparáveis na ordem parcial booleana e a posição relativa deles indica qual deles é maior, com elementos escritos acima sendo maiores do que elementos escritos abaixo.

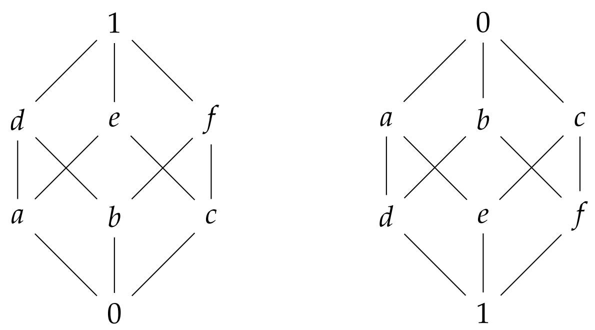
Seguem visualizados como reticulados duas álgebras de Boole que já discutimos anteriormente e a álgebra de Boole 2^2, que recebe esse nome pelo fato que toda álgebra de Boole com exatamente 4 elementos é isomorfa a ela.



Álgebra trivial   Álgebra 2   Álgebra 2^2

Note que é impossível construir uma álgebra de Boole com exatamente 3 elementos, já que se $0 < x < 1$ em uma álgebra de Boole A, então $0 < -x < 1$ pela unicidade do complemento e $x \neq -x$ pela não trivialidade de A.

Observação 1.47. Uma vantagem desta visualização é que ela intui exatamente o que ocorre quando dualizamos uma álgebra, na linguagem do Princípio da Dualidade[1.11]. Considere a seguinte álgebra A e sua dual dA.



A dA

Fica claro que a visualização de dA é obtida pela reflexão horizontal da visualização de A, e vice-versa, portanto um elemento x é menor que outro elemento y em A se e somente se y é menor que x em dA. De fato, seja agora A uma álgebra de Boole qualquer, então

$$x \leq_A y \iff x +_A y = y \iff x \cdot_{dA} y = y \iff y \leq_{dA} x\,,$$

logo dA é simplesmente o reticulado $(A, \leq^{op})$, onde definimos $x \leq^{op} y$ se e somente se $y \leq x$. Portanto, ao aplicar o Princípio da Dualidade a uma afirmação escrita em termos da ordem parcial booleana, toda instância da relação "$\leq$" deve ser substituída por "$\geq$" e vice-versa.

Todas as visualização de álgebra de Boole que mostramos até agora tem simetria reflexiva, porém este não é sempre o caso. Através de uma verificação entediante, o(a) leitor(a) pode se convencer que nenhuma representação como reticulado da álgebra das partes de um conjunto com quatro elementos possui simetria reflexiva.

Por fim, vamos dar mais algumas construções de álgebras de Boole para referência futura.

Exemplo 1.48 (Álgebra de Intervalos)**.** Seja $(L, \leq)$ uma ordem linear, isto é, uma ordem parcial na qual dados dois elementos $x \neq y$, vale $x \leq y$ ou $y \leq x$. Suponha que L admite elemento mínimo, seja ele 0_L. Dados $x, y \in L$, definimos o conjunto

$$[x, y[\, = \{z \in L \mid x \leq z < y\}$$

chamado de intervalo semi-aberto de L determinado por x e y. Estendendo a ordem de L para o conjunto $L \cup \{\infty\}$, onde ∞ é um elemento que não pertence a L e determinando que $x < \infty$ para todo $x \in L$, podemos escrever o conjunto de elementos maiores que x como um intervalo semi-aberto da seguinte forma

$$[x, \infty[\, = \{z \in L \mid x \leq z < \infty\} = \{z \in L \mid x \leq z\}.$$

O conjunto

$$[L[\, = \left\{ \bigcup_{i<n} [x_i, y_i[\;\middle|\; x_i, y_i \in L \cup \{\infty\}, x_i \leq y_i \text{ e } n \in \omega \right\}$$

é uma álgebra de conjuntos, uma subálgebra de $\wp(L)$, denominada a *álgebra de intervalos de* L. Claramente $[L[$ é fechado por uniões finitas, $\emptyset = [0_L, 0_L[$ e $L = [0_L, \infty[$. Basta verificar que $[L[$ é fechado por complemento, já que podemos escrever a interseção em função da união e complemento, como fizemos no exemplo 1.5.

Assim, considere um elemento

$$a = [x_1, y_1[\, \cup [x_2, y_2[\, \cup \cdots \cup [x_{n-1}, y_{n-1}[\, \cup [x_n, y_n[$$

de $[L[$, onde o número n de intervalos é minimal para a. Nenhum dos intervalos $[x_i, y_i[$ da expressão acima é vazio, pois, caso contrário, seria possível escrever a com menos que n intervalos, contrariando a minimalidade de n. Analogamente, para $i \neq j$, a união $[x_i, y_i[\cup [x_j, y_j[$ não pode ser um intervalo pela minimalidade de n, logo $y_i < x_j$ ou $y_j < x_i$. Portanto, após uma possível troca de índices, temos que $x_1 \leq y_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq y_{n-1} \leq x_n \leq y_n$ e assim

$$L \smallsetminus a = [0_L, x_1[\cup [y_1, x_2[\cup \cdots \cup [y_{n-1}, x_n[\cup [y_n, \infty[$$

é uma união finita de intervalos semi-abertos de L, onde o primeiro e último intervalos podem possivelmente ser vazios. Portanto $[L[$ é fechado por complemento.

Note que a escrita de $a \in [L[$ como uma união finita de intervalos com as propriedades descritas acima é única, já que o elemento x_1 fica determinado por ser o mínimo de a, y_1 é o mínimo de $\{y \in L \mid [x_1, y[\subseteq a\}$, x_2 é o mínimo de $a \smallsetminus [x_1, y_1[$ e assim por diante. Assim, a associação

$$\begin{array}{ccc} [L[& \to & [L \times L]^{<\aleph_0} \\ a & \mapsto & \{(x_1, x_n), \ldots, (x_{l(a)}, y_{l(a)})\} \end{array}$$

onde $l(a)$ é o número minimal da escrita de a como intervalos, é uma injeção e portanto $[L[$ tem a mesma cardinalidade de L se L for infinito.

Observe que é possível construir a álgebra de intervalos $(L, \leq)$ de qualquer ordem linear ao anexar artificialmente um elemento mínimo $0_L \notin L$ e definir $[L[$ como $[L_0[$, onde L_0 é a ordem linear $(L \cup \{0_L\}, \leq_0)$ com $\leq_0$ definida por $x \leq_0 y$ se e somente se $x \leq y$ ou $x = 0_L$.

No exemplo 1.9, definimos inicialmente a álgebra 2 como uma álgebra que não era de conjuntos, porém rapidamente verificamos que ela é isomorfa a $\wp(\{\emptyset\})$, assim até agora não apresentamos realmente nenhuma álgebra que parece não ser isomorfa a uma de conjuntos, o que faremos a seguir.

Exemplo 1.49 (Álgebra de Lindenbaum-Tarski)**.** Sem nos preocupar muito com a formalização com a teoria de lógica, seja T um conjunto de afirmações construídas a partir de uma linguagem de lógica proposicional de primeira ordem. Para fórmulas α e β, defina

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \text{Se as afirmações de } T \text{ são verdadeiras, então } \alpha \text{ e } \beta \text{ são fórmulas equivalentes.}$$

Fixando um conjunto Λ de fórmulas escritas na mesma linguagem de T, esta relação é de equivalência em Λ e portando podemos falar nela da classe de equivalência $[\alpha]$ de fórmulas equivalentes a α (no sistema axiomático de T). Definimos o conjunto

$$B(T) = \{[\alpha] \mid \alpha \in \Lambda\} = \Lambda/\sim,$$

as seguintes operações em $B(T)$

$$[\alpha] + [\beta] = [\alpha \vee \beta] \qquad [\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha \wedge \beta] \qquad -[\alpha] = [\neg\alpha]$$

e identificamos os elementos

$$0 = [\alpha_0 \wedge \neg\alpha_0] \qquad 1 = [\alpha_0 \to \alpha_0]$$

onde α_0 é uma fórmula qualquer de Λ. É um exercício usual de lógica mostrar que 0 e 1 não dependem da escolha da fórmula α_0 e que $(B(T), +, \cdot, -, 0, 1)$ é uma álgebra de Boole.

A álgebra de Lindenbaum-Tarski exemplifica a conexão entre álgebras de Boole e lógica, que era de fato a intenção original de George Boole: criar uma teoria algébrica que descrevia a lógica clássica proposicional. É possível provar que toda álgebra de Boole é isomorfa a uma álgebra de Lindenbaum-Tarski, porém não trabalharemos aqui formalmente com teoria de lógica e recomendamos a seção 9 de [Kop89] para o(a) leitor(a) interessado(a).

2 Álgebras completas, disjunção e celularidade

O principal objetivo desta seção é introduzir o conceito de operações infinitas e completude, que surgem naturalmente da visão de álgebras de Boole como reticulados e estendem as operações booleanas de soma e produto.

Introduzimos também a noção de anti-cadeias em álgebras de Boole, já que esse estudo se beneficia do estudo de completude, e descrevemos um cardinal associado a cada álgebra de Boole, a sua celularidade, que mede a presença e cardinalidade de anti-cadeias.

Para tanto, vamos definir disjunção, que generaliza a noção conjuntista usual de mesmo nome, isto é, de conjuntos cuja intersecção é vazia, e também definiremos álgebras relativas, uma ferramenta que reduz problemas em álgebras de Boole.

2.1 Completude

Como já vimos, as operações da álgebra de Boole refletem as propriedades da união, intersecção e complemento de conjuntos, porém só no caso finito, já que uma soma infinita, por exemplo, $x_1 + \ldots + x_n + \ldots$ não faz sentido na definição 1.1. Em uma álgebra de conjuntos, poderíamos dizer que a noção de uma soma infinita existe até certo ponto, já que uma união infinita é um conceito usual, porém nenhum dos axiomas booleanos garante que tal união tem que pertencer à álgebra.

Com a identificação que toda álgebra de Boole é um reticulado, uma soma infinita e um produto infinito de elementos podem ser interpretados como o supremo e ínfimo destes elementos. Com essa ideia, vamos introduzir duas novas operações que refletem as propriedades da união e intersecção de uma quantidade arbitrária de conjuntos.

Definição 2.1. Sejam A uma álgebra de Boole e $M \subseteq A$. Definimos

$$\sum M = \sup M \qquad \text{e} \qquad \prod M = \inf M$$

se tais supremo e ínfimo existirem na ordem parcial booleana de A. Dizemos que $\sum M$ e $\prod M$ são respectivamente o somatório e o produtório de M. Se $M = \{m_i \mid i \in I\}$ para algum conjunto I, então também denotamos $\sum M = \sum_{i \in I} m_i$ e $\prod M = \prod_{i \in I} m_i$.

Como comentamos antes, a definição de álgebras de Boole não garantem que todo conjunto tem ínfimo ou supremo na ordem parcial booleana, o que motiva a seguinte definição.

Definição 2.2. Se todo subconjunto de A admite ínfimo e supremo na ordem parcial booleana, dizemos que A é uma álgebra *completa*.

Claramente, toda álgebra finita é completa, pois se $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$ é um subconjunto finito não vazio de uma álgebra de Boole, então $\sum M = \sup M = m_1 + \cdots + m_n$ pertence à álgebra, e analogamente para o ínfimo de M. É então um abuso de linguagem comum se referir à somatórios e produtórios respectivamente como somas e produtos, já que eles estendem as definições destas operações.

Para um exemplo fácil de uma álgebra completa possivelmente infinita, olhemos para as álgebras de partes.

Exemplo 2.3. Toda álgebra de partes é completa.

De fato, dado $M \subseteq \wp(X)$ não vazio, temos que $\bigcap M$ e $\bigcup M$ claramente pertencem a $\wp(X)$ e são, respectivamente, limitante inferior e superior de M na ordem da inclusão, já que se $m \in M$, então

$$\emptyset \subseteq \bigcap M \subseteq m \subseteq \bigcup M \subseteq X.$$

Agora, se S também é um limitante superior de M, então $m \subseteq S$ para cada $m \in M$, e logo $\bigcup_{m \in M} m \subseteq S$, portanto $\bigcup M$ é o menor limitante superior de M e, analogamente, $\bigcap M$ é o maior limitante inferior de M.

Pela definição de ínfimo e supremo e os mesmos argumentos apresentados no exemplo acima, temos a seguinte relação útil que conecta as operações infinitas com união e intersecção em álgebras de conjuntos.

Lema 2.4. *Seja A uma álgebra de conjuntos e $M \subseteq A$. Então:*

(i) Se $\sum M$ existe, então $\bigcup M \subseteq \sum M$.

(ii) Se $\prod M$ existe, então $\prod M \subseteq \bigcap M$.

Agora, como primeiro exemplo de uma álgebra de Boole que falha em ser completa, olhemos para as álgebras finita-cofinitas que não são álgebras de partes.

Exemplo 2.5. Toda álgebra finita-cofinita de um conjunto infinito não é completa.

De fato, seja X infinito e fixe um subconjunto $Y \subseteq X$ tal que Y e $X \setminus Y$ são infinitos. Seja $M = \{\{y\} \mid y \in Y\} \subseteq \mathrm{FinCofin} X$ e vamos mostrar que M não admite supremo.

Seja $s \in \mathrm{FinCofin} X$ um limitante superior de M, isto é, $\{y\} \subseteq s$, para todo $y \in Y$, logo, pela infinitude de Y, s é infinito e como s pertence a álgebra finita-cofinita de X, concluímos que s é cofinito. Agora, como $X \setminus Y$ é infinito e $X \setminus s$ é finito, temos que $(X \setminus Y) \setminus (X \setminus s)$ é não vazio.

Assim, seja $x_0 \in (X \setminus Y) \setminus (X \setminus s)$. Para cada $y \in Y$, temos que

$$\{y\} \subseteq s \setminus \{x_0\} \subsetneq s,$$

onde a primeira inclusão segue de que $x_0 \in X \setminus Y$ e a segunda inclusão é própria, pois $x_0 \notin (X \setminus s)$, logo $x_0 \in s$. Portanto não existe menor limitante superior de M.

Vimos que para X um conjunto infinito, a álgebra finita-cofinita de X é uma subálgebra própria das partes de X, logo os exemplos 2.3 e 2.5 acima mostram que completude não é uma propriedade herdada por subálgebras. Assim, ao lidar com uma subálgebra A de uma álgebra B, é necessário distinguir supremos e ínfimos de A e de B, justificando as seguintes notações.

Definição 2.6. Seja B uma álgebra de Boole e A uma subálgebra de Boole. Dado $M \subseteq A$, denotamos por $\sum^A M$ e $\prod^A M$ respectivamente o supremo de M em A e o ínfimo de M em A.

Mais um cuidado é necessário: se A é uma subálgebra de uma álgebra de conjuntos B e $M \subseteq B$, então se $\bigcup M \in B$, temos que $\sum^B M = \bigcup M = \sum^A M$ pelos mesmos argumentos apresentados no exemplo 2.3. Porém, se $\bigcup M \notin B$, ainda é possível que $\sum^B M$ exista e não coincida com $\sum^A M$, isto é, que $\sum^B M \neq \bigcup M$, por isso também introduzimos a seguinte definição.

Definição 2.7. Dizemos que A é uma subálgebra regular de B se, para todo $M \subseteq A$ tal que $\sum^A M$ existe, $\sum^B M$ existe e $\sum^A M = \sum^B M$ e, para todo $N \subseteq A$ tal que $\prod^A N$ existe, $\prod^B N$ existe e $\sum^A N = \sum^B N$.

Exemplo 2.8. A álgebra de intervalos dos reais não é subálgebra regular de $\wp(\mathbb{R})$.

De fato, considere o subconjunto

$$M = \{[x, +\infty[\mid x > 0\}$$

da álgebra $[\mathbb{R}[$, onde $\mathbb{R}$ está munido de sua ordem linear usual. Claramente $\bigcup M =]0, +\infty[$, porém $]0, +\infty[$ não pode ser escrito como uma união finita de intervalos semi-abertos.

Pelo lema 2.4, sabemos que se $\sum^{[\mathbb{R}[} M$ existir, então ela contém $]0, +\infty[$. Assim, considere que $[0, +\infty[$ é um limitante superior de M que pertence a $[\mathbb{R}[$ e contém apenas um elemento a mais que $]0, +\infty[$, logo é minimal entre os limitantes superiores de M em $[\mathbb{R}[$.

Portanto o supremo de M existe em $[\mathbb{R}[$, mas não coincide com o supremo de M em $\wp(\mathbb{R})$, mostrando a falta de regularidade.

2.2 Aritmética das operações infinitas

Antes de continuarmos o estudo de quais subconjuntos de quais álgebras admitem somatório e produtório, vamos primeiro entender melhor como essas operações se comportam provando algumas propriedades aritméticas delas.

Lema 2.9. *Sejam A uma álgebra de Boole e $M \subseteq A$ tal que $\sum M$ existe. Para cada $a \in A$, temos que $\sum\{a \cdot m \mid m \in M\}$ existe e coincide com $a \cdot \sum M$.*

Demonstração: Como $\sum M$ é o supremo de M, temos $m \leq \sum M$ para cada $m \in M$, logo $a \cdot m \leq a \cdot \sum M$, e assim $a \cdot \sum M$ é um limitante superior do conjunto $\{a \cdot m \mid m \in M\}$. Se s é outro limitante superior deste conjunto, então $a \cdot m \leq s$ para cada $m \in M$, logo $m \leq -a + s$, o que mostra que $-a + s$ é um limitante superior de M, assim $\sum M \leq -a + s$ e daí $a \cdot \sum M \leq s$, portanto $a \cdot \sum M$ é o menor limitante superior de $\{a \cdot m \mid m \in M\}$. ∎

Lema 2.10. *Sejam A uma álgebra de Boole e $\{M_i\}_{i \in I}$ uma família indexada de subconjuntos de A tal que $\sum M_i$ existe para cada $i \in I$. Então o supremo de $\bigcup_{i \in I} M_i$ existe se e só se o supremo de $\{\sum M_i \mid i \in I\}$ existe. Além disso, quando os supremos existem, eles coincidem.*

Demonstração: Seja s um limitante superior de $\bigcup_{i \in I} M_i$, então para todo $m_i \in M_i$, temos que $m_i \leq s$, logo $\sum M_i \leq s$; logo, s é um limitante superior de $\{\sum M_i \mid i \in I\}$. Reciprocamente, se t é um limitante superior de $\{\sum M_i \mid i \in I\}$, então para todo $m_k \in M_k \subseteq \bigcup_{i \in I} M_i$, temos $m_k \leq \sum M_i \leq t$, logo t é um limitante superior de $\bigcup_{i \in I} M_i$.

Portanto, os conjuntos em questão tem os mesmos limitante superiores, de onde segue claramente o resultado. ∎

Lema 2.11. *Sejam A uma álgebra de Boole e M e N subconjuntos dela tais que $\sum M$ e $\sum N$ existem. Então o supremo de $\{m \cdot n \mid m \in M, n \in N\}$ existe e coincide com $\sum M \cdot \sum N$.*

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned}\sum M \cdot \sum N &\overset{2.9}{=} \sum \{\sum M \cdot n \mid n \in N\} \overset{2.9}{=} \sum \{\sum \{m \cdot n \mid n \in N\} \mid m \in M\} \\ &\overset{2.10}{=} \sum \bigcup_{n \in N} \{m \cdot n \mid m \in M\} = \sum \{m \cdot n \mid m \in M, n \in N\},\end{aligned}$$

onde a última igualdade mostra que, pelo lema 2.10, o supremo de $\{m \cdot n \mid m \in M, n \in N\}$ existe. ∎

Agora, tomando a afirmação dual de cada um destes lemas, obtemos propriedades aritméticas do produtório. Para referência futura, enunciamos todos eles a seguir de forma sucinta.

Proposição 2.12. *Sejam A uma álgebra de Boole, $a \in A$ e M, N subconjuntos de A. Para as igualdades indexadas por números, suponha que estes subconjuntos admitem supremo, e para as igualdades indexadas por letras, suponha que eles admitem ínfimo. Então, o lado direito de todas as seguintes igualdades existem e são verdadeiras.*

(i) $a \cdot \sum M = \sum \{a \cdot m \mid m \in M\}$ *(a)* $a + \prod M = \prod \{a + m \mid m \in M\}$

(ii) $\sum M \cdot \sum N = \sum \{m \cdot n \mid m \in M, n \in N\}$ *(b)* $\prod M + \prod N = \prod \{m + n \mid m \in M, n \in N\}$

Agora, seja $\{M_i\}_{i \in I}$ uma família indexada de subconjuntos de A. Então *(iii)* $\sum_{i \in I} \left(\sum M_i \right) = \sum \left(\bigcup_{i \in I} M_i \right)$ *(c)* $\prod_{i \in I} \left(\prod M_i \right) = \prod \left(\bigcup_{i \in I} M_i \right)$

no sentido que se um lado da equação existe, o outro também existe e a equação é verdadeira.

Observe que os itens *(ii)* e *(b)* na proposição anterior podem ser generalizados para uma quantidade finita de subconjuntos através de uma indução simples. Por fim, vamos provar uma generalização de 1.34.

Proposição 2.13 (Leis de De Morgan). *Sejam A uma álgebra de Boole e M um subconjunto de A. Então*

$$-\sum M = \prod\{-m \mid m \in M\} \qquad e \qquad -\prod M = \sum\{-m \mid m \in M\}$$

no sentido que se um lado da equação existe, o outro também existe e a equação é verdadeira.

Demonstração: Suponha que $\sum M$ existe. Então, para cada $m \in M$, temos que $m \leq \sum M$, logo $-\sum M \leq -m$ e portanto $-\sum M$ é um limitante inferior de $\{-m \mid m \in M\}$. Suponha que x seja outro limitante inferior deste conjunto, então $x \leq -m$ para todo $m \in M$, logo $m \leq -x$ e portanto $-x$ é um limitante superior de M, portanto $\sum M \leq -x$ e daí $x \leq -\sum M$.

Os outros resultados seguem do Princípio da Dualidade. ■

Observação 2.14 (Soma e produto vazio). Note que, por vacuidade, temos que $\sum \emptyset = 0$ e $\prod \emptyset = 1$ para toda álgebra de Boole. Isto preserva a seguinte propriedade útil: Se A é uma álgebra de Boole e $N \subseteq M \subseteq A$, então $\sum N \leq \sum M$ e $\prod M \leq \prod N$, se tais somatórios ou produtórios existirem.

2.3 Álgebras relativas e disjunção

Anteriormente, descrevemos em 1.29 um processo de decompor um elemento de uma álgebra em função de outro. Assim, se A é uma álgebra, fixando um elemento $y \in A$, podemos associar cada elemento $x \in A$ a um par da seguinte forma

$$x = x \cdot y + x \cdot -y \mapsto (x \cdot y, x \cdot -y) \in A \times A.$$

Este processo não é sobrejetor, o par $(1, 1)$, por exemplo, nunca é obtido por ele, porém vamos verificar que ele "fatora" a álgebra A de uma forma bem natural.

Definição 2.15. Seja A uma álgebra de Boole e $a \in A$. Definimos que o conjunto

$$A \upharpoonright a = \{x \in A \mid x \leq a\}$$

com a ordem parcial herdada por A é a *álgebra relativa de A com respeito à a.*

Uma álgebra relativa $A \restriction a$ é, de fato, uma álgebra de Boole, já que restringindo a ordem parcial booleana de A à $A \restriction a$, temos que ela é um reticulado distributivo com elemento mínimo 0 e elemento máximo a e cada elemento x tem complemento $a \cdot -x$.

É claro que se $a = 1$, então $A \restriction a$ é simplesmente A. Caso contrário, $1 \notin A \restriction a$, já que os elementos de $A \restriction a$ são menores que $a < 1$ em A. Temos então que $A \restriction a$ não é uma subálgebra de A, por não compartilharem de um mesmo elemento máximo. Apesar disso, como o conjunto $A \restriction a$ está contido em A com ordem parcial herdada de A, podemos inferir resultados em A a partir de $A \restriction a$, por exemplo se $a \cdot b = 0$ ou $a \leq b$ em $A \restriction a$, o mesmo vale em A.

Lema 2.16. *Sejam A uma álgebra de Boole e $a, b \in A$. Então $(A \restriction a) \restriction b = A \restriction (a \cdot b)$.*

Demonstração: Como $(A \restriction a) \restriction b$ e $A \restriction (a \cdot b)$ ambas tem as operações herdadas de A, basta mostrar que os conjuntos são os mesmos. De fato, se $x \in A \restriction (a \cdot b)$, então $x \leq a \cdot b \leq a$. Reciprocamente, se $x \in (A \restriction a) \restriction b$, então $x \in (A \restriction a)$ e $x \leq b$, logo $x \leq a \cdot b$. ■

O produto cartesiano de duas álgebras de Boole pode ser transformado em uma álgebra de Boole definindo as operações coordenada por coordenada. Veremos com mais detalhes essa construção na seção 8, porém a introduzimos agora para facilitar a linguagem do lema seguinte.

Lema 2.17. *Seja A uma álgebra de Boole e $a \in A$. Então $A \cong (A \restriction a) \times (A \restriction -a)$.*

Demonstração: Vamos demonstrar diretamente exibindo um isomorfismo. Sejam

$$\begin{array}{rccc} g: & A & \to & A \restriction a \times A \restriction -a \\ & a & \mapsto & (x \cdot a, x \cdot -a) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} h: & A \restriction a \times A \restriction -a & \to & A \\ & (y, z) & \mapsto & y + z\,. \end{array}$$

É fácil verificar que g é um homomorfismo, pois as operações no produto cartesiano ocorrem coordeana por coordenada. Também é claro que h é a inversa de g, logo g é uma bijeção e portanto um isomorfismo. ■

Este resultado nos permite reduzir a discussão das propriedades de uma álgebra a duas álgebras relativas, desde que tal propriedade seja preservada pelo produto cartesiano. Ele não foi provado cuidadosamente, pois sua generalização será demonstrada com mais detalhes a seguir em 2.20, e queremos evitar repetir os argumentos.

Agora, vamos abstrair quais aspectos de a e $-a$ fazem o lema 2.17 funcionar. Seja A uma álgebra de Boole e $a, b \in A$. Defina $g : A \to A \restriction a \times A \restriction b$ e $h : A \restriction a \times A \restriction b \to A$ por $g(x) = (x \cdot a, x \cdot b)$ e $h(y, z) = y + z$, similar a como foi feito em 2.17.

Suponha que $a + b \neq 1$. Então g não é injetora, pois

$$g(1) = (a, b) = ((a + b) \cdot a, (a + b) \cdot b) = g(a + b).$$

Agora, suponha que $a \cdot b \neq 0$. Então h não é injetora, pois

$$h(a,0) = a = a \cdot b + -a \cdot b = h(a \cdot b, -a \cdot b)$$

e $(a,0) \neq (a \cdot b, -a \cdot b)$, pois se $a = a \cdot b$, então $a < b$ e daí $0 < -a \cdot b$.

Assim, para termos chance de g e h serem bijetoras, é necessário que $a + b = 1$ e $a \cdot b = 0$, isto é, que $b = -a$. Assim, vamos generalizar estes dois aspectos do conjunto $\{a, -a\}$ para um subconjunto qualquer de uma álgebra com a seguinte definição.

Definição 2.18. Sejam A uma álgebra de Boole, $a, b \in A$ e $X \subseteq A$. Dizemos que

- a e b são *disjuntos* se $a \cdot b = 0$.
- X é uma *família de elementos dois a dois disjuntos (em A)* se $0 \notin X$ e quaisquer dois elementos de X são disjuntos.
- X é uma *partição da unidade*, ou *partição de A*, se X é uma família disjunta em A e $\sum X = 1$.

É um abuso de notação comum chamar uma família de elementos dois a dois disjuntos simplesmente de *família disjunta*.

Lema 2.19. *Uma família disjunta é maximal se e só se ela é uma partição da unidade.*

Demonstração: Sejam A uma álgebra de Boole e X uma família disjunta em A. Se $\sum X$ não existe ou é menor que 1, então existe $b < 1$ limitante superior de X, logo $X \cup \{-b\}$ é uma família disjunta em A que contém propriamente X e portanto ele não é maximal.

Reciprocamente, suponha que $\sum X = 1$ é X não é maximal, então existe $y \in A$ tal que $X \cup \{y\}$ é uma família disjunta. Então, por 2.12(iii), $\sum X \cup \{y\} = \sum X + y$. Além disso, por 2.12(i), temos que $y \cdot \sum X = \sum\{y \cdot x \mid x \in X\} = \sum 0 = 0$, logo $y \not\leq \sum X$ e portanto $\sum X + y > \sum X = 1$, um absurdo. ∎

Teorema 2.20. *Seja A uma álgebra de Boole e $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ uma partição finita da unidade. Então*

$$\begin{array}{rccc} g: & A & \to & A \restriction x_1 \times \cdots \times A \restriction x_n \\ & a & \mapsto & (a \cdot x_1, \ldots, a \cdot x_n) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} h: & A \restriction x_1 \times \cdots \times A \restriction x_n & \to & A \\ & (y_1, \ldots, y_n) & \mapsto & y_1 + \cdots + y_n \end{array}$$

são isomorfismos, e inversos um do outro, que atestam que $A \cong A \restriction x_1 \times \cdots \times A \restriction x_n$.

Demonstração: Para verificar que g é um homomorfismo, basta verificar que ele é um homomorfismo coordenada a coordenada. Assim, considere para $a \in A$ a função $p_a : A \to A \restriction a$ dada por $p_a(x) = a \cdot x$. Devido as propriedades distributivas, complementares e o fato que a é o máximo de $A \restriction a$, p_a é um homomorfismo.

Então g também é um homomorfismo, pois $g(x) = (p_{x_1}(x), \dots, p_{x_n}(x))$. Analogamente, como h só soma todas as coordenadas do produto cartesiano, pelas propriedades distributivas, complementares e pelo fato que $h(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n = 1$, temos que h é um homomorfismo.

Vamos mostrar que g e h são isomorfismos ao mostrar que eles são inversos um do outro. De fato:

$$h(g(x)) = h(x \cdot x_1, \dots, x \cdot x_n) = x \cdot x_1 + \cdots + x \cdot x_n = x \cdot (x_1 + \cdots + x_n) = x \cdot 1 = x$$

e

$$\begin{aligned} g(h(y_1, \cdots, y_n)) = g(y_1 + \cdots + y_n) &= (x_1 \cdot (y_1 + \cdots + y_n), \dots, x_n \cdot (y_1 + \cdots + y_n)) \\ &= (x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_1 \cdot y_n, \dots, x_n \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n) = (y_1, \cdots, y_n), \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do fato de que para $i \in \{1, \dots, n\}$, temos que $y_i \leq x_i$ e para $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, temos que $x_i \cdot y_j \leq x_i \cdot x_j = 0$. ∎

Generalizações desse resultado dependem da completude da álgebra A, para que a função h esteja bem definida, como mostraremos na seção 8.

Álgebras relativas também são chamadas álgebras de fatores em algumas literaturas devido ao resultado acima, já que ele permite "fatorar" uma álgebra em álgebras relativas dela. Na subseção 8, veremos que toda decomposição de uma álgebra em um produto cartesiano surge desta forma.

Por fim, vamos usar este teorema para determinar exatamente as possíveis cardinalidades de álgebras de Boole finitas.

Proposição 2.21. *Seja $n \in \omega$. Então n é a cardinalidade de uma álgebra de Boole se e somente se existe $k \in \omega$ tal que $n = 2^k$.*

Demonstração: Se $n = 2^k \in \omega$, então $\wp(k)$ é uma álgebra de Boole finita de tamanho n. Reciprocamente, seja A uma subálgebra de Boole finita de cardinalidade n. Se $n = 1$, tome $k = 0$. Caso contrário, como A é finita e não trivial, existem finitas partições de A e então é possível escolher $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ uma partição de A com cardinalidade maximal entre as partições de A.

Pelo teorema 2.20, temos que $A \cong A \restriction x_1 \times \cdots \times A \restriction x_k$. Suponha por absurdo que $|A \restriction x_i| > 2$ para algum $i \in \{1, \dots, k\}$, então existe $a \in A \restriction x_i$ tal que $0 < a < x_i$, mas então temos que o subconjunto $\{x_1, \dots, x_{i-1}, a, -a, x_{i+1}, \dots, x_k\}$ de A é uma partição da unidade que contradiz a maximalidade de X, um absurdo, portanto

$$|A| = |A \restriction x_1 \times \cdots \times A \restriction x_k| = |A \restriction x_1| \cdot \cdots \cdot |A \restriction x_k| = \underbrace{2 \cdot \cdots \cdot 2}_{k \text{ vezes}} = 2^k$$

e assim $n = 2^k$. ∎

A álgebra obtida pelo produto finito consecutivo da álgebra 2 é muito útil na discussão de álgebras finitas, portanto vamos denotar a álgebra $\underbrace{2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ vezes}}$ simplesmente por 2^n. Estendendo a definição para 2^0 afirmando que ela é a álgebra trivial, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 2.22. *Toda álgebra finita é isomorfa a 2^n para algum $n \in \omega$. Mais precisamente, dada uma álgebra finita A, existe X uma partição maximal da unidade tal que $A \cong 2^{|X|}$.*

O corolário anterior justifica restringir a análise de álgebras finitas às álgebra da forma 2^n, quando isto for conveniente. Um cuidado aqui é necessário, já que simultaneamente usamos 2^n para denotar as álgebras de Boole finitas e o seu uso comum de exponenciação de números naturais, de forma que a *álgebra* 2^n tem *cardinalidade* 2^n.

2.4 Celularidade

A utilização de partições maximais na caracterização das álgebras finitas nos motiva a descrever os possíveis tamanhos de famílias disjuntas em uma álgebra de Boole, o que será feito nessa subseção através do invariante cardinal da celularidade.

Definição 2.23. Seja A uma álgebra de Boole. Definimos o cardinal

$$\mathrm{c}A = \sup\{|X| \mid X \text{ é uma família disjunta em } A\}$$

e o denominamos a *celularidade de A*. Se existir uma família disjunta X em A tal que $|X| = \mathrm{c}A$, dizemos que a celularidade de A é atingida (por X). Para $a \in A$, definimos

$$\mathrm{c}_A a = \mathrm{c}(A \upharpoonright a)$$

e denotamos $\mathrm{c}_A a$ simplesmente por $\mathrm{c}a$ se A for subentendida.

Note que sempre temos um limitante superior trivial para a celularidade, a cardinalidade da própria álgebra. Vamos começar determinando a celularidade de álgebras finitas e mostrando que toda álgebra infinita tem celularidade também infinita.

Proposição 2.24. *Sejam A uma álgebra finita e $k \in \omega$ tal que $A \cong 2^k$. Então $\mathrm{c}A = k$ e é atingida.*

Demonstração: Seja $A \cong 2^k$ uma álgebra finita e considere, assim como na demonstração da proposição 2.21, X uma partição de A de cardinalidade maximal, de forma que $\mathrm{c}A = |X|$. Então $2^k = |A| = |2^{|X|}| = 2^{|X|}$ e daí $|X| = k$. Claramente a celularidade é atingida por X. ∎

Corolário 2.25. *Se A é uma álgebra de Boole finita, então $A \cong 2^{\mathrm{c}A}$.*

Lema 2.26. *Em toda álgebra de Boole infinita, existe uma sequência estritamente crescente e uma sequência estritamente decrescente.*

Demonstração: Seja A uma álgebra de Boole infinita. Vamos construir uma sequência $(a_n)_{n\in\omega}$ estritamente decrescente em A. Seja $a_0 = 1$ e assuma que a_i já foi construída de forma estritamente decrescente e tal que $A \upharpoonright a_i$ é infinita para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Como a álgebra $A \upharpoonright a_n$ é infinita, é possível escolher um elemento a dela tal que $0 < a < a_n$. Se $A \upharpoonright a$ for infinita, defina $a_{n+1} = a_n$. Caso contrário, pelo lema 2.17, temos que

$$\begin{aligned}|A \upharpoonright a_n| &= |(A \upharpoonright a_n) \upharpoonright a| \cdot |(A \upharpoonright a_n) \upharpoonright -a| \overset{2.16}{=} |A \upharpoonright (a_n \cdot a)| \cdot |A \upharpoonright (a_n \cdot -a)| \\ &= |A \upharpoonright a| \cdot |A \upharpoonright (a_n \cdot -a)| = |A \upharpoonright (a_n \cdot -a)|,\end{aligned}$$

portanto $A \upharpoonright (a_n \cdot -a)$ é infinita, defina $a_{n+1} = a_n \cdot -a$. Neste caso, também temos que $a_{n+1} < a_n$, pois, caso contrário, teríamos que $a_n \cdot -a = a_n$, logo $a_n < -a$ e daí $a < -a_n$, contradizendo que $a < a_n$.

Portanto, $(a_n)_{n\in\omega}$ é uma sequência estritamente decrescente em A e $(-a_n)_{n\in\omega}$ é uma sequência estritamente crescente em A. ■

Proposição 2.27. *Em toda álgebra de Boole infinita, existe uma família disjunta enumerável e uma partição da unidade infinita.*

Demonstração: Seja A uma álgebra de Boole infinita. Pelo lema 2.26, seja $(a_n)_{n\in\omega}$ uma sequência estritamente crescente e defina a sequência $d_n = a_n \cdot -a_{n+1}$. Vamos mostrar que $D = \{d_n \mid n \in \omega\}$ é uma família disjunta em A. De fato, se $n \in m \in \omega$, então

$$d_n \cdot d_m = (a_n \cdot -a_{n+1}) \cdot (a_m \cdot -a_{m+1}) = a_n \cdot -a_{m+1} \leq a_n \cdot -a_n = 0\,.$$

Por fim, é uma consequência do Lema de Zorn que D pode ser estendida a uma família disjunta D' maximal em A e, pelo lema 2.19, D' é uma partição da unidade, que é infinita por conter D. ■

Corolário 2.28. *Seja A uma álgebra infinita. Então $cA \geq \aleph_0$.*

O corolário acima implica que toda álgebra enumerável possui uma família disjunta também enumerável, e logo sua celularidade é atingida. É natural perguntar se é possível estender esse resultado, isto é, se para toda álgebra de Boole A, existe uma família disjunta de cardinalidade $|A|$. Na seção 9, veremos que as álgebras de Boole livres são um contraexemplo forte desta pergunta, já que elas podem ter qualquer cardinalidade desejada, mas contêm somente famílias disjuntas enumeráveis. Este fato justifica a próxima definição.

Definição 2.29. Seja A uma álgebra de Boole e κ um cardinal. Definimos o cardinal

$$\mathrm{sat}A = \sup\{|X|^+ \mid X \text{ é uma família disjunta em } A\}$$

e o denominamos a saturação de A. Dizemos que A satisfaz a condição de κ-cadeia se $\mathrm{sat}A \leq \kappa$, isto é, toda família disjunta de A tem cardinalidade menor que κ. Se A satisfaz a condição de $\aleph_1$-cadeia, dizemos que A satisfaz a condição de cadeia enumerável.

Observação 2.30. Usualmente, uma anti-cadeia de uma ordem parcial $(P, \leq_P)$ é um conjunto $X \subseteq P$ tal que para $x, y \in X$ distintos, não existe $z \in P$ tal que $z < x$ e $z < y$. Neste sentido, álgebras de Boole não tem anti-cadeias, já que 0 é um elemento mínimo. Porém, desconsiderando o 0, os conceitos coincidem, isto é, dada uma álgebra de Boole A, uma família disjunta X é uma anti-cadeia em A^+, já que para $x, y \in X$, temos $x \cdot y = 0 \notin A^+$.

Por isso, famílias disjuntas de álgebras de Boole são às vezes denominadas anti-cadeias. Assim, como a condição de κ-cadeia determina a cardinalidade máxima de anti-cadeias, ela deveria ser mais apropriadamente denominada a condição de κ-anti-cadeia[1].

Abreviamos a condição de κ-cadeia por κ-cc, do inglês *κ-chain condition*, e a condição de cadeia enumerável por ccc, do inglês *countable chain condition*.

É claro que se $\mathrm{c}A$ é atingida, $\mathrm{sat}A$ é simplesmente $(\mathrm{c}A)^+$ e $\mathrm{sat}A = \mathrm{c}A$ caso contrário.

Lema 2.31. *Seja A uma álgebra de Boole e $a \in A$. Se $\mu < \mathrm{c}a$ para algum cardinal μ, então existe uma família disjunta de cardinalidade μ em $A \upharpoonright a$ e em A.*

Demonstração: Se $\mu < \mathrm{c}a$, então existe uma família disjunta Y em $A \upharpoonright a$ satisfazendo $|Y| \geq \mu$, seja X um subconjunto de Y de cardinalidade μ. Então X é uma família disjunta de cardinalidade μ em $A \upharpoonright a$ e $X \cup \{-a\}$ é uma família disjunta de cardinalidade μ em A. ■

Teorema 2.32 (Erdös-Tarski)**.** *Seja A uma álgebra de Boole. Se $\mathrm{c}A$ é um cardinal singular, então $\mathrm{c}A$ é atingida.*

Demonstração: Para facilitar a notação, seja $\lambda = \mathrm{c}A$ e κ a sua cofinalidade. Pela singularidade de λ, existe uma sequência estritamente crescente de cardinais $(\lambda_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ tal que $\sup_{\alpha<\kappa} \lambda_\alpha = \lambda$. Seja

$$S = \{a \in A^+ \mid \mathrm{c}a < \mathrm{c}A\}$$

e fixe, pelo Lema de Zorn, uma família disjunta X que é maximal entre as famílias disjuntas de A contidas em S. Vamos dividir a demonstração em três casos e em cada um deles encontrar uma família disjunta em A de cardinalidade λ.

[1]O que evitaria a compreensível confusão presente em frases como "Existem álgebras de Boole que satisfazem a condição de cadeia enumerável e contém cadeias não enumeráveis".

1º caso: *Existe $b \in A$ tal que $cx = cA$ para todo $x \in (A \upharpoonright b)^+$.*

Pela singularidade de λ, temos que $\kappa < \lambda = cb$, então, pelo lema 2.31, seja $\{b_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ uma família disjunta em $A \upharpoonright b$. Para cada $\alpha < \kappa$, pela hipótese desse caso, temos que $cb_\alpha = \lambda > \lambda_\alpha$, assim, novamente pelo lema 2.31, existe Z_α uma família disjunta em $A \upharpoonright b_\alpha$ de cardinalidade λ_α. Seja $Z = \bigcup_{\alpha<\kappa} Z_\alpha$. Claramente Z é uma família disjunta em A e

$$|Z| = \sum_{\alpha<\kappa} |Z_\alpha| = \sum_{\alpha<\kappa} \lambda_\alpha = \lambda.$$

2º caso: *O 1º caso falha e $\sup_{x\in X} cx = \lambda$.*

Se o primeiro caso falha, então S é não vazio e vamos mostrar que X é uma partição de A. De fato, seja $b < 1$, como o primeiro caso falha e $-b > 0$, existe algum $s \in S$ tal que $s \leq -b$, logo b não é um limitante superior de X, portanto $\sum X = 1$.

Como $X \subseteq S$, temos que $cx < \lambda$ para cada $x \in X$, e como $\sup_{x\in X} cx = \lambda$, para cada λ_α com $\alpha < \kappa$ existe $x_\alpha \in X$ tal que $\lambda_\alpha < cx_\alpha < \lambda$. Para cada $\alpha < \kappa$, seja Z_α uma família disjunta em $A \upharpoonright x_\alpha$ de tamanho λ_α, que existe pelo lema 2.31, e seja $Z = \bigcup_{\alpha<\kappa} Z_\alpha$. Pela disjunção dois a dois dos elementos de X, temos que Z é uma família disjunta em A e pelo mesmo cálculo do primeiro caso, temos que Z tem cardinalidade λ.

3º caso: *O 1º e o 2º caso falham.*

Pela falha do primeiro caso, temos novamente que X é uma partição de A e ,pela falha do 2º caso, temos que $\sup_{x\in X} cx < \lambda$. Neste caso, vamos mostrar que X é uma família disjunta de cardinalidade λ.

De fato, X já é uma família disjunta e suponha por absurdo que $|X| < \lambda$ e defina

$$\mu = \sup_{x\in X} cx\,, \quad \mu' = (\max\{\mu, |X|\})^+\,;$$

então, pela hipótese do caso, temos que $\mu < \lambda$ e como λ é singular, ele é um cardinal limite, então também temos que $\mu' < \lambda$. Novamente pelo lema 2.31, seja Y uma família disjunta em A de tamanho μ' e considere, para cada $x \in X$, o conjunto

$$Y_x = \{y \in Y \mid x \cdot y > 0\}.$$

Como X é uma partição da unidade, cada cada $y \in Y$ existe algum $x_0 \in X$ tal que $y \cdot x_0 > 0$, pois caso contrário, $X \cup \{y\}$ contradiria a maximalidade de X. Portanto $\bigcup_{x\in X} Y_x = Y$. Por fim, para cada $x \in X$, temos que $Z_x = \{x \cdot y \mid y \in Y_x\}$ é uma família disjunta em $A \upharpoonright x$ de cardinalidade $|Y_x|$. Segue que, para cada $x_0 \in X$,

$$|Y_{x_0}| = |Z_{x_0}| \leq cx_0 \leq \sup_{x\in X} cx = \mu$$

e portanto

$$\mu' = |Y| = |\bigcup_{x\in X} Y_x| \leq \sum_{x\in X} |Y_x| \leq \sum_{x\in X} \mu = |X| \cdot \mu < \mu' ,$$

um absurdo, portanto $|X| = \lambda$. ■

Corolário 2.33. *Para toda álgebra de Boole, a sua saturação é um cardinal regular.*

Demonstração: Se $\mathrm{c}A$ não é atingida, então $\mathrm{c}A$ é a saturação de A e, pelo teorema anterior, $\mathrm{c}A$ não pode ser singular. Se $\mathrm{c}A$ é atingida, então a saturação de A é o cardinal sucessor $(\mathrm{c}A)^+$, que é regular. ■

Por fim, vamos mostrar que a celularidade é, de fato, um invariante de álgebras de Boole e usar esta invariabilidade para provar um resultado comum sobre isomorfismos entre álgebras finitas.

Lema 2.34. *Seja $f : A \to B$ uma função entre álgebras de Boole e X uma partição de A. Se f é um isomorfismo, então $f[X]$ é uma partição de B.*

Demonstração: Sejam f como no enunciado e X uma família disjunta em A. Suponha que $\sum f[X]$ não existe ou é menor que 1, então existe $y \in B$ tal que $f(x) \leq y < 1$ para todo $x \in X$ e, pela sobrejeção de f, existe $z \in A$ tal que $f(z) = y$. Como f é um isomorfismo de ordem, temos que $f(x) \leq f(z) < 1$ implica $x \leq z < 1$ para todo $x \in X$, assim se $\sum X$ existir, teremos que $\sum X \leq z < 1$ e portanto X não é maximal. O lema segue pela contrapositiva do que acabamos de provar. ■

Teorema 2.35. *Se $A \cong B$, então $\mathrm{c}A = \mathrm{c}B$.*

Demonstração: Seja $f : A \to B$ um isomorfismo. Então

$$\begin{aligned}
\mathrm{c}A &= \sup\{|X| \mid \text{X é uma família disjunta em } A\} \\
&= \sup\{|X| \mid \text{X é uma partição de } A\} \\
&= \sup\{|f[X]| \mid \text{X é uma partição de } A\} \\
&\overset{2.34}{\leq} \sup\{|Y| \mid \text{Y é uma família disjunta em } B\} = \mathrm{c}B
\end{aligned}$$

e como f^{-1} também é um isomorfismo, segue que $\mathrm{c}B \leq \mathrm{c}A$. ■

Teorema 2.36. *Sejam A e B álgebras de Boole finitas. Então $A \cong B$ se e somente se $|A| = |B|$.*

Demonstração: Para a direção não trivial do teorema, suponha que $|A| \neq |B|$ e, pelo 2.25, temos que $A \cong 2^{\mathrm{c}A}$ e $B \cong 2^{\mathrm{c}B}$. Como $2^{\mathrm{c}A} = |A| \neq |B| = 2^{\mathrm{c}B}$, segue que $\mathrm{c}A \neq \mathrm{c}B$ e portanto $A \ncong B$. ■

2.5 κ-Completude

Vimos anteriormente que as operações $\sum$ e $\prod$ estão definidas para alguns subconjuntos de uma álgebra, mas não necessariamente para todos. Vamos agora considerar as álgebras nas quais todo subconjuntos que tem até certa cardinalidade admitem supremo e ínfimo na ordem parcial booleana.

Definição 2.37. Sejam A uma álgebra de Boole e κ um cardinal infinito. Dizemos que A é κ-completa se todo subconjunto de A de cardinalidade estritamente menor que κ admite somatório em A. Se uma álgebra for $\aleph_1$-completa, dizemos simplesmente que ela é σ-completa.

A definição acima parece negligenciar o produtório, mas, como vimos em 2.13, dado um subconjunto M de uma álgebra de Boole A, temos que $\prod M = -\sum\{-m \mid m \in M\}$, então escrevemos o produtório de M em função do somatório de um conjunto de mesma cardinalidade. Portanto se uma álgebra for κ-completa, todo subconjunto dela de cardinalidade estritamente menor que κ também admite ínfimo em A.

Quanto a cardinalidade de álgebras κ-completas, já vimos que álgebras finitas são trivialmente completas, vamos mostrar a seguir que não existe álgebra enumerável κ-completa.

Proposição 2.38. *Seja A uma álgebra de Boole. Se A é σ-completa, então existe uma subálgebra de A isomorfa à $\wp(\omega)$.*

Demonstração: Pela proposição 2.27, fixe F uma família disjunta enumerável em A. Como A é σ-completa, $\sum F$ existe, assim seja $D = F$ se $\sum F = 1_A$ e $D = F \cup \{-\sum F\}$ caso contrário, de forma que D é uma partição de A. Enumere $D = \{d_m \mid m \in \omega\}$. Vamos mostrar que a função

$$\begin{array}{rccc} f: & \wp(\omega) & \to & A \\ & M & \mapsto & \sum\limits_{m \in M} d_m \end{array}$$

é um monomorfismo e logo $f[\wp(\omega)]$ é a subálgebra de A que procuramos.[2]

Primeiramente, f está bem definida pela σ-completude de A. Vamos mostrar que f é um homomorfismo. De fato, sejam $M, N \in \wp(\omega)$, então

$$\begin{aligned} f(M \cup N) &= \sum_{m \in M \cup N} d_m = \sum_{m \in M \setminus N} d_m + \sum_{m \in M \cap N} d_m + \sum_{m \in N \setminus M} d_m \\ &= \sum_{m \in M \setminus N} d_m + \sum_{m \in M \cap N} d_m + \sum_{m \in M \cap N} d_m + \sum_{m \in N \setminus M} d_m \\ &= \sum_{m \in M} d_m + \sum_{m \in N} d_m = f(M) + f(N) \end{aligned}$$

[2]Não mostramos ainda que imagens de homomorfismos são (sub)álgebras de Boole, mas para aqueles familiarizados com funções que preservam estrutura, o resultado deve parecer natural mesmo sem demonstração. Para o(a) leitor(a) insatisfeito(a), recomendamos ler a proposição 3.20 antes de continuar.

e

$$f(M \cap N) = \sum_{m \in M \cap N} d_m = \sum\{d_m \cdot d_n \mid m \in M, n \in N\} = \sum_{m \in M} d_m \cdot \sum_{n \in N} d_n = f(M) \cdot f(N).$$

Agora, para verificar que f preserva complemento, para $M \in \wp(\omega)$, considere que

$$f(M) + f(\omega \setminus M) = \sum_{m \in M} d_m + \sum_{m \in \omega \setminus M} d_m = \sum M = 1_A$$

e

$$f(M) \cdot f(\omega \setminus M) = \sum_{m \in M} d_m \cdot \sum_{m \in \omega \setminus M} d_m = \sum\{d_n \cdot d_m \mid m \in M, n \in \omega \setminus M\} = \sum 0 = 0_A.$$

Por fim, f preserva mínimo e máximo, pois $f(\emptyset) = \sum_{m \in \emptyset} d_m \overset{2.14}{=} 0_A$ e $f(\omega) = \sum_{m \in \omega} d_m = \sum M = 1_A$.

Agora, vamos verificar que f é injetora. Se M e N são subconjuntos disjuntos de ω, então podemos supor sem perda de generalidade que existe $i \in M \setminus N$. Assim

$$d_i \cdot f(M) = d_i \cdot \sum_{m \in M} d_m = d_i > 0 = \sum_{n \in N} d_m \cdot d_n = d_m \cdot \sum_{n \in N} d_n = d_i \cdot f(N),$$

portanto $f(M) \neq f(N)$. ■

Corolário 2.39. *Toda álgebra σ-completa tem cardinalidade mínima $2^{\aleph_0}$.*

Observação 2.40. Tomando o conjunto Y do exemplo 2.5 enumerável, temos que FinCofin$X$ não é nem σ-completa para X infinito. Em particular, para X enumerável, o corolário anterior mostra que FinCofin$X$ não poderia ser σ-completa.

A próxima proposição também fornece um critério para determinar falta de completude e, assim como a anterior, diz que as álgebras completas são "grandes" em algum sentido, já que determina que elas não podem ser construídas através de uma união enumerável de uma cadeia de subálgebras próprias.

Proposição 2.41. *Seja A uma álgebra de Boole e $\{A_n\}_{n \in \omega}$ uma cadeia de subálgebras próprias de A. Se $\bigcup_{n \in \omega} A_n = A$, então A não é σ-completa.*

Demonstração: Sejam A e $\{A_n\}_{n \in \omega}$ como no enunciado. Defina a função $h : A \to \omega$ dada por

$$h(a) = \min\{n \in \omega \mid a \in A_n\},$$

o subconjunto

$$S = \{a \in A \mid A \restriction a \subseteq A_n \text{ para algum } n \in \omega\}$$

e $L = A \setminus S$ seu complemento. Provaremos duas afirmações sobre L e h.

Afirmação 1: *Se $a + a' \in L$, então $a \in L$ ou $a' \in L$.*

Vamos provar a contrapositiva da afirmação: se $a, a' \in S$, então existem $n, m \in \omega$ tais que $A \upharpoonright a \subseteq A_n$ e $A \upharpoonright a' \subseteq A_m$. Como $\{A_n\}_{n\in\omega}$ é uma cadeia, podemos supor sem perda de generalidade que $A_m \subseteq A_n$ e daí $A \upharpoonright a$ e $A \upharpoonright a'$ estão ambos contidos em A_n. Seja $r \leq a + a'$, então

$$r = r \cdot (a + a') = \underbrace{r \cdot a}_{\in A\upharpoonright a \subseteq A_n} + \underbrace{r \cdot a'}_{\in A\upharpoonright a' \subseteq A_n} \in A_n$$

e portanto $A \upharpoonright (a + a') \subseteq A_n$, mostrando que $a + a' \in S$.

Afirmação 2: *Se $a \in L$ e $n \in \omega$, então existe $b \leq a$ tal que $h(b) > n$ e $a \cdot -b \in L$.*

Como $a \in L$, existe algum $a' \in A \upharpoonright a$ tal que $h(a') > \max\{n, h(a)\}$. Além disso, temos que $h(a \cdot -a') = h(a')$, pois $a, -a' \in A_{h(a')}$ e se $h(a \cdot -a') < h(a')$, teríamos que

$$a' = a \cdot (a \cdot -a') \in A_{\max\{h(a), h(a\cdot -a')\}} ,$$

contradizendo que $h(a') > h(a)$.

Como $a' + a \cdot -a' = a \in L$, pela afirmação 1, temos que $a' \in L$ ou $a \cdot -a' \in L$. Se $a \cdot -a' \in L$, seja $b = a'$ e então $a \cdot -b = a \cdot -a' \in L$ e $h(b) = h(a') > n$; se $a' \in L$, seja $b = a \cdot a'$ e então $a \cdot -b = a' \in L$ e $h(b) = h(a \cdot -a') = h(a') > n$. Em ambos os casos, temos que $b \leq a$.

Agora, vamos construir uma sequência $(d_n)_{n\in\omega}$ de elementos positivos de A tal que, para cada $n \in \omega$, temos que

- $\{d_k \mid k \leq n\}$ é uma família disjunta;
- $h(d_n) > n$;
- $-(d_0 + \cdots + d_n) \in L$.

Como $\{A_n\}_{n\in\omega}$ é uma cadeia estritamente crescente, temos que $1 \in L$, logo pela segunda afirmação, existe $b_0 \leq 1$ tal que $h(b_0) > 1$ e $1 \cdot -b_0 = -(b_0) \in L$. Seja $d_0 = b_0$. Claramente $\{d_0\}$ é uma família disjunta.

Suponha d_k construídos até $n - 1$. Como $-(d_0 + \cdots + d_{n-1}) \in L$, novamente pela segunda afirmação, existe $b_n \leq -(d_0 + \cdots + d_{n-1})$ tal que $h(b_n) > n$ e

$$-(d_0 + \cdots + d_{n-1}) \cdot -b_n = -d_0 \cdot \cdots \cdot -d_{n-1} \cdot -b_n = -(d_0 + \cdots + d_{n-1} + b_n) \in L.$$

Seja $d_n = b_n$. Como $\{d_0, \ldots, d_{n-1}\}$ é uma família disjunta, basta verificar que $d_n \cdot d_k = 0$ para todo $k < n$ e isto segue do fato que $d_n \leq -(d_0 + \cdots + d_{n-1}) \leq -d_k$ e logo $d_n \cdot d_k \leq 0$.

Finalmente, suponha por absurdo que A é σ-completa e seja $\{N_k \mid k \in \omega\}$ uma partição disjunta de ω tal que cada N_k é infinito. Pela σ-completude de A, seja

$$s_k = \sum\{d_n \mid n \in N_k\}.$$

Como cada N_k é infinito, é possível escolher $m_k \in N_k$ tal que $m_k \geq \max\{k, h(s_k)\}$. Novamente, por σ-completude de A, seja

$$x = \sum\{d_{m_i} \mid i \in \omega\}.$$

Assim, para $k \in \omega$, temos que

$$x \cdot s_k = \sum\{d_{m_i} \cdot d_n \mid i \in \omega, n \in N_k\} = \sum\{d_x \mid x \in \{m_i \mid i \in \omega\} \cap N_k\} = \sum d_{m_k} = d_{m_k}$$

e como $x \in A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$, existe $k \in \omega$ tal que $x \in A_k$, mas então, pela forma que m_k foi escolhido, temos que $x, s_k \in A_{m_k}$ e logo $d_{m_k} \in A_{m_k}$, o que é um absurdo, pois contradiz que $h(d_{m_k}) > m_k$. Portanto A não pode ser σ-completa. ■

Uma pergunta natural é se para todo cardinal κ, existe uma álgebra de Boole de cardinalidade maior que κ que é κ-completa. De fato, $\wp(\kappa)$ é completo, pelo exemplo 2.3, e tem cardinalidade maior que κ.

Uma pergunta mais interessante é se existe uma álgebra de Boole κ-completa que falha em ser κ^+-completa. Vamos responder essa pergunta positivamente para cardinais regulares introduzindo uma nova álgebra que generaliza a álgebra finita-cofinita.

Exemplo 2.42 (Álgebra κ-completa que não é κ^+-completa)**.** Seja X um conjunto e κ um cardinal regular. Definimos

$$\kappa\text{-FinCofin}X = \{Y \subseteq X \mid |Y| < \kappa \text{ ou } |X \setminus Y| < \kappa\}.$$

Pelos mesmos argumentos do exemplo 1.5, temos que κ-FinCofin$X$ é uma álgebra de Boole. Em particular, $\aleph_0$-FinCofin$X$ é simplesmente FinCofin$X$. Naturalmente, temos que κ-FinCofin$X$ é uma subálgebra de $\wp(X)$ que é própria se e somente se X tem cardinalidade maior ou igual que κ.

A sua κ-completude é um resultado imediato da sua regularidade, já que se um subconjunto M dela tem cardinalidade menor que κ, então o mesmo ocorre com $\bigcup M$.

Para verificar a falta de κ^+-completude de κ-FinCofin$X$, basta considerar um subconjunto S de X tal que S e $X \setminus S$ tem ambos cardinalidade κ. Então o conjunto de unitários $\{\{s\} \mid s \in S\}$ é um subconjunto de κ-FinCofin$X$ de cardinalidade κ no qual todo limitante superior dele não é minimal.

2.6 Refinamentos disjuntos

Dado a utilidade e uso constante de famílias disjuntas, uma pergunta interessante é: dado um subconjunto de uma álgebra de Boole, é possível "diminuir" seus elementos na ordem booleana para obter uma família disjunta em A? Vamos ver duas respostas positivas dependendo de completude e celularidade.

Definição 2.43. Sejam A uma álgebra de Boole e $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ e $(b_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ sequências em A indexadas num cardinal κ. Dizemos que

- $(b_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ é um *refinamento* de $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$, se $b_\alpha \leq a_\alpha$ para cada $\alpha < \kappa$;
- $(b_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ é um *refinamento disjunto* de $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$, se $(b_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ é um refinamento de $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ e $\{b_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ é uma família disjunta em A.

Em ambos os casos, estendemos a definição para um subconjunto qualquer de uma álgebra de Boole indexando ele em seu cardinal.

Refinamentos disjuntos não precisam existir em geral e mesmo quando existem, podem ser bem difíceis de determinar, normalmente dependendo de uma construção transfinita.

Exemplo 2.44. (Conjunto que não admite refinamento disjunto) Seja

$$M = \{[a,b[\mid a,b \in \mathbb{Q} \text{ e } a < b\},$$

subconjunto da álgebra $[\mathbb{R}[$. Vamos mostrar que nenhum refinamento de M pode ser disjunto.

Seja N um refinamento de M, então para $[a,b[\in M$, seja $r \in N$ tal que $r \subseteq [a,b[$. Se r não é vazio, então existem $c,d \in \mathbb{R}$ tais que $[c,d[\subseteq r$. Por fim, pela densidade dos racionais na reta real, existem $x,y \in \mathbb{Q}$ tais que $c < x < y < d$, e como $a \leq c < d \leq b$, temos que $[a,b[\cap r \supseteq [a,b[\cap [x,y[= [x,y[\neq \emptyset$ e $[x,y[\in [\mathbb{R}[$, portanto N não é um refinamento disjunto de M.

Dado uma álgebra de Boole A, é uma consequência imediata da definição acima que nenhuma sequência indexada por um cardinal maior ou igual que $\operatorname{sat} A$ pode ter refinamento disjunto. O teorema a seguir lida com este caso.

Teorema 2.45. *Seja A uma álgebra de Boole e $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ uma sequência em A indexada num cardinal κ. Se A é κ-completa, então existe $(b_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ um refinamento de $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ tal que $\{b_\alpha \mid \alpha < \kappa\} \setminus \{0\}$ é uma família disjunta em A e*

$$\sum_{\alpha<\kappa} a_\alpha = \sum_{\alpha<\kappa} b_\alpha \,,$$

se algum destes somatórios existirem.

Demonstração: Seja $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ como no enunciado e defina

$$b_\alpha = a_\alpha \cdot \prod_{\beta<\alpha} -a_\beta = a_\alpha \cdot - \sum_{\beta<\alpha} a_\beta$$

para cada $\alpha < \kappa$. Então claramente $(b_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ é um refinamento de $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ e, para $\beta < \alpha < \kappa$, temos que $b_\beta \leq a_\beta$ e $b_\alpha \leq -a_\beta$, portanto $b_\beta \cdot b_\alpha = 0$. Vamos mostrar por indução que $\{b_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ e $\{a_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ tem os mesmos limitantes superiores, provando a última afirmação do teorema. Claramente $a_0 = b_0$. Suponha que o resultado vale para $\gamma < \kappa$ e então

$$\sum_{\beta<\gamma+1} b_\beta = b_\gamma + \sum_{\beta<\gamma} b_\beta = a_\gamma \cdot - \sum_{\beta<\gamma} a_\beta + \sum_{\beta<\gamma} a_\beta = a_\gamma + \sum_{\beta<\gamma} a_\beta = \sum_{\beta<\gamma+1} a_\beta$$

e se λ for um ordinal limite tal que o resultado vale para todo ordinal menor que ele, temos que, para todo c limitante superior de $\{b_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$, $a_\lambda \leq \sum_{\alpha\leq\lambda} b_\alpha \leq c$, portanto c também limita superiormente $\{a_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$. ∎

O exemplo 2.44 mostra que a hipótese de κ-completude no teorema acima é necessária, já que nele M é enumerável, mas $[R[$ não é σ-completa.

Note que retirar o elemento 0 do conjunto $\{b_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ também é uma condição necessária, como discutimos anteriormente. Por exemplo, se A satisfazer ccc e κ for não enumerável, então apenas uma quantidade enumerável de b_α's podem ser diferentes de 0.

Assim, para obter um resultado que sempre resulta num refinamento disjunto, sem possivelmente descartar nenhum elemento da sequência original, precisamos assumir mais sobre a celularidade da álgebra.

Teorema 2.46 (Balcar-Vojtás)**.** *Sejam A uma álgebra de Boole e κ um cardinal infinito. Se $\kappa^+ \leq cx$ para todo $x \in A^+$, então toda sequência de elementos positivos indexada em κ admite um refinamento disjunto.*

Demonstração: Suponha que $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ é uma sequência em A^+. Se X é uma família disjunta em A, denotaremos temporariamente por $X(a)$ o conjunto

$$X(a) = \{x \in X \mid x \cdot a > 0\}.$$

Vamos construir por recursão uma sequência $(X_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ tal que

a) $(X_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ é uma cadeia crescente de famílias disjuntas em A.

b) $|X_{\alpha+1}(a_\alpha)| = \kappa^+$.

c) Se $\alpha, \gamma < \kappa$, então ou $X_\alpha(a_\gamma) = \emptyset$ ou $|X_\alpha(a_\gamma)| = \kappa^+$.

Seja $X_0 = \emptyset$ e suponha X_α construído. Se $|X_\alpha(a_\alpha)| = \kappa^+$, seja $X_{\alpha+1} = X_\alpha$. Caso contrário, temos que $X_\alpha(a_\alpha) = \emptyset$, logo $X_\alpha \subseteq A \upharpoonright (-a_\alpha)$ e como $\mathrm{c}(a_\alpha) \geq \kappa^+$, podemos tomar uma família disjunta Y em $A \upharpoonright a_\alpha$ de tamanho κ^+. Note que $X_\alpha \bigcup Y$ é uma família disjunta de tamanho κ^+. Defina

$$Y^* = \bigcup\{Y(a_\gamma) \mid \gamma < \kappa \text{ e } |Y(a_\gamma)| \leq \kappa\} \ ,$$

isto é, os elementos de Y que falhariam a condição c) da construção da sequência. Claramente $(X_\alpha \cup Y)(a) = X_\alpha(a) \cup Y(a)$ para qualquer elemento a, assim definindo

$$X_{\alpha+1} = (X_\alpha \cup Y) \setminus Y^* \ ,$$

temos imediatamente que $X_{\alpha+1}$ satisfaz as condições b) e c). Como $Y^* \subseteq A \upharpoonright a_\alpha$ e $X_\alpha \subseteq A \upharpoonright -a_\alpha$, temos também que $X_{\alpha+1}$ como definida acima preserva a propriedade a). Se $\lambda < \kappa$ é um ordinal limite, basta tomar $X_\lambda = \bigcup\limits_{\alpha<\lambda} X_\alpha$.

Agora, seja $X = \bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha$. Então claramente X é uma família disjunta tal que $X(a_\alpha)$ tem cardinalidade κ^+ para cada a_α da sequência, permitindo a escolha de um elemento

$$x_\alpha \in X(a_\alpha) \setminus \{x_\beta \mid \beta < \alpha\}$$

para cada $\alpha < \kappa$. Finalmente, seja $(b_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ a sequência definida por $b_\alpha = x_\alpha \cdot x_\alpha$, claramente um refinamento de $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$. Pela construção de X, $\{b_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ é uma família disjunta em A e b_α é não nulo para cada $\alpha < \kappa$. ∎

Em particular, o exemplo 2.44 mostra que a celularidade de $[\mathbb{R}[$ tem que ser maior que $\aleph_1$, já que M tem cardinalidade $\aleph_0$ e nenhum refinamento disjunto.

3 Subálgebras e homomorfismos

Vamos expandir o conceito de subálgebras e homomorfismos introduzido anteriormente, focando em métodos de encontrar novas álgebras de Boole através de subálgebras de álgebras de Boole já conhecidas.

Relembre que, pela definição 1.6, um subconjunto A de uma álgebra de Boole B era uma subálgebra se A contém 0 e 1 e é fechado pelas operações $+$, $\cdot$ e $-$ de B. Porém, na prática, basta pedir que o conjunto A seja não vazio e fechado por $+$ e $-$ ou $\cdot$ e $-$ e os outros requisitos são recuperados desses, como provaremos a seguir.

Proposição 3.1. *Seja A um subconjunto de uma álgebra de Boole B. São equivalentes*

(i) *A é uma subálgebra de B.*

(ii) *A é não vazio e fechado por soma e complemento.*

(iii) *A é não vazio e fechado por produto e complemento.*

Demonstração: É claro que o primeiro item implica nos outros dois. Suponha agora que A é não vazio e fechado por soma e complemento. Como A é não vazio, seja x um elemento de A. Então temos que $-x \in A$ e logo $x + (-x) = 1 \in A$ e $-1 = 0 \in A$. Por fim, se $a, b \in A$, então $a \cdot b = -(-a + -b) \in A$ e portanto A é uma subálgebra. Mostramos que o segundo item implica o primeiro e notando que a afirmação dual desta é que o terceiro item implica o primeiro, temos o resultado. ■

Analogamente, a definição 1.3 de homomorfismo não é a mais econômica possível e temos algumas equivalências. Dizemos que uma função entre álgebras de Boole *preserva* uma operação, ou os elementos distintos 0 e 1, se a propriedade correspondente na definição 1.3 for verdadeira. Dizemos também que f *preserva disjunção finita* se $a \cdot b = 0$ em A implicar $f(a) \cdot f(b) = 0$ em B e que f *preserva partição finitas* se $a + b = 1$ em A impicar $f(a) + f(b) = 1$ em B.

Proposição 3.2. *Seja $f : A \to B$ uma função entre álgebras de Boole. São equivalentes:*

(i) *f é um homomorfismo.*

(ii) *f preserva soma e complemento.*

(iii) *f preserva produto e complemento.*

(iv) *f preserva soma, disjunção finita e o elemento* 1.

(v) *f preserva produto, partição finita e o elemento* 0.

Demonstração: Claramente, o primeiro item implica em todos os outros. Suponha então que f preserva soma e complemento. Então f preserva 1, já que

$$f(1) = f(1 + -1) = f(1) + f(-1) = f(1) + -f(1) = 1\,,$$

e então f preserva 0, pois $f(0) = f(-1) = -f(1) = -1 = 0$. Por fim, f também preserva produto, pois pelas Leis de De Morgan temos que

$$\begin{aligned} f(a \cdot b) &= f(-(-a + -b)) = -f(-a + -b) = -(f(-a) + f(-b)) \\ &= -f(-a) \cdot -f(-b) = f(- - a) \cdot f(- - b) = f(a) \cdot f(b)\,. \end{aligned}$$

Suponha que f preserva soma, disjunção finita e os elementos 0 e 1. Então f preserva complemento, pois dado $x \in A$, pela preservação de disjunção finita, temos que $f(x) \cdot f(-x) = 0$ e pelas outras preservações, temos que $f(x) + f(-x) = f(x + -x) = f(1) = 1$, portanto $f(x) = f(-x)$. O resto da proposição segue pelo Princípio da Dualidade. ■

O segundo item da equivalência anunciada acima vai ser o mais comumente utilizado. Por exemplo, usando ela, note como a demonstração do seguinte lema útil é reduzida.

Lema 3.3. *Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções entre álgebras de Boole. Se f e g são homomorfismos, então a composição $g \circ f$ é um homomorfismo.*

Demonstração: De fato, para todo $x, y \in A$, temos que

$$(g \circ f)(x + y) = g(f(x + y)) = g(f(x) + f(y)) = (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y)$$

e

$$(g \circ f)(x \cdot y) = g(f(x \cdot y)) = g(f(x) \cdot f(y)) = (g \circ f)(x) \cdot (g \circ f)(y)$$

portanto pelo segundo item da equivalência enunciada anteriormente, $g \circ f$ é um homomorfismo. ■

Usaremos sem preocupação as equivalências enunciadas acima ao longo do texto. Com elas, facilitamos imensamente as demonstrações envolvendo subálgebras e homomorfismos, em particular dos dois principais resultados dessa seção: o Teorema da Forma Normal[3.9], que descreve precisamente os elementos de subálgebras, e o Critério de Extensão de Sikorski[3.28], que responde perguntas sobre extensões de funções a homomorfismos em álgebras de Boole.

3.1 Conjuntos geradores e o Teorema da Forma Normal

Dado um subconjunto X não vazio de uma álgebra de Boole A, é natural perguntar qual é a menor (com respeito a inclusão) subálgebra de A que ainda contém X. A intuição ganhada da proposição 3.1 nos sugere simplesmente "completar" X, unindo a ele o complemento de cada elemento e todas os produtos finitos de seus elementos e complementos deles, certamente teremos uma subálgebra que o contém. De fato, o Teorema da Forma Normal vai confirmar e tornar mais clara essa intuição. A seguir estabelecemos as notações e conceitos necessários para prova-lo.

Definição 3.4. Seja $X = \{X_i\}_{i\in I}$ uma família indexada de conjuntos. Dizemos que X é uma *família direcionada (para cima)* se para todos $i, j \in I$, existir $k \in I$ tal que $X_i \cup X_j \subseteq X_k$. Dizemos que X é uma *família direcionada para baixo* se para todos $i, j \in I$, existir $k \in I$ tal que $X_k \subseteq X_i \cap X_j$.

Lema 3.5. *Sejam B uma álgebra de Boole e $\{A_i\}_{i\in I}$ uma família não vazia de subálgebras de B. Então*

(i) $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ *é uma subálgebra de B.*

(ii) $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ *é uma subálgebra de B, se $\{A_i\}_{i\in I}$ for uma família direcionada.*

Demonstração: *(i)* Seja $A = \bigcap_{i\in I} A_i$. Sejam $a, b \in A$, então $a, b \in A_i$ para todo $i \in I$, e como A_i são subálgebras, temos que $-a, a + b \in A_i$, portanto $-a, a + b \in A$ e A é uma subálgebra de B pela proposição 3.1.

(ii) Seja $A = \bigcup_{i\in I} A_i$. Sejam $a, b \in A$, então existem $i, j \in I$ tais que $a \in A_i$ e $b \in A_j$. Como $\{A_i\}_{i\in I}$ é uma família direcionada, existe $k \in I$ tal que $A_i \cup A_j \subseteq A_k$ e logo $a, b \in A_k$. Como A_k é uma subálgebra de B, temos que $-a, a + b \in A_k \subseteq A$ e logo A é uma subálgebra de B pela proposição 3.1. ■

Definição 3.6. Seja X um subconjunto de uma álgebra de Boole B. Então o conjunto

$$\langle X\rangle = \bigcap\{A \subseteq B \mid X \subseteq A \text{ e } A \text{ é uma subálgebra de } B\}$$

é uma subálgebra de B, pelo lema 3.5(i), denominada *subálgebra gerada por X em A*. Dizemos que os elementos de $\langle X\rangle$ são *gerados por X*. Se $\langle X\rangle = B$, dizemos que X é um *conjunto gerador* (de B). Se $X = \{x_i \mid i \in I\}$, denotamos $\langle X\rangle$ por $\langle x_i \mid i \in I\rangle$.

É imediato da definição acima que o processo de gerar uma álgebra preserva inclusões, isto é, se $Y \subseteq X \subseteq B$, então $\langle Y\rangle \subseteq \langle X\rangle$. Também é claro que $X = \langle X\rangle$ se e só se X é uma subálgebra de B. Além disso, dado uma subálgebra A de B que contém X, imediatamente temos da definição que $\langle X\rangle \subseteq A$, logo $\langle X\rangle$ é realmente a "menor" subálgebra de B que contém X.

Apesar da definição acima ser natural para responder a pergunta no começo dessa seção, ela não é prática, já que dado uma álgebra B, uma subálgebra A e um subconjunto $X \subseteq A$, mostrar que $A = \langle X \rangle$, com a definição acima, envolveria mostrar que toda subálgebra de B que inclui X também inclui A, o que pode se tornar complicado.

Assim, precisamos de uma descrição melhor dos elementos gerados por um subconjunto X. Vamos começar mostrando que todo elemento de $\langle X \rangle$ é na realidade gerado por um subconjunto finito de X.

Lema 3.7. *Seja X um subconjunto de uma álgebra de Boole B. Então*

$$\langle X \rangle = \bigcup \{ \langle Y \rangle \mid Y \text{ é um subconjunto finito de } X \}.$$

Demonstração: Denote por A o lado direito da igualdade acima. Seja Y um subconjunto finito de X, então $\langle Y \rangle \subseteq \langle X \rangle$ e portanto $A = \bigcup_{Y \in [X]^{<\omega}} \langle Y \rangle \subseteq \langle X \rangle$.

Reciprocamente, para cada $x \in X$, temos que $x \in \langle x \rangle \subseteq A$, logo $X \subseteq A$ e daí $\langle X \rangle \subseteq \langle A \rangle$. Agora, note que A é uma família de subálgebras de B que satisfaz a hipótese do lema 3.5(ii), já que dados $\langle Y \rangle, \langle Z \rangle \in A$, temos que $\langle Y \rangle \cup \langle Z \rangle \subseteq \langle Y \cup Z \rangle \in A$, logo A é uma subálgebra de B, então $\langle X \rangle \subseteq \langle A \rangle = A$. ■

Assim, dado um elemento $x \in \langle X \rangle$, existe um subconjunto finito $Y \subseteq X$ tal que $x \in \langle Y \rangle$. Neste caso, existe uma quantidade finita de somas, produtos e complementos envolvendo elementos distintos de Y e alguma combinação aritmética delas deve resultar em x. Vamos introduzir as seguintes notações para tratar disso.

Definição 3.8. Seja A uma álgebra de Boole e $X \subseteq A$.

- Seja $x \in A$ e $\varepsilon \in \{-1, 0, +1\}$ um número inteiro. Definimos o elemento εx de A da seguinte forma:

$$\varepsilon x = \begin{cases} x & , \text{se } \varepsilon = +1 \\ 0_A & , \text{se } \varepsilon = 0 \\ -x & , \text{se } \varepsilon = -1 \end{cases}$$

- Dizemos que $p \in A$ é um *produto elementar sobre X* se existem finitos $x_1, \ldots, x_n \in X$ e $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, +1\}$ tais que $p = \varepsilon_1 x_1 \cdot \cdots \cdot \varepsilon_n x_n$.

- Dizemos que $x \in A$ pode ser escrito em *forma normal sobre X* se existem finitos $p_1, \ldots, p_n$ produtos elementares sobre X dois a dois disjuntos tais que $x = p_1 + \cdots + p_n$.

Teorema 3.9 (Teorema da Forma Normal). *Seja X um subconjunto de uma álgebra de Boole B. Então*

$$\langle X \rangle = \{x \in B \mid x \text{ pode ser escrito em forma normal sobre } X\}.$$

Demonstração: Pela observação sequente ao lema 3.7, podemos supor que X é finito, assim seja $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ com $n \in \omega$ e defina

$$E = {}^{\{1,\ldots,n\}}\{-1, +1\} = \{\varepsilon \mid \varepsilon \text{ é uma função de } \{1, \ldots, n\} \text{ em } \{-1, +1\}\}$$

e para cada $\varepsilon \in E$, seja p_ε o produto elementar sobre X dado por

$$p_\varepsilon = \varepsilon(1)x_1 \cdot \cdots \cdot \varepsilon(n)x_n.$$

Agora, suponha que ε e ε' sejam elementos distintos de E. Então existe algum $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\varepsilon(i) \neq \varepsilon'(i)$ e logo $\{\varepsilon(i), \varepsilon'(i)\} = \{-1, +1\}$. Assim

$$p_\varepsilon \cdot p_{\varepsilon'} = \varepsilon(1)x_1 \cdot \cdots \cdot \varepsilon(n)x_n \cdot \varepsilon(1)x_1 \cdot \cdots \cdot \varepsilon(n)x_n \leq \varepsilon(i)x_i \cdot \varepsilon'(i)x_i = -x_i \cdot x_i = 0$$

e logo $P = \{p_\varepsilon \mid \varepsilon \in E\}$ é uma família disjunta. Para cada $M = \{\mu_1, \ldots, \mu_k\} \subseteq E$, defina

$$s_M = p_{\mu_1} + \cdots + p_{\mu_k} = \sum_{\mu \in M} p_\mu.$$

Seja $A = \{s_M \mid M \subseteq E\}$ e F o conjunto de elementos de B que podem ser escritos em forma normal sobre X. Vamos mostrar que $A = F$.

Como P é uma família disjunta, os elementos s_M estão em forma normal sobre X, logo $A \subseteq F$.

Reciprocamente, sejam $x \in B$ que pode ser escrito em forma normal sobre X e $p_1, \ldots, p_r \in B$ produtos elementares sobre X dois a dois disjuntos tais que $x = p_1 + \cdots + p_r$, com $r \in \omega$. Suponha que um desses produtos, digamos p_i, não envolve todos os elementos de X, isto é, $p_i = \sum_{k \in I} \varepsilon_k x_k$ com $I \subsetneq \{1, \ldots, n\}$. Então, se $j \in \{1, \ldots, n\} \smallsetminus I$, decompondo p_i em função de x_j temos que $p_i = p_i \cdot x_j + p_i \cdot -x_j = p_i \cdot (+1)x_j + p_i \cdot (-1)x_j$. Como $(p_i \cdot x_j) \cdot (p_i \cdot -x_j) = 0$ e, para $p_j \neq p_i$, temos que $p_j \cdot (p_i \cdot (\pm 1)x_j) \leq p_j \cdot p_i = 0$, então

$$x = p_1 + \cdots + p_i + \cdots + p_r = p_1 + \cdots + p_i \cdot x_j + p_i \cdot x_j + \cdots + p_r$$

é uma representação de x em forma normal sobre X, no qual o termo p_i que não envolvia x_j foi substituído por dois termos que envolvem x_j.

Pelas finitudes de n e r, é possível repetir o processo descrito acima uma quantidade finita de vezes até encontrar produtos elementares $q_1, \ldots, q_m$ sobre X dois a dois disjuntos, com $m \in \omega$, tais que $x = q_1 + \cdots + q_m$ e logo, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existem números inteiros

$\varepsilon_{i1}, \dots, \varepsilon_{in} \in \{-1, +1\}$ tais que $q_i = \varepsilon_{i1}x_1 \cdot \cdots \cdot \varepsilon_{in}x_n$.

Assim, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, defina $\varepsilon_i : \{1, \dots, n\} \to \{-1, +1\}$ tal que $\varepsilon_i(k) = \varepsilon_{ik}$ e seja $N = \{\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq m\}$. Então

$$x = \sum_{i=1}^{m} q_i = \sum_{i=1}^{m} \prod_{k=1}^{n} \varepsilon_{ik}x_k = \sum_{i=1}^{m} \prod_{k=1}^{n} \varepsilon_i(k)x_k = \sum_{i=1}^{m} p_{\varepsilon_i} = \sum_{\varepsilon \in N} p_\varepsilon = s_N,$$

logo $x \in A$ e portanto $F \subseteq A$. Agora, basta mostrar que $A = \langle X \rangle$ para provar o teorema.

Vamos mostrar que A é uma subálgebra de B. Primeiramente, temos $1 \in A$, pois

$$\begin{aligned}
1 &= (x_1 + -x_1) \cdot (x_2 + -x_2) \cdot \cdots \cdot (x_n + -x_n) \\
&= x_1 \cdot (x_2 + -x_2) \cdot \cdots \cdot (x_n + -x_n) + -x_1 \cdot (x_2 + -x_2) \cdot \cdots \cdot (x_n + -x_n) \\
&= x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + -x_3) \cdot \cdots \cdot (x_n + -x_n) + x_1 \cdot -x_2 \cdot (x_3 + -x_3) \cdot \cdots \cdot (x_n + -x_n) \\
&+ -x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + -x_3) \cdot \cdots \cdot (x_n + -x_n) + -x_1 \cdot -x_2 \cdot (x_3 + -x_3) \cdot \cdots \cdot (x_n + -x_n) \\
&= \cdots = \sum_{\varepsilon \in E} p_\varepsilon = s_E
\end{aligned}$$

e logo A não é vazio. Além disso, para cada $M \subseteq E$, temos

$$s_M + s_{E \setminus M} = s_E = 1$$

e

$$s_M \cdot s_{E \setminus M} = \left(\sum_{\mu \in M} p_\mu \right) \cdot s_{E \setminus M} = \sum_{\mu \in M} p_\mu \cdot s_{E \setminus M} \leq \sum_{\substack{\mu \in M \\ \nu \in E \setminus M \text{ fixo}}} p_\mu \cdot p_\nu = \sum 0 = 0,$$

assim $-s_M = s_{E \setminus M}$ e logo A é fechado por complemento. Agora, para $M, M' \subseteq E$, temos

$$s_M + s_{M'} = s_{M \setminus M'} + s_{M \cap M'} + s_{M' \setminus M} = s_{M \setminus M'} + s_{M \cap M'} + s_{M \cap M'} + s_{M' \setminus M} = s_{M \cup M'}$$

e logo A é fechado pela soma. Pela proposição 3.1, A é uma subálgebra de B.

Vamos mostrar que $X \subseteq A$. Para cada $x_i \in X$, seja $M_i = \{\varepsilon \in E \mid \varepsilon(i) = +1\}$ e note que se $\varepsilon \in M_i$, então $x_i \cdot p_\varepsilon = p_\varepsilon$, pois x_i já aparecia em p_ε, e se $\varepsilon \in E \setminus M_i$, então $x_i \cdot p_\varepsilon \leq x_i \cdot (-1)x_i = 0$. Então

$$x_i = x_i \cdot 1 = x_i \cdot \sum_{\varepsilon \in E} p_\varepsilon = \sum_{\varepsilon \in E} x_i \cdot p_\varepsilon = \sum_{\varepsilon \in M_i} x_i \cdot p_\varepsilon + \sum_{\varepsilon \in E \setminus M_i} x_i \cdot p_\varepsilon = \sum_{\varepsilon \in M_i} p_\varepsilon$$

e logo $x_i = s_{M_i} \in A$.

Por fim, seja S uma subálgebra de B que contém X. Como os elementos de A são obtidos de uma quantidade finita de operações realizadas com os elementos de $X \subseteq S$, temos que $A \subseteq S$. Mostramos então que A é a menor subálgebra de B que contém X, portanto $A = \langle X \rangle$. ■

Observação 3.10. Ainda na linguagem da demonstração acima, podemos recontextualizar os elementos s_M escritos em forma normal como imagens da função

$$\begin{array}{rccc} s: & \wp(E) & \to & A \\ & M & \mapsto & s_M \end{array}$$

e mostramos anteriormente que $s_{M\cup M'} = s_M + s_{M'}$ e $s_{E\setminus M} = -s_M$ para todos $M, M' \subseteq E$, portanto s é um homomorfismo entre álgebras de Boole.

Pelo Teorema da Forma Normal, s é um epimorfismo se e somente se A é gerada por X. Em geral, s não é um monomorfismo, pois a escrita de um elemento em forma normal não costuma ser única. Por exemplo, se existir $x \in X$ e $\varepsilon \in E$ tais que p_ε e x são incomparáveis, então $p_\varepsilon \cdot x + p_\varepsilon \cdot -x$ é outra representação em forma normal de p_ε.

Corolário 3.11. *Sejam B uma álgebra de Boole e $X \subseteq B$.*

(i) Se X é finito, então $|\langle X\rangle| \leq 2^{2^{|X|}}$.

(ii) Se X é infinito, então $|\langle X\rangle| = |X|$.

Demonstração: *(i)* Pela demonstração do Teorema da Forma Normal, basta determinamos a quantidade de elementos de B que podem ser escritos em forma normal sobre X.

Então, seja $x \in B$ da forma $\sum_{\varepsilon\in M}\prod_{x\in X}\varepsilon(x)x$ para algum $M \subseteq {}^X\{-1,+1\}$ e note que cada produto elementar é determinado apenas por $\varepsilon \in M$, assim existem no máximo $|{}^X\{-1,+1\}| = 2^{|X|}$ produtos elementares sobre X.

Seja P o conjunto de todos os produtos elementares sobre X. Para cada produto elementar $p \in P$ e $x \in X$, temos duas possibilidades, ou p está na forma normal de x ou não, logo temos $2^{|P|} \leq 2^{2^{|X|}}$ elementos que podem ser escritos em forma normal sobre X.

(ii) Seja $F = [X]^{\leq\aleph_0}$, já provamos anteriormente que $|F| = |X|$. Pelo lema 3.7, temos que

$$|\langle X\rangle| = \left|\bigcup\{\langle Y\rangle \mid Y \in F\}\right| \leq \sum_{Y\in F}|\langle Y\rangle|$$

mas para cada $Y \subseteq X$ finito, podemos aplicar o resultado anterior para obter que

$$|\langle X\rangle| \leq \sum_{Y\in F} 2^{2^{|Y|}} \leq \sum_{Y\in F}\aleph_0 = \aleph_0\cdot|F| = \aleph_0\cdot|X| = |X|$$

e como $X \subseteq \langle X\rangle$, segue que $|\langle X\rangle| = |X|$. ■

Usando o Teorema da Forma Normal, podemos estudar facilmente um caso particular muito útil de quando precisamos adicionar apenas um elemento em uma subálgebra.

Definição 3.12. Seja B uma álgebra de Boole, A uma subálgebra de B e $x \in B$. Definimos

$$A(x) = \langle A \cup \{x\} \rangle$$

a extensão simples de A por x. Dados finitos $x_1, \ldots, x_n \in B$, quando precisamos realizar essa extensão simples repetidamente, para evitar parenteses, denotamos

$$A(x_1)(x_2) \cdots (x_n) = A(x_1, \ldots, x_n)$$

e dizemos que $A(x_1, \ldots, x_n)$ é uma extensão (finita) de A por $x_1, \ldots, x_n$.

É simples verificar, por indução, que $A(x_1, \ldots, x_n) = \langle A \cup \{x_1, \ldots, x_n\} \rangle$ e daí, usando o teorema do forma normal, temos uma descrição bem direta de extensões finitas.

Proposição 3.13. *Sejam B uma álgebra de Boole, A subálgebra de B e $x_1, \ldots, x_n \in B$. Então, usando as mesmas notações da demonstração do Teorema da Forma Normal, temos que*

$$A(x_1, \ldots, x_n) = \left\{ \sum_{e \in E} a_e \cdot p_e \;\middle|\; a_e \in A \text{ para cada } e \in E \right\}.$$

Demonstração: Seja $X = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Note que $A(x_1, \ldots, x_n) = \langle A \cup \{x_1, \ldots, x_n\} \rangle = \langle A \cup X \rangle$ e, pelo Teorema da Forma Normal, os elementos de $\langle A \cup X \rangle$ são somas finitas de produtos dois a dois disjuntos da forma $a \cdot p$, onde $a \in A$ é um produto elementar sobre um gerador de A e p é um produto elementar sobre X, isto é, existe $e \in E$ tal que $p = p_e$. Portanto, indexando cada a com $e \in E$ correspondente de p_e, temos o resultado. ■

Corolário 3.14. *Sejam A uma subálgebra de B e $x \in B$. Então*

$$A(x) = \{a \cdot x + a' \cdot -x \mid a, a' \in A\}$$

Demonstração: Segue diretamente do teorema anterior no caso em que $n = 2$. ■

3.2 Irredundância

O Teorema da Forma Normal é uma ferramenta extremamente útil, dando uma expressão precisa para os elementos de uma (sub)álgebra dependendo apenas de encontrar um subconjunto X que a gera, porém é claro que, dado uma álgebra A, o próprio conjunto A a gera, e a aplicação do Teorema da Forma Normal em A não traria nenhuma informação nova.

Assim, dado uma álgebra de Boole A, queremos identificar subconjunto X de A que gera a álgebra de forma "interessante" para obter mais informações a partir da forma normal dos seus elementos. Mais precisamente, queremos que cada elemento de X traga uma informação sobre A que não está presente nos outros elementos de X, motivando a seguinte definição.

Definição 3.15. Seja A uma álgebra de Boole e $X \subseteq A$. Dizemos que X é *irredundante* em A se todo $x \in X$ não é gerado pelos outros elementos de X, isto é, $x \notin \langle X \setminus \{x\} \rangle$. Neste caso, se $\langle X \rangle = A$, dizemos que X gera A de forma irredundante, ou que X irredundantemente gera A.

Vamos dar exemplos de conjuntos irredundantes.

Exemplo 3.16. O conjunto de unitários de um conjunto infinito X irredundantemente gera $\mathrm{FinCofin} X$.

De fato, sejam F e C respectivamente os conjuntos de elementos finitos e cofinitos de X e $Y = \{\{x\} \mid x \in X\}$. Se $f = \{f_1, \ldots, f_n\} \in F$, então $f = \{f_1\} \cup \cdots \cup \{f_n\}$ está em forma normal sobre Y. Se $c = X \setminus \{f_1, \ldots, f_m\} \in C$, então $c = X \setminus \{f_1\} \cap \cdots \cap X \setminus \{f_m\}$ está em forma normal sobre X. Portanto, pelo Teorema da Forma Normal, Y gera $\mathrm{FinCofin} X$.

Agora, vamos mostrar que Y é irredundante. Sejam $\{x_0\} \in Y$ e $A = \langle Y \setminus \{x_0\} \rangle$. Suponha que $\{x_0\} \in A$, então, pelo Teorema da Forma Normal, existem $p_1, \ldots, p_m$ produtos elementares dois a dois disjuntos sobre Y tais que $\{x_0\} = p_1 \cup \cdots \cup p_m$. Como os produtos são disjuntos entre si, para cada p_i fixe $y_i \in p_i \setminus \bigcup_{j \neq i} p_i$. Então

$$\{x_0\} = p_1 \cup \cdots \cup p_m \supseteq \{y_1, \ldots, y_m\},$$

o que contradiz a cardinalidade de $\{x_0\}$ se $m > 1$, então na realidade $\{x_0\}$ é um produto elementar sobre $Y \setminus \{x_0\}$ e logo existem $\{x_1\}, \ldots, \{x_n\} \in Y \setminus \{x_0\}$ e $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, +1\}$ tais que

$$\{x_0\} = \varepsilon_1 \{x_1\} \cap \cdots \cap \varepsilon_n \{x_n\}.$$

Agora, se $\varepsilon_i = 1$, para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$, então o lado direito da igualdade acima contém x_i e o esquerdo não, contradizendo a igualdade, logo $\varepsilon_i = -1$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ e temos que

$$\{x_0\} = X \setminus \{x_1\} \cap \cdots \cap X \setminus \{x_n\} = X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Assim $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, contradizendo a infinitude de X. Portanto $\{x_0\} \notin A$ e Y é irredundante.

Exemplo 3.17. O conjunto de intervalos semi-abertos de uma ordem linear L que incluem seu mínimo gera $[L[$ de forma irredundante.

De fato, seja $X = \{[0_L, x[\mid x \in L\}$ e vamos mostrar que X gera $[L[$. Vimos no exemplo 1.48 que dado $x \in [L[$, existem $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in L$ tais que $x_1 < y_1 < x_2 < \cdots < y_{n-1} < x_n < y_n$ e $x = [x_1, y_1[\cup \cdots \cup [x_n, y_n[$. Então escrevendo cada intervalo $[x_i, y_i[$ como $[0_L, y_i[\setminus [0_L, x_i[$, temos que

$$x = \bigcup_{i=1}^{n} [0_L, y_i[\setminus [0_L, x_i[= \bigcup_{i=1}^{n} \big([0_L, y_i[\cap (L \setminus [0_L, x_i[) \big)$$

está em forma normal sobre Y, logo Y gera a álgebra de intervalos de L, pelo Teorema da Forma Normal.

Agora, vamos mostrar que Y é irredundante. Sejam $[0_L, x_0[\in Y$ e $A = \langle Y \setminus [0_L, x_0[\rangle$. Suponha que $[0_L, x_0[\in A$, então, pelo Teorema da Forma Normal, existem finitos $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in L$ com $n + m > 0$ todos diferentes de x_0 tais que

$$[0_L, x_0[= [0_L, x_1[\cup \cdots \cup [0_L, x_n[\cup [y_1, \infty[\cup \cdots \cup [y_m, \infty[\ .$$

Se algum y_j for menor que x_0, teríamos que $x_0 \in [0_L, x_0[$ e se algum y_j for maior que x_0, teríamos que $y_j \in [0_L, x_0[$, ambos absurdos, portanto na realidade os termos envolvendo y_j não aparecem na forma normal de $[0_L, x_0[$.

Note também que não pode ocorrer de algum x_i ser maior que x_0, pois isto implicaria que $x_0 \in [0_L, x_0[$ na equação acima. Como a ordem é linear, podemos reescrever $[0_L, x_0[= [0_L, x[$, onde $x = \max\{x_1, \ldots, x_n\} < x_0$, um claro absurdo e portanto $[0_L, x_0[\notin A$.

Note que nos dois exemplos dados acima, já vimos anteriormente que as álgebras não são completas. De fato, qualquer nível de completude é incompatível com a existência de um conjunto irredundante de geradores, como mostraremos a seguir.

Teorema 3.18. *Nenhuma álgebra de Boole infinita σ-completa contém um conjunto gerador irredundante.*

Demonstração: Assuma que A é uma álgebra de Boole infinita e $X \subseteq A$ é um conjunto irredundante que gera A. Como A é infinita, X também é, assim fixe $(x_n)_{n\in\omega}$ uma sequência injetora em X e defina, para cada $n \in \omega$, a subálgebra $A_n = \langle X \setminus \{x_k \mid k \geq n\}\rangle$.

Pela irredundância de X, cada A_n é uma subálgebra própria de A_{n+1}, logo $\{A_n\}_{n\in\omega}$ é uma cadeia de subálgebras próprias de A. Agora, para $x \in A$, como X gera A, existe um subconjunto $Y \subseteq X$ finito tal que $x \in \langle Y\rangle$. Como Y é finito, existe $m \in \omega$ tal que $Y \subseteq X \setminus \{x_k \mid k \geq m\}$, logo $x \in A_n$, o que mostra que $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$. Portanto, pela preposição 2.41, A não é σ-completa. ∎

3.3 Núcleo e imagem

Homomorfismos nos fornecem uma maneira simples de identificar novas álgebras de Boole através da sua imagem, o que vamos explorar nessa subseção. Vamos também definir o que é o núcleo de um homomorfismo, que apesar de não ser uma álgebra de Boole, é útil para determinar monomorfismos e será presente quando discutirmos álgebras quocientes na seção 7.

Definição 3.19. Seja $f : A \to B$ um homomorfismo entre álgebras de Boole. Definimos o *núcleo* e a *imagem* de f como sendo respectivamente os conjuntos

$$\mathrm{Ker} f = f^{-1}[\{0_B\}] = \{a \in A \mid f(a) = 0_B\} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Im} f = f[A] = \{f(a) \in B \mid a \in A\} .$$

Proposição 3.20. *Seja $f : A \to B$ uma função entre álgebras de Boole. Se f é um homomorfismo, então a imagem de f é uma subálgebra de B.*

Demonstração: Claramente $f[A]$ é não vazio se A é não vazio. Dados $f(a), f(b) \in f[A]$, temos que $f(a) + f(b) = f(a + b) \in f[A]$ e $-f(a) = f(-a) \in f[A]$, portanto por 3.1, $f[A]$ é uma subálgebra de B. ■

O núcleo de um homomorfismo em geral não é uma subálgebra. De fato, ele é não vazio e fechado para soma, já que $f(0_A) = 0_B$ e se $a, b \in \mathrm{Ker} f$, isto é, $f(a) = f(b) = 0_B$, então $f(a + b) = f(a) + f(b) = 0_B + 0_B = 0_B$ e logo $a + b \in \mathrm{Ker} f$. Porém ele não é fechado para complemento, pois dado $a \in \mathrm{Ker} A$, temos que $f(-a) = -f(a) = -0_B = 1_B$, portanto se a álgebra A não é trivial, temos que $-a \notin \mathrm{Ker} A$.

Proposição 3.21. *Seja $f : A \to B$ um homomorfismo entre álgebras de Boole. Então f é um monomorfismo se e somente se $\mathrm{Ker} f = \{0_A\}$.*

Demonstração: Como $f(0_A) = 0_B$, se f é injetora, claramente $\mathrm{Ker} f = \{0_A\}$. Reciprocamente, suponha que $\mathrm{Ker} f = \{0_A\}$ e sejam $x, y \in A$ tais que $f(x) = f(y)$. Então

$$0 = f(x) \triangle f(y) = f(x \triangle y) ,$$

o que mostra que $x \triangle y \in \mathrm{Ker} f = \{0_A\}$, isto é, $x \triangle y = 0$ e portanto $x = y$, logo f é injetora. ■

Há dois casos especiais da proposição 3.20, que ocorrem quando f é um monomorfismo ou epimorfismo e os descrevemos a seguir.

Se $f : A \to B$ é um monomorfismo, então $f : A \to f[A]$ é um isomorfismo que atesta que $f[A]$ é uma subálgebra de B isomorfa a A. Reciprocamente, se A é uma subálgebra de B, então a função identidade em B restrita à A é um monomorfismo cuja imagem é uma subálgebra de B isomorfa a A.

Assim, se B é uma álgebra de Boole, existe uma relação biunívoca entre monomorfismos com contradomínio B e subálgebras de B. Essas duas visões são unificadas na seguinte notação.

Definição 3.22. Sejam A e B álgebras de Boole. Dizemos que A é *incluída (homomorficamente) em* B se existir $f : A \to B$ um monomorfismo. Neste caso denotamos que $A \overset{f}{\hookrightarrow} B$ ou simplesmente $A \hookrightarrow B$.

Pelo que foi discutido anteriormente, $A \hookrightarrow B$ se e somente se existe uma subálgebra de B isomorfa à A. Portanto, essa notação é útil para evitar tecnicalidades, por exemplo, em toda álgebra B não trivial, o subconjunto $\{0_B, 1_B\}$ é uma subálgebra de B isomorfa a 2, porém seguindo estritamente as definições 1.6 e 1.9, seria um abuso de linguagem afirmar que a álgebra 2 é uma subálgebra de B na maioria dos casos, mas podemos afirmar que 2 está incluída homomorficamente em B e denotar $2 \hookrightarrow B$.

Quando $f : A \to B$ é um epimorfismo, a álgebra $f[A]$ é isomorfa à B, mas não é necessariamente isomorfa à A. Existe uma relação biunívoca semelhante a discutida acima entre epimorfismos e as chamadas álgebras quocientes, que serão introduzidas na seção 7, mas já introduziremos a seguinte definição, dual à vista acima.

Definição 3.23. Sejam A e B álgebras de Boole. Dizemos que B é uma *imagem (homomorfa)* de A se existir $g : A \to B$ um epimorfismo. Neste caso denotamos que $A \overset{g}{\twoheadrightarrow} B$ ou simplesmente $A \twoheadrightarrow B$.

Note que se $A \overset{f}{\hookrightarrow} B$, então trivialmente $A \overset{f}{\twoheadrightarrow} f[A]$. Um exemplo mais interessante de imagem homomorfa é o das álgebras relativas, como discutido anteriormente na subseção 2.3 a função

$$\begin{array}{cccc} p_a : & A & \to & A \restriction a \\ & x & \mapsto & x \cdot a \end{array} \tag{I.1}$$

é um epimorfismo para cada $a \in A$, logo $A \restriction a$ é uma imagem homomorfa de A, isto é, que $A \twoheadrightarrow A \restriction a$.

Um outro exemplo é que dado uma álgebra de Boole A finita, ela é imagem homomorfa de uma álgebra das partes, já que, fixando um conjunto finito X que a gera, a função $s : \wp(E) \to A$ da observação 3.10 é um epimorfismo e portanto $\wp(E) \twoheadrightarrow A$.

3.4 Critério de extensão de Sikorski

Vamos explorar sobre quais circunstancias uma função entre álgebras de Boole pode ser estendida a um homomorfismo. Mais precisamente, se A e B são álgebras de Boole, $X \subseteq A$ e dada uma função $f : X \to B$, procuramos determinar se é possível encontrar homomorfismo $g : A \to B$ tal que $g \restriction_X = f$, como esquematizado no seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[d, dashed, "g"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Lema 3.24. *Sejam A uma álgebra de Boole gerada por X e f e g homomorfismos entre álgebras de Boole com domínio A. Se $f \restriction_X = g \restriction_X$, então $f = g$.*

Demonstração: Considere um produto elementar $p = \varepsilon_1 x_1 \cdot \cdots \cdot \varepsilon_n x_n$ sobre X. Então

$$f(p) = \varepsilon_1 f(x_1) \cdot \cdots \cdot \varepsilon_n f(x_n) = \varepsilon_1 g(x_1) \cdot \cdots \cdot \varepsilon_n g(x_n) = g(p)$$

e como todo elemento de A pode ser escrito em forma normal sobre X e homomorfismos preservam soma, temos que f e g coincidem em todos os elementos de A.

Uma demonstração mais elegante é obtida ao notar que $A_0 = \{x \in A \mid f(x) = g(x)\}$ é uma subálgebra de A que contém X, logo $A_0 \subseteq A = \langle X \rangle \subseteq A_0$, mostrando o resultado. ■

Lema 3.25. *Uma função bijetora entre álgebras de Boole é um isomorfismo se e somente sua inversa é um isomorfismo.*

Demonstração: Suponha que $f : A \to B$ é um isomorfismo e seja $f^{-1} : B \to A$ sua inversa. Como f^{-1} tem inversa f, ela é bijora. Dados $a, b \in B$, como f é sobrejetora, existem $x, y \in A$ tais que $f(x) = a$ e $f(y) = b$ e como f é injetora, tais elementos são únicos, assim

$$f^{-1}(a+b) = f^{-1}(f(x) + f(y)) = f^{-1}(f(x+y)) = x + y = f^{-1}(a) + f^{-1}(b)$$

e

$$f^{-1}(-a) = f^{-1}(-f(x)) = f^{-1}(f(-x)) = -x = -f(a)\,,$$

portanto f^{-1} é um homomorfismo. A reciproca segue do fato que $(f^{-1})^{-1} = f$. ■

Lema 3.26. *Sejam A e B álgebras de Boole, $\{A_i\}_{i\in I}$ uma família indexada de subálgebras de A e $g_i : A_i \to B$ um homomorfismo para cada $i \in I$. Se $\{A_i\}_{i\in I}$ e $\{g_i\}_{i\in I}$ são famílias direcionadas, então $\bigcup_{i\in I} g_i : \bigcup_{i\in I} A_i \to B$ é um homomorfismo entre álgebras de Boole.*

Demonstração: Sejam $A' = \bigcup_{i\in I} A_i$ e $g = \bigcup_{i\in I} g_i \subseteq A' \times B$. Pelo lema 3.5, $\bigcup_{i\in I} A_i$ é uma álgebra de Boole e portanto g é uma relação entre álgebras de Boole.

Vamos mostrar que g é uma função. Sejam $(x, y), (x, y') \in g$, então pela definição de g, existem $i, j \in I$ tal que $g_i(x) = y$ e $g_j(x) = y'$. Como $\{g_i\}_{i\in I}$ é uma família direcionada, existe $k \in I$ tal que g_k estende g_i e g_j, portanto $y = g_i(x) = g_k(x) = g_j(x) = y'$.

Agora, sejam $x, y \in A'$ e $i, j \in I$ tais que $x \in A_i$ e $y \in A_j$. Como $\{A_i\}_{i\in I}$ é uma família direcionada, existe $k \in I$ tal que A_k contém A_i e A_j. Assim, como g estende $g_k : A_k \to B$ e $x, y \in A_k$, temos que

$$g(x+y) = g_k(x+y) = g_k(x) + g_k(y) = g(x) + g(y)$$

e

$$g(-x) = g_k(-x) = -g_k(x) = -g(x)\ ,$$

portanto g é um homomorfismo. ■

Proposição 3.27. *Sejam A e B álgebras de Boole, $X \subseteq A$ e $f : X \to B$ uma função. Se para todo Y subconjunto finito de X, existe um homomorfismo $\langle Y \rangle \to B$ que estende $f\restriction_Y$, então existe homomorfismo $g : \langle X \rangle \to B$ que estende f.*

Demonstração: Note que pelo lema 3.24, dado $Y \subseteq X$ finito, se um homomorfismo $\langle Y \rangle \to B$ que estende $f\restriction_Y$ existe, ele é único, assim, seja $g_Y : \langle Y \rangle \to B$ tal homomorfismo.

Vamos mostrar que $G = \{g_Y \mid Y \subseteq X \text{ finito}\}$ é uma família direcionada. Sejam Y e Z subconjuntos finitos de X e note que $g_{Y\cup Z}\restriction_{\langle Y \rangle}$ é um homomorfismo que estende $f\restriction_Y$, portanto $g_{Y\cup Z}\restriction_{\langle Y \rangle} = g_Y$. Analogamente, $g_{Y\cup Z}\restriction_{\langle Z \rangle} = g_Z$ e portanto $g_{Y\cup Z}$ é um homomorfismo que estende g_Y e g_Z, como queríamos.

Assim, pelo lema 3.26

$$g = \bigcup_{g_Y \in G} g_Y : \bigcup_{Y \in [X]^{<\aleph_0}} \langle Y \rangle \to B$$

é um homomorfismo. Pelo lema 3.7, g tem domínio $\langle X \rangle$ e ela claramente estende g_Y para cada $Y \subseteq X$ finito e portanto estende f, pois para cada $x \in X$, temos que $g(x) = g_{\{x\}}(x) = f(x)$. ■

Teorema 3.28 (Critério de Extensão de Sikorski)**.** *Sejam A e B álgebras de Boole, $X \subseteq A$ e $f : X \to B$ uma função. Então:*

$$\begin{array}{c} \textit{Existe um homomorfismo} \\ g : \langle X \rangle \to B \textit{ que estende } f. \end{array} \iff \begin{array}{c} \textit{Para todos } x_1, \ldots, x_n \textit{ e } \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, +1\} \textit{ com } n \in \omega, \\ \textit{se } \varepsilon_1 x_1 \cdot \cdots \cdot \varepsilon_n x_n = 0_A \textit{, então } \varepsilon_1 f(x_1) \cdot \cdots \cdot \varepsilon_n f(x_n) = 0_B. \end{array}$$

Demonstração: Um sentido do teorema segue obviamente da propriedade de preservação do produto presente em homomorfismos.

Para provar o outro sentido, note que pela proposição 3.27, basta provar o caso em que o subconjunto X é finito. Assim, suponha que $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ e defina, como na demonstração do Teorema da Forma Normal, as funções $E = {}^{\{1,\ldots,n\}}\{-1, +1\}$, a família de elementos dois a dois disjuntos $P = \{p_\varepsilon \mid \varepsilon \in E\}$ de produtos elementares sobre X determinados por elas e os elementos escrito em forma normal $s_M = \sum_{\varepsilon \in M} p_\varepsilon$ para cada $M \subseteq E$.

Analogamente, para cada $\varepsilon \in E$, defina em B o produto elementar

$$q_\varepsilon = \varepsilon(1) f(x_1) \cdot \cdots \cdot \varepsilon(n) f(x_n)$$

e, para cada $M \subseteq E$, defina o elemento escrito em forma normal

$$t_M = \sum_{e \in M} q_e \,.$$

Vamos mostrar que a função

$$\begin{aligned} g: \langle X \rangle &\to B \\ s_M &\mapsto t_M \end{aligned}$$

é a que procuramos.

Primeiramente, pelo Teorema da Forma Normal, $\langle X \rangle = \{s_M \mid M \subseteq E\}$, portanto o domínio de g é de fato $\langle X \rangle$. Além disso, como discutido na observação 3.10, a função $s : \wp(E) \to A$ que associa $s(M) = s_M$ é um homomorfismo e então, dados $M, M' \subseteq E$ tais que $s_M = s_{M'}$, temos que

$$0 = s_M \triangle s_{M'} = s(M) \triangle s(M') = s(M \triangle M') = s_{M \triangle M'} \,,$$

o que mostra que $p\varepsilon = 0$ para todo $\varepsilon \in M \triangle M'$. Então, por hipótese, $q_\varepsilon = 0$ para todo $\varepsilon \in M \triangle M'$. Analogamente à s, a função $t : \wp(E) \to B$ que associa $t(M) = t_M$ é um homomorfismo e portanto

$$0 = t_{M \triangle M'} = t(M \triangle M') = t(M) \triangle t(M') = t_M \triangle t_{M'} \,,$$

o que mostra que $t_M = t_{M'}$. Assim provamos que g independe da escolha de escrita de forma normal dos elementos de A e logo está bem definida.

O fato que g é um homomorfismo segue do fato de que s e t são homomorfismos, pois

$$g(s_M + s_{M'}) = g(s_{M \cup M'}) = t_{M \cup M'} = t_M + t_{M'} = g(s_M) + g(s_{M'})$$

e

$$g(-s_M) = g(s_{E \setminus M}) = t_{E \setminus M} = -t_M = -g(s_M) \,,$$

para todos $M, M' \subseteq E$.

Finalmente, mostramos na demonstração do teorema de forma normal que dado $x_i \in X$ e definindo $M_{x_i} = \{\varepsilon \in E \mid \varepsilon(i) = 1\}$, temos que $x_i = s(M_{x_i})$. Analogamente $f(x_i) = t(M_{x_i})$ e portanto

$$g(x_i) = g(s(M_{x_i})) = t(M_{x_i}) = f(x_i) \,,$$

o que mostra que g estende f. ■

Como corolário do Critério de Extensão de Sikorski, obtemos a seguinte versão generalizada para relações entre álgebras de Boole.

Corolário 3.29 (Critério de Extensão de Sikorski para relações). *Sejam A e B álgebras de Boole e $r \subseteq A \times B$ uma relação entre elas. Sejam r_d e r_i respectivamente o domínio e imagem de r. São equivalentes:*

(i) Existe um homomorfismo $g : \langle r_d \rangle \to \langle r_i \rangle$ tal que $g \upharpoonright_{r_d} = r$.

(ii) Para todos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in r$ e $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, +1\}$ com $n \in \omega$, se $\varepsilon_1 x_1 \cdot \cdots \cdot \varepsilon_n x_n = 0$ em A, então $\varepsilon_1 y_1 \cdot \cdots \cdot \varepsilon_n y_n = 0$ em B.

Além disso, nas mesmas condições, são equivalentes:

(a) Existe um isomorfismo $g : \langle r_d \rangle \to \langle r_i \rangle$ tal que $g \upharpoonright_{r_d} = r$.

(b) Para todos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in r$ e $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, +1\}$ com $n \in \omega$, $\varepsilon_1 x_1 \cdot \cdots \cdot \varepsilon_n x_n = 0$ em A se e somente se $\varepsilon_1 y_1 \cdot \cdots \cdot \varepsilon_n y_n = 0$ em B.

Demonstração: Claramente *(i)* implica *(ii)*. Reciprocamente, suponha que vale *(ii)* e vamos mostrar que neste caso r é uma função. Sejam $(x, y), (x, y') \in r$. Sejam $n = 2$, $x_1 = x$, $\varepsilon_1 = +1$, $x_2 = x$ e $\varepsilon_2 = -1$, como $\varepsilon_1 x_1 \cdot \varepsilon_2 x_2 = x \cdot -x = 0$, pela hipótese $\varepsilon_1 y_1 \cdot \varepsilon_2 y_2 = y \cdot -y' = 0$, logo $y \leq y'$. Analogamente, trocando o papel de y e y' acima, obtemos que $y' \leq y$ e portanto $y = y'$.

Como r é uma função, pelo critério de extensão de Sikorski, existe $g : \langle r_d \rangle \to B$ que estende r. Pelo lema 3.24, tal g é única e então é a mesma que construímos na demonstração do Critério de Extensão de Sikorski, cuja imagem é, com as mesmas definições da demonstração, $\{t_M \mid M \subseteq E\}$, que é exatamente $\langle f(x) \mid x \in r_d \rangle = \langle d_i \rangle$ pelo Teorema da Forma Normal.

A segunda afirmação, a de que *(a)* e *(b)* são equivalentes, segue de uma aplicação da primeira afirmação duas vezes e do lema 3.25. ∎

Com esta versão generalizada, podemos mais facilmente provar dois casos especiais e frequentemente utilizados do Critério de Extensão de Sikorski.

Corolário 3.30. *Sejam A e B álgebras de Boole, $\{A_i\}_{i \in I}$ uma família indexada de subálgebras de A e $\{f_i : A_i \to B\}_{i \in I}$ família de homomorfismos. São equivalentes:*

(a) Existe um homomorfismo $g : \langle \bigcup_{i \in I} A_i \rangle \to \langle \bigcup_{i \in I} f_i[A_i] \rangle \subseteq B$ tal que g estende f_i para cada $i \in I$.

(b) Para todos $i_1, \ldots, i_n \in I$ e $a_{i_k} \in A_{i_K}$ para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ com $n \in \omega$, se $a_{i_1} \cdot \cdots \cdot a_{i_n} = 0$ em A, então $f_{i_1}(a_{i_1}) \cdot \cdots \cdot f_{i_n}(a_{i_n}) = 0$ em B.

Demonstração: Claramente *(a)* implica *(b)*. Para a recíproca, defina a relação $r = \bigcup_{i \in I} f_i$. A hipótese *(b)* é exatamente a tradução da hipótese *(ii)* do Critério de Extensão de Sikorski[3.29] para r e portanto o resultado segue ao notar, ainda na linguagem de 3.29, que $r_d = \bigcup_{i \in I} A_i$ e $r_i = \bigcup_{i \in I} f_i[A_i]$. ∎

Corolário 3.31 (Critério de Extensão de Sikorski para extensões simples). *Seja $f : A \to B$ um homomorfismo de álgebras de Boole e $A(x_0)$ uma extensão simples e $y_0 \in B$. São equivalentes:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & A(x_0) \arrow[d, dashed, "g"] \\ & B \end{tikzcd}$$

(a) Existe homomorfismo $g : A(x_0) \to B$ que estende f e tal que $f(x_0) = y_0$.

(b) Para todos $a, b \in A$, se $a \leq x_0 \leq b$ em A, então $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$ em B.

Demonstração: Claramente *(a)* implica *(b)*. Para a recíproca, defina a relação $r = f \cup \{(x_0, y_0)\}$. Pelo Critério de Extensão de Sikorski para relações, existência de g como desejada é equivalente à seguinte afirmação:

Para todo $t \in A$ e $\varepsilon \in \{-1, +1\}$, se $t \cdot \varepsilon x_0 = 0$ em $A(x)$, então $f(t) \cdot \varepsilon y_0 = 0$ em B.

Assim, suponha que $t \cdot \varepsilon x_0 = 0$ em $A(x)$. Então $\varepsilon x_0 \leq -t$ e temos dois casos: se $\varepsilon = +1$, então $x_0 \leq -t$ e por hipótese temos que $y_0 \leq -f(t)$; se $\varepsilon = -1$, então $t \leq x_0$ e por hipótese temos que $f(t) \leq y_0$ e portanto $-y_0 \leq -f(t)$. Em ambos os casos, obtemos que $\varepsilon y_0 \leq -f(t)$ e portanto $f(t) \cdot \varepsilon y_0 = 0$, o que conclui a demonstração. ■

3.5 Teorema do isomorfismo de Vaught

Um dos corolários mais importantes do Critério de Extensão de Sikorski é o teorema de isomorfismo para álgebras enumeráveis provado em 1954 por Robert L. Vaught na sua tese de doutorado sob orientação de Alfred Tarski. Quase todo teorema de isomorfismo para álgebras enumeráveis pode ser recuperado do teorema de Vaught, e sua demonstração generaliza um argumento comum encontrado em demonstrações de isomorfismos de ordens enumeráveis.

Definição 3.32. Uma relação $\mathcal{R}$ definida entre álgebras de Boole é dita uma *relação de Vaught* se satisfaz as seguintes propriedades para quaisquer álgebras de Boole A e B.

- (Simetria) Se $A\mathcal{R}B$, então $B\mathcal{R}A$.
- (Propriedade trivial) Se $A\mathcal{R}B$ e A é trivial, então B é trivial.
- (Propriedade de "ida-e-volta"[3]) Se $A\mathcal{R}B$, então para todo $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $(A \restriction a)\mathcal{R}(B \restriction b)$ e $(A \restriction -a)\mathcal{R}(B \restriction -b)$.

Vimos anteriormente que toda álgebra de Boole A pode ser fatorada como o cartesiano $A \restriction a \times A \restriction -a$ de duas álgebras relativas. Assim, podemos interpretar que a propriedade de ida-e-volta pede que as álgebras se fatoram"de forma semelhante".

[3]Tradução livre de "*back-and-forth property*".

Teorema 3.33 (Teorema do Isomorfismo de Vaught)**.** *Sejam A e B álgebras de Boole enumeráveis. Então A é isomorfa a B se e somente se existe uma relação de Vaught $\mathcal{R}$ tal que $A\mathcal{R}B$.*

Demonstração: A relação $\cong$ de isomorfismo entre álgebras de Boole é uma relação de Vaught. Para demonstrar a recíproca, sejam $A = \{a_{2n} \mid n \in \omega\}$ e $B = \{b_{2n+1} \mid n \in \omega\}$ enumerações com possíveis repetições no caso de A ou B serem finitos. Vamos construir recursivamente uma sequência $(b_0, a_1, b_2, a_2, \ldots)$ tal que para cada $n \in \omega$ vale a propriedade

$P(n)$: $(A \restriction p_e)\mathcal{R}(B \restriction q_e)$ para todo $e \in E_n$,

onde

$$p_\varepsilon = \prod_{i<n} e(i)a_i \quad \text{e} \quad q_\varepsilon = \prod_{i<n} e(i)b_i$$

e $E_n = \{1, -1\}^n$. Suponha que a sequência já foi construída até o n-ésimo termo. Então temos $(a_i)_{i<n}$ e $(b_i)_{i<n}$ tais que $P(n)$ vale.

Suponha que n é par. Para cada $e \in E_n$, temos que $(A \restriction p_e)\mathcal{R}(A \restriction q_e)$ e $p_e \cdot a_n \in A \restriction (p_e \cdot a_n)$. Pela propriedade de ida-e-volta, existe $x_e \in B \restriction q_e$ tal que

$$(A \restriction p_e \cdot a_n)\mathcal{R}(B \restriction x_e) \text{ e } (A \restriction p_e \cdot -a_n)\mathcal{R}(B \restriction q_e \cdot -x_e).$$

Defina $b_n = \sum\{x_e \mid e \in E_n\}$ e vamos verificar que $P(n)$ ainda vale.

Para $\varepsilon \in E_{n+1}$, seja $e = \varepsilon \restriction_n$. Se $\varepsilon(n) = +1$, então temos que $p_\varepsilon = p_e \cdot a_n$ e $q_\varepsilon = q_e \cdot b_n$. Se $\varepsilon(n) = -1$, então temos que $p_\varepsilon = p_e \cdot -a_n$ e $q_\varepsilon = q_e \cdot -b_n = q_e \cdot -x_e$. Em ambos os casos, a escolha de x_e implica que $(A \restriction p_\varepsilon)\mathcal{R}(B \restriction q_\varepsilon)$.

No caso em que n é ímpar, podemos repetir a demonstração acima trocando o papel de A e B pela simetria de $\mathcal{R}$.

Com $(a_i)_{i\in\omega}$ e $(b_i)_{i\in\omega}$ construídos, sejam

$$A_n = \langle a_i \mid i < n\rangle \text{ e } B_n = \langle b_i \mid i < n\rangle.$$

Claramente $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ e $B = \bigcup_{n\in\omega} B_n$. Devido a propriedade $P(n)$, para todo produto $p_\varepsilon = 0$ em A_n, temos que $A \restriction p_\varepsilon$ é trivial e como $(A \restriction p_\varepsilon)\mathcal{R}(B \restriction p_\varepsilon)$, então pela propriedade trivial, temos que $B \restriction p_\varepsilon$ é trivial. Portanto $q_\varepsilon = 0$.

Portanto, $\{(a_i, b_i) : i \leq n\}$ pode ser estendida a um isomorfismo f_n pela segunda parte do teorema 3.29. Já que claramente $\{f_n\}_{n\in\omega}$ é uma cadeia de homomorfismos, segue que $f = \bigcup_{n\in\omega} f_n$ é o isomorfismo que procurávamos. ∎

Capítulo II

Dualidade de Stone

Em 1854, Arthur Cayley publicou sua demonstração de que todo grupo é isomorfo a um subgrupo de um grupo de permutações. Tal descoberta era o começo de uma tendência algébrica de contextualizar estruturas gerais como subestruturas de estruturas bem conhecidas. Tais teoremas ficaram denominados teoremas de representação.

Para álgebras de Boole, esperar que toda álgebra de Boole seja isomorfa a uma álgebra de partes seria muito otimista, já que toda álgebra de partes é completa, completude é preservada por isomorfismos e observamos anteriormente exemplos de álgebras que falham em ser completas. Em 1935, Adolf Lindenbaum e Alfred Tarski provaram o seguinte resultado.

Teorema 3.34. *Uma álgebra de Boole é isomorfa a uma álgebra de partes se e somente se é completa e atômica.*

A noção de atomicidade e a demonstração deste teorema serão o foco do começo da seção 4. Claramente, este resultado é um passo importante da busca por um teorema mais geral de representação, porém ele ainda não nos fornece ferramentas para trabalhar com álgebras não-completas ou não-atômicas.

Um teorema de representação para álgebras de Boole foi independentemente apresentado por George David Birkhoff em 1933 e por Marshal Stone em 1936. A versão de Birkhoff era mais geral, pois considerava reticulados distributivos em vez de álgebras de Boole, mas ambos essencialmente chegaram no seguinte resultado, cuja demonstração e consequências imediatas são tratadas no resto da seção 4.

Teorema 3.35. *Toda álgebra de Boole é isomorfa a uma álgebra de conjuntos.*

Assim, da mesma forma que Cayley mostrou que os axiomas de grupos eram suficientes para encapsular a ideia de grupos de permutações, Birkhoff e Stone mostraram que os axiomas de álgebras de Boole realmente encapsulam a ideia de álgebras de conjuntos.

Stone percebeu que, assim como álgebras de Boole e reticulados distributivos complementados são essencialmente a mesma coisa, álgebras de Boole são exatamente anéis comutativos com a propriedade que todo elemento é idempotente (isto é $a^2 = a$ para todo elemento a do anel). Tais anéis foram posteriormente denominados anéis booleanos por este motivo. Essa correspondência foi a base do seu teorema de representação, associando cada elemento a um conjunto de ideais primos do anel booleano, mais especificamente os ideais primos que não contém tal elemento.

Porém, o que realmente diferenciou o Teorema de Representação de Stone dos outros e o tornou tão influente na matemática do século XX foi sua observação de que os ideais primos de um anel booleano podiam ser transformados em um espaço topológico de forma natural, e que de tal espaço topológico era possível recuperar uma cópia isomorfa da álgebra inicial. Tais espaços topológicos receberam a denominação de espaços booleanos por este motivo e o estudo deles e desta parte do teorema de representação será tratada na seção 5.

Assim, a representação proposta por Stone permitia transferir as propriedades de álgebras de Boole, ou anéis booleanos, como Stone as via, a espaços topológicos e vice-versa, estabelecendo uma conexão não trivial entre álgebra e topologia, de forma que o conhecimento em uma área pode ser utilizado para aprofundar o conhecimento da outra.

Além disso, Stone estendeu esta conexão para os homomorfismos e funções contínuas, efetivamente permitindo que todo diagrama comutativo entre álgebras de Boole corresponda a um diagrama comutativo entre espaços booleanos e vice-versa. Trabalhamos esta parte do teorema na seção 6.

Posteriormente o Teorema de Representação de Stone foi recontextualizado pela teoria de categorias como um funtor contravariante entre a categoria **BA** (álgebras de Boole munidas de homomorfismos entre elas) e a categoria **BS** (espaços booleanos munidos de funções contínuas entre eles).

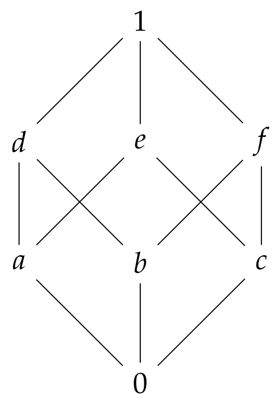
É importante notar que apesar de Stone ver álgebras de Boole principalmente como anéis comutativos e o seu teorema de representação usar ideais primos de tais anéis, Koppelberg observa em [Kop89] que a visão conjuntista de álgebras de Boole como reticulados que surgem das operações algébricas é mais natural para uma intuição e compreensão maior de como este resultado ocorre.

De fato, é comum encontrar o Teorema de Representação de Stone reformulado sem menção aos ideais do anel booleano e, por isso, nunca usaremos a teoria algébrica de anéis neste texto. Para substituir o uso de ideais no Teorema de Representação de Stone, usamos os filtros do reticulado, uma espécie de conceito "dual" ao de ideais, no qual os ideais primos correspondem aos filtros maximais.

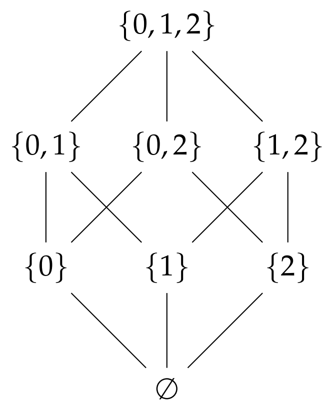
Neste capítulo, as principais referências são [Kop89], [Bre04] e [Joh82].

4 Ultrafiltros e o Teorema de Representação de Stone

Considere as seguintes álgebras de Boole, representadas como reticulados:



A



$\wp(\{0,1,2\})$

É visualmente claro que os reticulados são ordem-isomorfos, e logo as álgebras são isomorfas, porém, entre as duas, a álgebra de partes é mais natural, levantando a pergunta: dado a álgebra A acima, como poderíamos ter determinado que o conjunto $\{0,1,2\}$ é aquele cuja álgebra de partes é isomorfa a A?

De forma mais geral, dada uma álgebra A, quando é possível determinar um conjunto X tal que $A \cong \wp(X)$? Certamente, como discutimos no começo dessa seção, nem sempre tal X existe.

Nesta seção, vamos desenvolver os conceitos necessários para provar o Teorema de Representação de Stone, que responderá a pergunta proposta acima. Para demonstrá-lo, vamos desenvolver os conceitos essenciais de átomos e filtros da teoria de ordem no contexto de álgebras de Boole.

4.1 Átomos

Ainda sobre a pergunta apresentada no começo dessa seção, vamos analisar a álgebra A apresentada. No isomorfismos óbvio entre A e $\wp(\{0,1,2\})$, os elementos $\{0\}$, $\{1\}$ e $\{2\}$ correspondem aos elementos a, b e c. De fato, como toda álgebra finita é determinada apenas pela sua quantidade de elementos, temos que $A \cong \wp(\{a,b,c\})$.

Uma observação imediata é de que a, b e c são exatamente os elementos minimais da ordem A^+, isto é, eles são não nulos e não existe elemento menor que eles em A além de 0, o que motiva a seguinte definição.

Definição 4.1. Seja A uma álgebra de Boole e $a \in A$. Dizemos que $a \in A$ é um *átomo* de A se a é um elemento minimal de A^+, isto é, se ele é o único elemento do conjunto $\{b \in A \mid 0 < b \leq a\}$. Definimos também

$$\mathrm{At}A = \{a \in A \mid a \text{ é um átomo}\}$$

o conjunto de todos os átomos de A. Dizemos que uma álgebra é *atômica* se para todo $b \in A$, existir $a \in \mathrm{At}A$ tal que $a \leq b$.

Vamos considerar alguns exemplos de átomos nas álgebras discutidas anteriormente.

Exemplo 4.2. Seja A a álgebra de Boole do começo desta seção. Claramente $\mathrm{At}A = \{a, b, c\}$ e A é atômica.

Exemplo 4.3. A álgebra trivial não tem átomos, já que o seu único elemento é o próprio 0.

Exemplo 4.4. Se X é não vazio, a álgebra $\wp(X)$ é atômica e $\mathrm{At}\wp(X) = \{\{x\} \mid x \in X\}$.

De fato, se $\{x\} \in \wp(X)$, então claramente $\{x\} \in \mathrm{At}A$. Reciprocamente, se a é um átomo de $\wp(X)$, então $\{a\} = \{b \in \wp(X) \mid \emptyset \subsetneq b \subseteq a\}$. Como a é não vazio, seja $x \in a$ e então $\emptyset \subsetneq \{x\} \subseteq a$, portanto $a = \{x\}$. Além disso, dado $Y \in \wp(X)$ não vazio, seja $y \in Y$, então $\{y\} \subseteq Y$, o que mostra que $\wp(X)$ é atômica.

Exemplo 4.5. Se X é não vazio, a álgebra $\mathrm{FinCofin}X$ é atômica e $\mathrm{AtFinCofin}X = \{\{x\} \mid x \in X\}$.

A demonstração aqui é exatamente a mesma do exemplo anterior, já que nele em nenhum momento a finitude ou infinitude dos conjuntos não vazios foi relevante.

Exemplo 4.6. $\mathrm{At}[\mathbb{R}[= \emptyset$.

Seja $a \in [\mathbb{R}[$. Se a é não vazio, então existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $[x, y[\subseteq a$. Pela densidade da reta real nela mesma, existem $t, z \in \mathbb{R}$ tais que $x < t < z < y$ e portanto $[t, z[\subsetneq [x, y[\subseteq a$, o que mostra que a não é um átomo. Note que essencialmente a mesma demonstração mostra que $\mathrm{At}[\mathbb{Q}[= \emptyset$.

Note que a ausência de átomos não é o conceito oposto à atomicidade, como exemplificaremos a seguir. Lembramos que dados duas ordens lineares $(P, \leq_P)$ e $(Q, \leq_Q)$, definimos a soma dela $P + Q$ como a ordem linear $(X, \leq)$, onde $X = (P \times \{0\}) \cup (Q \times \{1\})$ e

$$(x, n) \leq (y, m) \iff x \leq_P y \text{ ou } x \leq_Q y \text{ ou } n < m\ .$$

Normalmente denotamos os elementos $(x, n) \in X$ simplesmente por x quando não há motivo para confusão.

Exemplo 4.7. $[\mathbb{N} + \mathbb{R}[$ não é atômica e $\mathrm{At}\,[\mathbb{N} + \mathbb{R}[\neq \emptyset$.

Seja $A = [\mathbb{N} + \mathbb{R}[$ e $a \in A$. Se a está completamente contida em $\mathbb{R}$, pelos mesmos motivos dados no exemplo 4.6, não existe átomo contido em a. Caso contrário, existe um intervalo contido em $\mathbb{N}$ tal que $[n, m[\subseteq a$ e então $[n, n+1[$ é um átomo contido em a, mostrando que $\mathrm{At}A$ é não vazio. De fato, é fácil verificar que $\mathrm{At}A = \{(n, 0) \in \mathbb{N} + \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

O estudo da presença de átomos numa álgebra pode nos fornecer uma compreensão maior de sua estrutura, logo ele se torna recorrente no estudo de álgebras de Boole.

Uma primeira consequência da ausência de átomos é infinitude. De fato, se A é uma álgebra não trivial e $a \in A^+$ é um elemento que não possui átomos abaixo dele, então dado $b_0 \leq a$, como ele não é um átomo, existe $b_1 \in A$ tal que $0 < b_1 < b_0$. Recursivamente, para cada b_i encontramos um elemento $b_{i+1} < b_i$, portanto $\{b_i \mid i \in \omega\} \subseteq A$ atesta que A é infinito. Colecionamos a contrapositiva desse resultado na proposição a seguir e a usaremos com frequência.

Proposição 4.8. *Toda álgebra finita é atômica.*

Vamos mostrar algumas propriedades de átomos e atomicidade.

Proposição 4.9. *Seja A uma álgebra de Boole e $a \in A$. São equivalentes:*

(i) a é um átomo de A.

(ii) Para cada $x \in A$, ou $a \leq x$ ou $a \leq -x$.

(iii) $a \in A^+$ e, para todos $x, y \in A$, temos que $a \leq x + y$ se e somente se $a \leq x$ ou $a \leq y$.

Demonstração: Suponha que a é um átomo de A e seja $x \in A$. Se $a \nleq x$, então $0 < a \cdot -x \leq a$ e como a é um átomo, segue que $a \cdot -x = a$ e portanto $a \leq -x$. Como $a > 0$, claramente $a \leq x$ e $a \leq -x$ não podem valer simultaneamente.

Suponha *(ii)* para um elemento $a \in A$ e sejam $x, y \in A$. Trivialmente, $a \leq x$ ou $a \leq y$ implicam $a \leq x + y$. Para a recíproca, suponha que $a \nleq x$, mas $a \leq x + y$. Então, por hipótese, $a \leq -x$ e logo $a \leq -x \cdot (x + y) = -x \cdot y \leq y$.

Por fim, suponha *(iii)* para um elemento $a \in A$ e seja $b \in A$ tal que $0 \leq b < a$. Agora, temos que $a = a \cdot b + a \cdot -b = b + a \cdot -b$ e como $a \nleq b$, temos que $a \leq a \cdot b$ pela hipótese. Portanto $a \leq -b$ e então $0 = a \cdot b = b$, mostrando que a é um átomo. ■

Proposição 4.10. *Seja A uma álgebra de Boole. Então A é atômica se e somente se $\sum \mathrm{At}A = 1$.*

Demonstração: Suponha que A é atômica e seja $b \in A$ que limita superiormente $\mathrm{At}A$. Se $b \neq 1$, então $-b \neq 0$ e, por atomicidade de A, existe $a \in \mathrm{At}A$ tal que $a \leq -b$. Logo $a \nleq b$, mostrando que 1 é o único limitante superior de $\mathrm{At}A$, portanto $\sum \mathrm{At}A = 1$.

Para a recíproca, vamos mostrar a contrapositiva. Suponha que existe $b \in A$ tal que $a \not\leq b$ para todo $a \in \mathrm{At}A$. Então, temos que $a \leq -b$ para todo átomo de A e portanto $\sum \mathrm{At}A \leq -b < 1$, se tal somatório existir. ■

Claramente $\mathrm{At}A$ é uma família (possivelmente vazia) de elementos dois a dois disjuntos em toda álgebra A, portanto $\mathrm{c}A \geq |\mathrm{At}A|$. Em particular, as álgebras finitas são atômicas, assim pelo resultado 2.25 de decomposição de álgebras finitas usando partições da unidade e pela proposição anterior, temos que

$$A \cong 2^{|\mathrm{At}A|}$$

para toda álgebra finita A. Juntando isto ao resultado 2.36 sobre isomorfismos em álgebras finitas, obtemos que duas álgebras finitas A e B são isomorfas se e somente se $|\mathrm{At}A| = |\mathrm{At}B|$.

Na realidade, dado uma álgebra finita A, $\mathrm{At}A$ é a única partição de A que atinge a sua celularidade, já que se X uma família disjunta e $b \in X$ não é um átomo, então existe $a \in \mathrm{At}A$ tal que $a < b$ e portanto $(X \setminus \{b\}) \cup \{a, b \cdot -a\}$ é uma família disjunta em A de cardinalidade maior que X. Mais geralmente, para uma álgebra atômica qualquer, temos a seguinte proposição.

Proposição 4.11. *Seja A uma álgebra de Boole. Se A é atômica, então $\mathrm{c}A$ é atingida por $\mathrm{At}A$.*

Demonstração: Seja A uma álgebra de Boole. Como observamos anteriormente, $\mathrm{c}A \geq |\mathrm{At}A|$ e $\mathrm{At}A$ é uma família de elementos dois a dois disjuntos, portanto basta mostrar que $\mathrm{c}A \leq |\mathrm{At}A|$.

De fato, seja X uma família disjunta em A. Por atomicidade, escolha para cada $x \in X$ um elemento $a_x \in \mathrm{At}A$ tal que $a_x \leq x$. Como X é uma família disjunta, para $x, y \in X$ distintos, temos que $a_x \cdot a_y \leq x \cdot y = 0$ e portanto $a_x \neq a_y$, mostrando que a associação $x \mapsto a_x$ é injetora e portanto provando o resultado. ■

Voltando à questão proposta no começo desta seção, nossa intuição sugere que $\wp(\mathrm{At}A)$ seria uma possível solução, porém mostraremos a seguir que este resultado depende de duas propriedades intrínsecas de álgebras finitas: atomicidade e completude.

Teorema 4.12 (Teorema de Representação de Lindenbaum-Taski)**.** *A função*

$$\begin{array}{rccl} f: & A & \to & \wp(AtA) \\ & x & \mapsto & \{a \in AtA \mid a \leq x\} \end{array}$$

é um homomorfismo de álgebras de Boole. Além disso

(I) se A é atômica, então f é um monomorfismo.

(II) se A é completa, então f é um epimorfismo.

(III) se A é atômica e completa, então A é isomorfa a $\wp(AtA)$.

Portanto

(a) Toda álgebra atômica é isomorfa a uma álgebra de conjuntos

(b) Toda álgebra atômica completa é isomorfa a uma álgebra de partes.

Demonstração: Vamos primeiramente verificar que f é um homomorfismo. De fato

$$f(x+y) = \{a \in \mathrm{At}A \mid a \leq x+y\} \overset{4.9}{=} \{a \in \mathrm{At}A \mid a \leq x\} \cup \{a \in \mathrm{At}A \mid a \leq y\} = f(x) \cup f(y)$$

e

$$f(-x) = \{a \in \mathrm{At}A \mid a \leq -x\} \overset{4.9}{=} \mathrm{At}A \setminus \{a \in \mathrm{At}A \mid a \leq x\} = \mathrm{At}A \setminus f(x)\ .$$

Agora, suponha que A é atômico e vamos mostrar que f é injetora. Sejam x e y elementos distintos de A, sem perda de generalidade suponha que $x \cdot -y > 0$ e, pela atomicidade de A, seja a um átomo de A tal que $a \leq x \cdot -y$. Logo $a \leq x$ e $a \nleq y$, assim $a \in f(x)$ e $a \notin f(y)$, isto é, $f(x) \neq f(y)$.

Com a suposição que A é completa, vamos mostrar que f é sobrejetora. Seja $Y \in \wp(\mathrm{At}A)$, como A é completa, existe $\sum Y$ em A. Claramente se $a \in Y$, então $a \leq \sum Y$ e logo $a \in f(\sum Y)$. Por outro lado, se $a \notin Y$, então para cada $y \in Y$, a e y são átomos distintos, logo $a \cdot y = 0$, assim

$$a \cdot \sum Y = \sum \{a \cdot y \mid y \in Y\} = \sum 0 = 0 \neq a\ .$$

Logo $a \nleq \sum Y$ e portanto $a \notin f(\sum Y)$. Concluímos que $Y = f(\sum Y)$.

Por fim, os outros itens seguem do que já foi provado. ∎

Observação 4.13. O teorema acima fornece mais uma demonstração distinta do resultado 2.36, já que dadas duas álgebras finitas A e B, se $|A| = |B|$, então $|\wp(\mathrm{At}A)| = |\wp(\mathrm{At}B)|$. Logo $|\mathrm{At}A| = |\mathrm{At}B|$ e agora qualquer bijeção entre $\mathrm{At}A$ e $\mathrm{At}B$ pode ser usada para construir um isomorfismo entre A e B, como foi feito na observação 1.4.

Note que como toda álgebra de partes é completa e atômica (ver 2.3 e 4.4 respectivamente), temos o seguinte corolário, uma reescrita do primeiro teorema enunciado na introdução deste capítulo.

Corolário 4.14. *Uma álgebra de Boole A é atômica e completa se e somente se $A \cong \wp(X)$ para algum conjunto X.*

Assim, caracterizamos as álgebras de partes como sendo as únicas que possuem estas propriedades simultaneamente. Isto mostra, por exemplo, que as álgebras da forma Fin$\text{Cofin}X$ com X infinito e $[L[$ com L densa em si mesma não são isomorfas a nenhuma álgebra de partes por falta de completude e atomicidade respectivamente.

4.2 Filtros

O Teorema de Representação de Lindenbaum-Taski apresentado acima é pouco útil na ausência de átomos, já que neste caso $\wp(\text{At}A)$ se reduz à álgebra trivial e o homomorfismo $f : A \to \{\emptyset\}$ é na realidade a única função possível. Procuramos então um conceito que generaliza átomos e está presente em toda álgebra de Boole, e é exatamente esta procura que nos leva a filtros.

Definição 4.15. Seja A uma álgebra de Boole. Para cada $S \subseteq A$, defina uma função $\chi_S : A \to 2$, dita a *função característica* de S, tal que

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{se } x \in S \\ 0\,, & \text{se } x \notin S \end{cases}$$

Definição 4.16. Sejam A e B álgebra de Boole. Definimos o conjunto

$$\text{Hom}(A,B) = \{f : A \to B \mid f \text{ é homomorfismo}\}$$

e o conjunto

$$\text{sHom}(A,B) = \{f : A \to B \mid f \text{ é semi-homomorfismo}\}\ .$$

Note que toda função $h : A \to 2$ é completamente determinada pela imagem inversa de 1, já que, se $x \in h^{-1}(1)$, então

$$\chi_{h^{-1}(1)}(x) = 1 = h(x)$$

e se $x \notin h^{-1}(1)$, então

$$\chi_{h^{-1}(1)}(x) = 0 = h(x).$$

Portanto $h = \chi_{h^{-1}(1)}$, e os conjuntos $\text{Hom}(A,2)$ e $\text{sHom}(A,2)$ podem ser identificados como funções características.

Definição 4.17. Um subconjunto p de uma álgebra de Boole é dito um *filtro* (de A) se a função característica de p é um semi-homomorfismo, isto é, se $\chi_p \in \text{sHom}(A,2)$.

Claramente, uma função característica χ_S não precisa ser um semi-homomorfismo, assim nem todo subconjunto de uma álgebra é um filtro. Porém, quando isto ocorre, existe uma boa interpretação: o filtro $S = {\chi_S}^{-1}[1]$ é uma coleção de elementos "grandes" da álgebra e $A \setminus S = {\chi_S}^{-1}[0]$ é uma coleção de elementos "pequenos" da álgebra. Tornamos esta interpretação mais precisa na seguinte proposição.

Proposição 4.18. *Um subconjunto p de uma álgebra de Boole A é um filtro de A se e só se*

(i) $1 \in p$.

(ii) Se $x, y \in p$, então $x \cdot y \in p$

(iii) Se $x \in p$, então $\{y \in A \mid x \leq y\} \subseteq p$

Demonstração: Suponha que p é um filtro de A. Como χ_p é um semi-homomorfismo, temos que $\chi_p(1) = 1$ e portanto $1 \in p$. Se $x, y \in p$, então $\chi_p(x \cdot y) = \chi_p(x) \cdot \chi_p(y) = 1 \cdot 1 = 1$, logo $x \cdot y \in p$. Agora, como todo semi-homomorfismo é monótono, se $x \in p$ e $y \geq x$, então $\chi_p(y) \geq \chi_p(x) = 1$ e portanto $y \in p$.

Reciprocamente, seja p um conjunto que satisfaz as propriedades listadas. Pela propriedade *(i)*, temos que $\chi_p(1) = 1$. Agora, sejam $x, y \in A$. Se $x \in p$ e $y \in p$, então, pela propriedade *(ii)*, $x \cdot y \in p$. Logo $\chi_p(x) \cdot \chi_p(y) = 1 \cdot 1 = 1 = \chi_p(x \cdot y)$. Note que se $x \cdot y \in p$, pela propriedade *(iii)*, temos que $x \in p$ e $y \in p$, assim pela contrapositiva, temos que se $x \notin p$ ou $y \notin p$, então $x \cdot y \notin p$ e segue que $\chi_p(x) \cdot \chi_p(y) = 0 = \chi_p(x \cdot y)$. Portanto χ_p é um semi-homomorfismo. ■

Para o resto desta subseção usaremos *(i)*, *(ii)* e *(iii)* exclusivamente para nos referir as propriedades listadas na proposição anterior.

Agora, voltemos a discussão sobre como podemos pensar intuitivamente sobre filtros como coleções de elementos "grandes" na ordem parcial. A condição *(i)* garante que 1, o maior elemento da ordem, sempre pertença a um filtro. A condição *(ii)* afirma que estes elementos são tão grandes que o ínfimo deles ainda é grande. Por fim, a condição *(iii)* traz a ideia transitiva que se um elemento é grande, os elementos maiores que ele também são grandes.

Observação 4.19. Em ordens parciais quaisquer, nas quais a noção de semi-homomorfismo pode não fazer sentido, a definição usual de filtro é dada por

(i') $p \neq \emptyset$.

(ii') Se $x, y \in p$, então existe $z \in p$ tal que $z \leq x$ e $z \leq y$.

e a propriedade *(iii)* listada anteriormente.

Em uma álgebra de Boole, se p é um subconjunto não vazio dela, o item *(iii)* garante que $1 \in p$. Além disso, como $x \cdot y = \inf\{x, y\}$, as condições *(i')* e *(ii')* acima, na presença da condição *(iii)*, são equivalentes as condições *(i)* e *(ii)*.

Lema 4.20. *Seja $P = \{p_i\}_{i \in I}$ uma família de filtros de uma álgebra A. Então $\bigcap P$ é um filtro de A.*

Demonstração: Seja P como no enunciado, $p = \bigcap P$ e vamos mostrar que p satisfaz as propriedades *(i)*, *(ii)* e *(iii)*. Como todo filtro contém o elemento 1, temos que $1 \in p$. Se $x, y \in p$, então $x, y \in p_i$ para todo $i \in I$ e como p_i é um filtro, segue que $x \cdot y \in p_i$ e portanto $x \cdot y \in p$. Analogamente, se $x \in p$, então $\{y \in A \mid x \leq y\} \subseteq p_i$ para todo $i \in I$ e portanto $\{y \in A \mid x \leq y\} \subseteq p$. ■

Para um primeiro exemplo de filtro, sejam A uma álgebra de Boole e $a \in A$ qualquer e defina o conjunto

$$p_a = \{b \in A \mid a \leq b\}.$$

É fácil verificar que p_a é um filtro e que ele é o menor subconjunto de A que contém o elemento a e satisfaz as propriedades *(i)*, *(ii)* e *(iii)* de filtro, portanto

$$p_a = \bigcap \{p \subseteq A \mid p \text{ é um filtro de } A \text{ que contém } a\}\ .$$

Em particular, se $a = 1$, p_a é simplesmente $\{1\}$. Se $a = 0$, então p_a coincide com A. Isto justifica as próximas definições.

Definição 4.21. Seja A uma álgebra de Boole e p um filtro de A. Dizemos que

(i) p é um *filtro principal* se existir $a \in A$ tal que $p = p_a$.

(ii) p é um *filtro próprio* se $p \neq A$, isto é, se $p \neq p_0$.

(iii) p é o *filtro trivial* se $p = \{1\}$, isto é, se $p = p_1$.

Podemos generalizar o conceito de filtro principal considerando mais elementos: sejam A uma álgebra de Boole e $E \subseteq A$ não vazio. Defina a conjunto

$$p_E = \left\{x \in A \mid \prod F \leq x \text{ para algum subconjunto finito não vazio } F \subseteq E\right\}.$$

Vamos verificar que p_E é um filtro. Claramente $1 \in p_E$. Sejam $x, y \in p_E$, então existem $F, G \subseteq E$ finitos tais que $\prod F \leq x$ e $\prod E \leq y$, portanto $\prod F \cup E \leq x \cdot y$ e logo $x \cdot y \in p_E$. Por fim, se $x \in p_E$ e $y \geq x$, o conjunto finito que atesta a presença de x em p_E também atesta a de y. Esta ideia generaliza filtros principais, já que claramente $p_{\{a\}} = p_a$ e $E \subseteq p_E$.

Definição 4.22. Sejam A uma álgebra de Boole, e p um filtro de A. Dizemos que p é o *filtro gerado por E* (em A) se existir $E \subseteq A$ tal que $p = p_E$.

Assim, dizemos que o filtro gerado por um conjunto unitário $\{a\}$ é simplesmente o filtro principal gerado por a. O uso da denominação "filtro gerado" é justificado pelo seguinte lema.

Lema 4.23. *O filtro gerado por um subconjunto E em A é o menor filtro, no sentido da inclusão, que contém E. Mais precisamente,*

$$p_E = \bigcap\{p \subseteq A \mid p \text{ é um filtro de } A \text{ que contém } E\} \ .$$

Demonstração: Suponha que p é um filtro que contém E. Dado $F \subseteq E$ finito, aplicando $|F|$ vezes a propriedade *(ii)* da definição de filtro, temos que $\prod F \in p$. Aplicando a propriedade *(iii)* para $\prod F \in p$, concluímos que $p_E \subseteq p$. ∎

Lema 4.24. *Seja A uma álgebra de Boole e $p \subseteq A$. São equivalentes:*

(a) *p é um filtro em A.*

(b) *$1 \in p$ e, para todos $x, y \in A$, $x \cdot y \in p$ se e somente se $x \in p$ e $y \in p$.*

Demonstração: Seja p um filtro em A. Basta provar que $x \cdot y \in p$ implica que $x \in p$ e $y \in p$, o que segue do fato que $x \cdot y = \inf\{x, y\}$ e da propriedade *(iii)* da definição de filtro.

Reciprocamente, se p satisfaz *(b)*, então imediatamente temos as propriedades *(i)* e *(ii)*. Para mostrar a propriedade *(iii)*, seja $x \in p$ e $y \geq x$. Então $x \cdot y = x \in p$, e portanto $x \in p$ e $y \in p$, o que mostra que $\{y \in A \mid x \leq y\} \subseteq p$. ∎

Uma pergunta natural é se todo filtro surge como os apresentados anteriormente, isto é, se todo filtro pode ser descrito como a intersecção de filtros que contém um subconjunto fixo. Mostraremos que isto ocorre no caso de álgebras finitas.

Proposição 4.25. *Todo filtro em uma álgebra de Boole finita é um filtro principal.*

Demonstração: Seja A uma álgebra de Boole finita e p um filtro de A. Como $p \subseteq A$, ele é finito e logo podemos encontrar elementos minimais de p na ordem parcial booleana.

Suponha por absurdo que há dois elementos minimais distintos a_1 e a_2 de p, segue que $a_1 \cdot a_2$ pertence a p. Como ambos são minimais e distindos, temos que $a_1 \neq a_1 \cdot a_2 \neq a_2$ e logo $a_1 \cdot a_2$ é um elemento de p estritamente menor do que a_1 e do que a_2, contradizendo a minimalidade de cada um deles. Assim seja a o mínimo de p e é imediato que p é o filtro gerado por a. ∎

4.3 Ultrafiltros

Observe que se a é um átomo de A, então o filtro principal gerado por a é maximal entre os filtros próprios da álgebra. De fato, se existir um filtro f que contém propriamente p_a, então seja $x \in f \setminus p_a$. Como $x \notin p_a$, temos que $a \not\leq x$ e como a é um átomo, segue que $a \leq -x$, então $-x, x \in f$ e logo $0 \in f$, portanto f não é um filtro próprio. Isto motiva a seguinte definição.

Definição 4.26. Seja A uma álgebra de Boole e p um filtro. Dizemos que p é um *ultrafiltro* se p é um filtro próprio maximal entre os filtros próprios de A, isto é, se não existe filtro próprio de A que contém propriamente p. Denotamos por $\mathrm{Ult}A$ o conjunto de todos os ultrafiltros de uma álgebra de Boole A.

Na linguagem desta definição, podemos reescrever a observação anterior a ela como a seguinte preposição.

Proposição 4.27. *Um filtro principal é um ultrafiltro se e somente se ele é gerado por um átomo.*

Em particular, os ultrafiltros de uma álgebra finita são facilmente descritos.

Proposição 4.28. *Toda ultrafiltro em uma álgebra de Boole finita é gerado por um átomo.*

Demonstração: Dado um ultrafiltro em uma álgebra A, pela preposição 4.25 ele é da forma p_a para algum $a \in A^+$ e, pela preposição 4.27, segue que a é um átomo. ■

Finalmente, vamos recontextualizar o Teorema de Representação de Lindenbaum-Taski em função de filtros. Seja novamente $f : A \to \wp(\mathrm{At}A)$ a função enunciada nele. Provamos que cada átomo a determina um único ultrafiltro p_a, que por sua vez determina um único homomorfismo χ_{p_a}. Assim, podemos realizar este processo para obter a seguinte função bem definida.

$$\begin{array}{rccl} f' : & A & \to & \wp(\mathrm{Hom}(A,B)) \\ & t & \mapsto & \{\chi_{p_a} \mid a \in f(t)\} \end{array}$$

Vamos verificar que f' é um homomorfismo. De fato, se $x, y \in A$, então

$$\begin{aligned} f'(x+y) &= \{\chi_{p_a} \mid a \in f(x+y)\} = \{\chi_{p_a} \mid a \in f(x) \cup f(y)\} \\ &= \{\chi_{p_a} \mid a \in f(x)\} \cup \{\chi_{p_a} \mid a \in f(y)\} = f'(x) \cup f'(y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f'(x \cdot y) &= \{\chi_{p_a} \mid a \in f(x \cdot y)\} = \{\chi_{p_a} \mid a \in f(x) \cap f(y)\} \\ &= \{\chi_{p_a} \mid a \in f(x)\} \cap \{\chi_{p_a} \mid a \in f(y)\} = f'(x) \cap f'(y) \,. \end{aligned}$$

Agora, se a e b são distintos, pela injetividade de f, $f(a)$ e $f(b)$ são distintos, e como para cada $S \subseteq A$, $\chi_S = \chi_{\chi^{-1}[1]}$, temos que $f'(a) \neq f'(b)$, portanto f' é um monomorfismo. Assim, provamos que toda álgebra de Boole A atômica é isomorfa a uma subálgebra de $\wp(\mathrm{Hom}(A,2))$.

A vantagem aqui é evidente: enquanto a álgebra $\wp(\mathrm{At}A)$ pode ser trivial para uma álgebra qualquer, o mesmo aparentemente não ocorre com a álgebra $\wp(\mathrm{Hom}(A,2))$.

Assim, agora procuramos incluir homomorficamente toda álgebra de Boole A na álgebra $\wp(\text{Hom}(A,2))$ ou, equivalentemente, na álgebra $\wp(\text{Ult}A)$. Observe que para demonstrar que a função f do Teorema de Representação de Lindenbaum-Taski[4.12] é um homomorfismo, usamos essencialmente dois resultados sobre átomos:

- Se a é um átomo, então para cada $x \in A$, ou $a \leq x$ ou $a \leq -x$.
- Se a é um átomo, então para todos $x, y \in A$, $a \leq x + y$ se e somente se $a \leq x$ ou $a \leq y$.

Reescrevendo os resultados acima no contexto do ultrafiltro determinado por cada átomo, temos

- Se a é um átomo, então para cada $x \in A$, ou $x \in p_a$ ou $-x \in p_a$.
- Se a é um átomo, então para todos $x, y \in A$, $x + y \in p_a$ se e somente se $x \in p_a$ ou $y \in p_a$.

Assim, se mostrarmos que estas propriedades valem em geral para ultrafiltros quaisquer, isto é, trocando "p_a, para a átomo" por "p, para p ultrafiltro", podemos demonstrar que um mapa semelhante a f é um homomorfismo, associando cada elemento a um conjunto de ultrafiltros que o contém, retirando a dependência dos átomos. É exatamente este o objetivo da próxima proposição.

Proposição 4.29. *Seja A uma álgebra de Boole e p um filtro de A. São equivalentes:*

(i) *p é um ultrafiltro.*

(ii) *Para todo $x \in A$, vale que ou $x \in p$ ou $-x \in p$.*

(iii) *p é um filtro próprio e para todos $x, y \in A$, $x + y \in p$ se e só se $x \in p$ ou $y \in p$.*

Demonstração: *(i) implica (ii):* Seja $x \in A$ qualquer. Suponha que $x \notin p$, então pela maximalidade de p entre os filtros próprios de A, o filtro gerado por $p \cup \{x\}$ contém 0, logo pelo lema 4.24, existe algum $a \in p$ tal que $a \cdot x = 0$, portanto $a \leq -x$ e daí $-x \in p$.

(ii) implica (iii): Provaremos pela contrapositiva. Se $0 \in p$, então *(ii)* não vale, pois $-0 = 1 \in p$. Assim *(ii)* implica que p é um filtro próprio. Agora, para a direção não trivial da segunda afirmação de *(iii)*, assuma que $x \notin p$ e $y \notin p$, então $-x \in p$ e $-y \in p$ e portanto $-x \cdot -y = -(x + y) \in p$.

(iii) implica (i): Basta mostrar que o filtro gerado por $p \cup \{x\}$ não é próprio para todo $x \notin p$. De fato, como $x \notin p$ mas $x + -x = 1 \in p$, temos que $-x \in p$, portanto $x \cdot -x = 0$ pertence ao filtro gerado por $p \cup \{x\}$. ■

Voltando a definição original 4.17 de filtros, vamos mostrar que a maximalidade é exatamente o que faltava para os semi-homomorfismos característicos dos filtros serem homomorfismos.

Proposição 4.30. *Um subconjunto p de uma álgebra de Boole A é um ultrafiltro se e somente se χ_p é um homomorfismo, isto é, se $\chi_p \in Hom(A, B)$.*

Demonstração: Suponha que p é um ultrafiltro. Como p é um filtro, temos que χ_p é um semi-homomorfismo, logo χ_p é um homomorfismo se e só se χ_p preserva complemento. Note que

$$\chi_p(-x) = -\chi_p(x),\ \forall x \in A \iff \nexists x \in A \text{ tal que } x \in p \text{ e } x \notin p\,.$$

Portanto p é um ultrafiltro pelo segundo item da proposição 4.29. ■

Finalmente, estamos nas condições de construir um homomorfismo entre qualquer álgebra de Boole e uma álgebra de partes.

Definição 4.31. Seja A uma álgebra de Boole. Defina a função

$$\begin{array}{rccl} s_A: & A & \to & \wp(\mathrm{Ult}A) \\ & a & \mapsto & \{p \in \mathrm{Ult}A \mid a \in p\} \end{array}$$

entre álgebras de Boole. Dizemos que s_A é o *mapa de Stone (de A)* e, quando possível, evitaremos o subscrito e a denotaremos simplesmente por s. O mapa de Stone também é chamado comumente de *homomorfismo de Stone* devido a próxima proposição.

Proposição 4.32. *O mapa de Stone é um homomorfismo entre álgebras de Boole.*

Demonstração: Seja A uma álgebra de Boole e s seu mapa de Stone. Temos que

$$s(x+y) = \{p \in \mathrm{Ult}A \mid x+y \in p\} \overset{4.29}{=} \{p \in \mathrm{Ult}A \mid x \in p\} \cup \{p \in \mathrm{Ult}A \mid y \in p\} = s(x) \cup s(y)$$

e

$$s(-x) = \{p \in \mathrm{Ult}A \mid -x \in p\} \overset{4.29}{=} \mathrm{Ult}A \smallsetminus \{p \in \mathrm{Ult}A \mid x \in p\} = \mathrm{Ult}A \smallsetminus s(x)\,.$$

Portanto, s é um homomorfismo entre álgebras de Boole. ■

4.4 O Teorema de Representação de Stone

Na demonstração do Teorema de Representação de Lindenbaum-Taski[4.12], a hipótese de atomicidade foi utilizada para mostrar que f é um monomorfismo. De fato, se a álgebra não tem "átomos o suficiente", o homomorfismo f falha em ser injetor. Analogamente, queremos garantir que toda álgebra tem "ultrafiltros o suficiente" para que o homomorfismo de Stone seja um monomorfismo, o que será o objetivo desta subseção.

Mais precisamente, assim como antes precisávamos que todo elemento tivesse um átomo abaixo dele, agora queremos que todo elemento tenha um ultrafiltro que o contém. Para isto, precisaremos do Axioma da Escolha[1]. Relembramos sua seguinte equivalência:

Teorema 4.33 (Lema de Zorn)**.** *Seja $(P, \leq)$ uma ordem parcial não vazia. Se toda cadeia não vazia de P admitir uma limitante superior em P, então P admite elemento maximal.*

Definição 4.34. Seja X um subconjunto de uma álgebra de Boole. Dizemos que X tem a *propriedade da intersecção finita* se $\prod F > 0$, para todo subconjunto $F \subseteq X$ finito.

O nome do próximo teorema tem origem histórica na conexão entre ultrafiltros de álgebras de Boole e ideais primos de anéis booleanos. Ele é estritamente mais fraco do que o Axioma da Escolha e equivale ao produto qualquer de espaços topológicos T_2 ser compacto se e somente cada um deles é compacto, isto é, o Teorema de Tychonoff restrito a espaços topológicos T_2. Assim, poderíamos assumir-lo como um axioma adicional e prosseguir a teoria, porém não faremos isto pois pretendemos usar habitualmente o Axioma da Escolha neste texto.

Teorema 4.35 (Teorema dos ideais primos booleanos)**.** *Um subconjunto X de uma álgebra de Boole está incluso em um ultrafiltro se e somente se X tem a propriedade da intersecção finita.*

Demonstração: Se um conjunto X de uma álgebra de Boole A não tem a propriedade da intersecção finita, então existe $F \subseteq X$ finito tal que $\prod F = 0$ e portanto $0 \in p_X = A$. Como p_X é o menor filtro que contém X, concluímos que não existe ultrafiltro que contém X.

Reciprocamente, suponha que X tem a propriedade da intersecção finita e seja

$$P = \{p \subseteq A \mid p \text{ é um filtro e } p_X \subseteq p\}$$

parcialmente ordenado pela inclusão. P é não vazia, pois $p_X \in P$. Como X tem a propriedade da intersecção finita, $0 \notin p_X$ e portanto P é um conjunto de filtros próprios. Seja C uma cadeia não vazia de P. Claramente $\bigcup C$ limita superiormente C e contém p_X, vamos mostrar que $\bigcup C$ é um filtro.

Como todo elemento de C é um filtro, temos que $1 \in \bigcup C$. Se $x, y \in \bigcup C$, então existem filtros $p^x, p^y \in C$ tais que $x \in p^x$ e $y \in p^y$. Como C é uma cadeia, podemos supor sem perda de generalidade que $p^x \subseteq p^y$, logo $x, y \in p^y$. Como p^y é um filtro, $x \cdot y \in p^y$ e portanto $x \cdot y \in \bigcup C$. Analogamente, se $x \in \bigcup C$ e $y \geq x$, então existe filtro p^x que contém x, logo $y \in p^x$ e assim $y \in \bigcup C$, o que mostra que $\{y \in A \mid y \geq x\} \subseteq \bigcup C$.

[1] De fato, já utilizamos sem preocupação o Axioma da Escolha algumas vezes até agora, mas esta é a primeira instância em que ele é fundamental à teoria. Para uma exploração de como a dualidade topológica de Stone fica na ausência do Axioma da Escolha, recomendamos [BH20].

Portanto, pelo Lema de Zorn, P admite um elemento maximal, seja ele p. Então p é um ultrafiltro de A que contém p_X, e logo contém X. ■

Corolário 4.36. *Todo elemento não nulo de uma álgebra de Boole está contido em um ultrafiltro.*

Demonstração: O subconjunto $\{a\}$ de uma álgebra de Boole tem a propriedade da intersecção finita se $a > 0$. ■

Teorema 4.37 (Teorema de Representação de Stone - Versão Conjuntista)**.** *Toda álgebra de Boole é isomorfa a uma álgebra de conjuntos. Mais precisamente, o mapa de Stone de uma álgebra A é um monomorfismo que testemunha que A é isomorfa a uma subálgebra da álgebra de partes $\wp(Ult A)$.*

Demonstração: Seja A uma álgebra de Boole. Já provamos na proposição 4.32 que o mapa de Stone s é um homomorfismo, basta mostrar que ele é um monomorfismo.

De fato, se a e b são elementos distintos de A, podemos supor sem perda de generalidade que $a \cdot -b > 0$, logo existe um ultrafiltro p de A que contém $a \cdot -b$. Como p é um filtro e $a \cdot -b \in p$, temos que $a \in p$ e $-b \in p$. Como p é um ultrafiltro e $-b \in p$, temos que $b \notin p$, assim $p \in s(a) \setminus s(b)$ e portanto $s(a) \neq s(b)$. ■

4.5 Trivialização da aritmética finita

O Teorema de Representação de Stone nos dá uma confirmação da noção intuitiva inicial que álgebras de Boole são essencialmente álgebras de conjuntos, mas (in)felizmente ele não trivializa todos os problemas.

A grande maioria dos resultados combinatórios que serão apresentados tem demonstrações que não se beneficiam concretamente de considerar somente álgebras de conjuntos e existem álgebras que não são de conjuntos onde as operações originais acabam sendo mais intuitivas de trabalhar do que sua imagem pelo homomorfismo de Stone.

Entretanto, existe um aspecto que é extremamente simplificado ao considerar as ferramentas desenvolvidas nessa seção: a aritmética finita das álgebras de Boole. Vamos brevemente chamar de *equação* qualquer fórmula $\Phi = \Phi(x_1, \cdots, x_n)$ da forma

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n) = \psi(x_1, \cdots, x_n)$$

onde φ e ψ são expressões algébricas que dependem apenas das variáveis $x_1, \cdots, x_n$, com n natural, e de aplicações finitas das operações booleanas $+, \cdot$ e $-$ nestas variavéis. Dado uma álgebra de Boole A, dizemos que Φ é *verdadeira em A* se os valores de φ e ψ coincidem para toda atribuição de elementos $a_1, \cdots, a_n$ de A às variáveis em $x_1, \cdots, x_n$.

Teorema 4.38. *Seja Φ uma equação. São equivalentes:*

(I) *Φ é verdadeira em toda álgebra de Boole*

(II) *Φ é verdadeira em toda álgebra das partes*

(III) *Φ é verdadeira em toda álgebra de conjuntos*

(IV) *Φ é verdadeira em alguma álgebra de Boole não-trivial*

(V) *Φ é verdadeira na álgebra de dois elementos.*

Demonstração: Claramente *(I)* implica *(II)*. Como toda álgebra de conjuntos é subálgebra de uma álgebra das partes, temos que *(II)* implica *(III)*. Evidentemente *(III)* implica *(IV)*. A álgebra de dois elementos é homomorficamente incluída em toda álgebra não-trivial, logo *(IV)* implica *(V)*.

Finalmente, assuma que *(I)* falha para uma equação Φ da forma $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = \psi(x_1, \cdots, x_n)$, com o objetivo de provar que *(V)* também falha e portanto demonstrando que *(V)* implica *(I)*.

Assim, sejam A uma álgebra de Boole e $a_1, \cdots, a_n \in A$ tais que $\varphi(a_1, \cdots, a_n) \neq \psi(a_1, \cdots, a_n)$. Suponha sem perda de generalidade que $\varphi(a_1, \cdots, a_n) \cdot -\psi(a_1, \cdots, a_n) > 0$ e então existe um ultrafiltro p de A que contém $\varphi(a_1, \cdots, a_n)$ e não contém $\psi(a_1, \cdots, a_n)$. Como p é um ultrafiltro, sua função característica $\chi_p : A \to 2$ é um homomorfismo. Como φ é construída de uma quantidade finita de aplicações das operações booleanas, temos que

$$1 = \chi_p(\varphi(a_1, \cdots, a_n)) = \varphi(\chi_p(a_1), \cdots, \chi_p(a_n))$$

e analogamente

$$0 = \chi_p(\psi(a_1, \cdots, a_n)) = \psi(\chi_p(a_1), \cdots, \psi_p(a_n))$$

portanto Φ não é verdadeira na álgebra de dois elementos. ■

Note que inequações da forma $\varphi(x_1, \cdots, x_n) \leq \psi(x_1, \cdots, x_n)$ também podem ser determinadas verdadeiras com o método acima, já que por definição

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n) \leq \psi(x_1, \cdots, x_n) \iff \varphi(x_1, \cdots, x_n) + \psi(x_1, \cdots, x_n) = \psi(x_1, \cdots, x_n)$$

e podemos aplicar o teorema acima na expressão da direita.

Assim, todas as relações algébricas enunciadas na seção 1 poderiam ser demonstradas usando as noções usuais de união, intersecção e complemento ou através da tabela verdade do exemplo 1.9 e um pouco de paciência. Por isso, a partir de agora, usaremos livremente equações elementares que são verdadeiras em todo álgebra de Boole e deixamos para o(a) leitor(a) inspirado(a) usar um destes métodos para verificar a validade delas.

4.6 O Lema de Rasiowa-Sikorski

Mostramos anteriormente que se U é um ultrafiltro, então

- Se $x + y \in U$, então $x \in U$ ou $y \in U$.
- Se $\{x, y\} \subseteq U$, então $x \cdot y \in U$.

A seguir definimos generalizações destas propriedades para o caso infinito.

Definição 4.39. Seja U um ultrafiltro de A, dizemos que

- U preserva $\sum M$ se $\sum M \in U$ implicar que $m \in U$ para algum $m \in M$.
- U preserva $\prod N$ se $N \subseteq U$ implicar que $\prod N \in U$.

Claramente para M e N finito, as preservações acima ocorrem. Elas não precisam ocorrer no caso infinito para um ultrafiltro arbitrário, porém mostramos a seguir que pondo limitações na cardinalidade de M e N, existe pelo menos um ultrafiltro com tais propriedades.

Teorema 4.40 (Lema de Rasiowa-Sikorski)**.** *Sejam A uma álgebra de Boole não trivial e S uma família de subconjuntos de A tais que $\sum M$ existe para cada $M \in S$. Se $|S| \leq \aleph_0$, então existe um ultrafiltro de A que preserva $\sum M$ para todo $M \in S$.*

Demonstração: Seja $\{M_n \mid n \in \omega\}$ uma enumeração de S. Vamos construir uma sequência decrescente $(a_n)_{n\in\omega}$ em A^+ tal que, para todo $n \in \omega$, $a_{n+1} \cdot \sum M_n = 0$ ou $a_n < m$ para algum $m \in M_n$.

Tome $a_0 = 1$ e suponha construído $a_0 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_n$ com a propriedade descrita acima. Se $a_n \cdot \sum M_n = 0$, tome $a_{n+1} = a_n$ e claramente temos a propriedade desejada. Caso $a_n \cdot \sum M_n \neq 0$, pelo item [x da proprosição y], segue que

$$0 < a_n \cdot \sum M_n = \{a_n \cdot m \mid m \in M_n\}$$

logo existe $m \in M_n$ tal que $a_n \cdot m > 0$, tome $a_{n+1} = a_n \cdot m$ e temos que $a_{n+1} < m$ e $a_{n+1} \leq a_n$, como desejado. Como o conjunto $\{a_n \mid n \in \omega\}$ é uma cadeia decrescente de elementos não nulos, ele tem a PIF, logo existe um ultrafiltro U que o contém e basta agora mostrar que este é o ultrafiltro que procurávamos.

De fato, suponha que $\sum M_n \in U$ para algum $n \in \omega$. Como $a_{n+1} \in U$ e U é ultrafiltro, temos que $a_{n+1} \cdot \sum M_n > 0$, logo pela construção de a_n, existe algum $m \in M_n$ tal que $a_n \leq m$ e segue que $m \in U$. Portanto U preserva $\sum M_n$ para cada $M_n \in S$. ■

Pela Leis de De Morgan e pelo fato que união de dois conjuntos enumeráveis ser enumerável, podemos transferir o resultado acima para a preservação de produtos.

Corolário 4.41. *Sejam A uma álgebra de Boole não trivial, S e P famílias de subconjuntos de A tais que $\sum M$ existe para cada $M \in S$ e $\prod N$ existe para cada $N \in P$. Se $|S|, |P| \leq \aleph_0$, então existe um ultrafiltro A que preserva $\sum M$ e $\prod N$ para todo $M \in S$ e $N \in P$.*

A hipótese sobre as cardinalidade de S e P acima não podem ser retiradas em ZFC. O seguinte axioma (e sua negação) porém é consistente com ZFC.

Axioma 4.42 (Axioma de Martin)**.** *Sejam A uma álgebra de Boole, S uma família de subconjuntos de A tal que $|S| < 2^{\omega}$ e $\sum M$ existe para cada $M \in S$. Então existe um ultrafiltro de A que preserva $\sum M$ para cada $M \in S$.*

Note que a hipótese do contínuo implica no Axioma de Martin, já que sob CH ele se torna simplesmente o Lema e Rasiowa-Sikorski que provamos anteriormente.

5 Dualidade topológica

Esta seção é dedicada a relação fundamente entre álgebras de Boole e espaços topológicos específicos, ditos booleanos. Vamos fortalecer o Teorema de Representação de Stone, identificando precisamente a subálgebra $s[A]$ de $\wp(\mathrm{Ult}A)$ como um conjunto específico de abertos de um espaço topológico e mostrando como as propriedades topológicas de tal espaço determinam as propriedades algébricas de A.

5.1 Topologia geral

Supomos que o(a) leitor(a) já tenha algum tipo de conhecimento sobre a teoria de espaços topológicos, então não faremos uma introdução motivadora do assunto, mas para fins de completude do texto, usamos essa subseção para listar algumas definições básicas, fixar notações e provar alguns resultados puramente topológicos que são essenciais para a teoria.

Os resultados que não forem demonstrados podem ser encontrados em qualquer livro de introdução a topologia geral, o autor particularmente recomenda [Eng89]. Resultados topológicos mais específicos serão provados ao longo do resto da monografia quando eles se tornarem pertinentes.

Para o(a) leitor(a) familiarizado(a) até demais com conceitos topológicos, recomendamos fortemente continuar a leitura na subseção 5.2 e usar o índice remissivo caso necessário.

5.1.1 Espaços topológicos e funções contínuas

Definição 5.1. Um espaço topológico é um par $(X, \mathfrak{T})$, onde X é um conjunto e $\mathfrak{T}$ é um subconjunto de $\wp(X)$ tal que

(i) $\emptyset \in \mathfrak{T}$ e $X \in \mathfrak{T}$.

(ii) Se $\mathcal{S}$ é um subconjunto de $\mathfrak{T}$, então $\bigcup \mathcal{S} \in \mathfrak{T}$.

(iii) Se $\mathcal{S}$ é um subconjunto finito (não vazio) de $\mathfrak{T}$, então $\bigcap \mathcal{S} \in \mathfrak{T}$.

Dizemos que $\mathfrak{T}$ é a *topologia* de $(X, \mathfrak{T})$. Quando a topologia está implícita, denotamos o espaço topológico $(X, \mathfrak{T})$ simplesmente por X. Além disso, dado um espaço topológico $(X, \mathfrak{T})$ dizemos que

- Um elemento de X é um *ponto* do espaço topológico.
- Um elemento de $\mathfrak{T}$ é um *aberto* do espaço topológico.

- Um elemento de $\wp(X)$ é um *fechado* do espaço topológico se seu complemento é aberto.

Quando um espaço topológico é dado simplesmente por X e queremos nos referir sucintamente a sua topologia, usaremos o símbolo $\mathfrak{T}_X$.

Definição 5.2. Uma função $f : X \to Y$ entre espaços topológicos é dita contínua se toda imagem inversa de abertos de Y por f é aberta em X, isto é, $f^{-1}[U] \in \mathfrak{T}_X$ para todo $U \in \mathfrak{T}_Y$.

Exemplo 5.3 (Topologia discreta)**.** Se X é um conjunto, então $\wp(X)$ é uma topologia em X, dita *topologia discreta* (em X). Note que nela, todo subconjunto de X é aberto e fechado.

Exemplo 5.4 (Topologia caótica)**.** Se X é um conjunto, então $\{\emptyset, X\}$ é uma topologia em X, dita a *topologia caótica* (em X).

Note que os exemplos acima mostram que os conceitos de aberto e fechado não são opostos, como seus nomes podem nos levar a acreditar. Quando um aberto também é fechado, dizemos que ele é um *aberto-fechado*[2] do espaço topológico.

Definição 5.5. Seja X um espaço topológico, p um ponto dele e $V \subseteq X$ tal que $p \in X$. Dizemos que V é uma vizinhança de p se existe um conjunto u aberto tal que $p \in u \subseteq V$.

Definição 5.6. Seja X um espaço topológico e p um ponto dele. Dizemos que um conjunto $\mathcal{V}$ de vizinhanças de p é um sistema fundamental de vizinhanças de x se toda vizinhança de p contém algum elemento de $\mathcal{V}$.

Um aberto qualquer de uma topologia pode ser complicado de descrever, por isso introduzimos a noção de bases de espaço topológico, que nos permite em muitas casos reduzir demonstrações a um subconjunto específico de abertos.

Definição 5.7. Seja $(X, \mathfrak{T})$ um espaço topológico. Um subconjunto $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{T}$ é dito uma base de X se todo aberto de X pode ser escrito como uma união de elementos de $\mathcal{B}$, isto é, para todo $U \in \mathfrak{T}$, existe $B \subseteq \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup B$. Fixada uma base $\mathcal{B}$, os elementos de $\mathcal{B}$ são ditos os *abertos básicos* da topologia.

Muitas das propriedades que precisaremos utilizar vão depender apenas dos abertos básicos de uma topologia.

Proposição 5.8. *Seja X um conjunto e $\mathcal{B}$ uma base de uma topologia em X. Então $\mathcal{B}$ determina unicamente uma topologia em X, isto é, existe uma única topologia em X que tem $\mathcal{B}$ como base.*

[2] Muitos autores usam o termo *clopen* neste caso, uma aglutinação das palavras inglesas *closed* e *open*, mas como o autor prefere evitar o uso de termos estrangeiros ao longo do texto corrido, e como "faberto" e "abechado" são desagradáveis aos olhos e à fala, usaremos a justaposição "aberto-fechado".

Proposição 5.9. *Seja $\mathcal{B}$ uma coleção de abertos de um espaço topológico. Então $\mathcal{B}$ é uma base da topologia do espaço se e somente se para todo aberto V e todo ponto $x \in V$, existe um aberto $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subseteq V$.*

Proposição 5.10. *Seja X um conjunto e $\mathcal{B} \subseteq \wp(X)$. Então $\mathcal{B}$ é base de uma topologia em X se*

(i) $\mathcal{B}$ cobre X, isto é, $\bigcup \mathcal{B} = X$.

(ii) Para cada $U, V \in \mathcal{B}$ e $x \in U \cap V$, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subseteq U \cap V$.

Em particular, se um conjunto $\mathcal{B} \subseteq \wp(X)$ é fechado por intersecções finitas, então ele tem a propriedade da proposição acima, proporcionando o seguinte corolário.

Corolário 5.11. *Seja X um conjunto e $\mathcal{B} \subseteq \wp(X)$. Se $\mathcal{B}$ cobre X e é fechada por intersecções finitas. isto é, $A \cap B \in \mathcal{B}$ para todos $A, B \in \mathcal{B}$, então $\mathcal{B}$ é base de uma única topologia em X.*

Exemplo 5.12 (Topologia usual de ordem linear)**.** Seja $(L, \leq)$ uma ordem linear. O conjunto

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcup_{i \in n}]a_i, b_i[\mid a_i, b_i \in L, a_i < b_i, n \in \omega \right\}$$

é fechado por intersecções finitas, portanto é base de uma única topologia em L, dita a topologia usual de ordem (em L). A topologia usual dos números reais pode ser definida desta forma.

5.1.2 Fecho, interior e densidade

Dado um subconjunto A qualquer de uma topologia X, denotaremos por $\overline{A}$ o menor fechado que contém A, isto é

$$\overline{A} = \bigcap \{F \mid F \text{ é fechado em } X \text{ e } A \subseteq F\}.$$

Analogamente, denotaremos por $\mathring{A}$, ou por $\text{int}A$, o maior aberto contido em A, isto é

$$\mathring{A} = \bigcup \{U \mid U \text{ é aberto em } X \text{ e } U \subseteq A\}.$$

Definição 5.13. Dado um espaço topológico X e $D \subseteq X$, dizemos que D é denso em X se $\overline{D} = X$.

Proposição 5.14. *Para um espaço topológico X e $D \subseteq X$, são equivalentes:*

- *D é denso em X.*
- *$D \cap U \neq \emptyset$ para todo aberto não-vazio U em X.*
- *Para qualquer base $\mathcal{B}$ de X, $D \cap B \neq \emptyset$ para todo $B \in \mathcal{B}$.*

5.1.3 Propriedades topológicas

A definição de espaço topológico leva a poucos resultados interessantes por si só, porém a maioria dos espaços topológicos na prática possuem alguma propriedade adicional entre seus pontos, abertos e fechados que enriquecem a teoria. A seguir listamos algumas destas propriedades que serão úteis para o nosso estudo.

Axiomas de separação

Existem diversos axiomas de separação, aqui apenas enunciamos os que serão pertinentes a esse texto e quando nos referirmos aos "axiomas de separação" serão somente aos apresentados a seguir.

Definição 5.15. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é

- T_0 se para cada dois pontos distintos de X, existe um aberto que contém apenas um desses pontos.
- T_1 se para cada dois pontos x e y de X distintos, existe uma vizinhança de x que não contém y.
- T_2 (ou de Hausdorff) se para cada dois pontos x e y de X distintos, existem V_x e V_y vizinhanças respectivamente de x e y tais que V_x e V_y são conjuntos disjuntos.
- T_3 se para cada ponto $x \in X$ e cada fechado $F \subseteq X$ que não contém X, existem abertos U e V disjuntos tais que $x \in U$ e $F \subseteq V$.
- T_4 se para cada dois fechados F e G disjuntos, existem abertos U e V disjuntos tais que $F \subseteq U$ e $G \subseteq V$.

Além disso, dizemos que X é *regular*, se X é T_1 e T_3, e que X é *normal*, se X é T_1 e T_4.

É um exercício usual de topologia verificar que

$$T_4 \text{ e } T_1 \Rightarrow T_3 \text{ e } T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0 .$$

Compacidade

O conceito de compacidade, que pode ser visto como uma generalização do conceito de finitude, permitindo que o espaço possa ser sempre descrito em função de uma coleção finita de abertos.

Definição 5.16. Seja X um espaço topológico. Dizemos que uma coleção $\mathcal{C}$ de abertos de X é uma cobertura de X se $\bigcup \mathcal{C} = X$. Dizemos que $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ é uma subcobertura de X se $\mathcal{C}'$ também é uma cobertura de X.

Definição 5.17. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é compacto se toda cobertura de X admite subcobertura finita.

Novamente, esta propriedade pode ser reduzida apenas aos abertos básicos.

Proposição 5.18. *Seja X um espaço topológico. São equivalentes:*

- *X é compacto.*
- *Toda cobertura de X por abertos básicos admite subcobertura finita.*

Reescrevendo a definição de compacidade em relação aos fechados do espaço, obtemos a seguinte proposição.

Proposição 5.19. *Seja X um espaço topológico. São equivalentes:*

- *X é compacto.*
- *Toda coleção de fechados de X com a propriedade da intersecção finita tem intersecção não vazia.*

O próximo teorema é um resultado clássico de topologia.

Teorema 5.20. *Todo espaço T_2 compacto é normal.*

Conexidade e zero-dimensionalidade

Dizemos que um espaço topológico X é desconexo se ele pode ser escrito como a união disjunta de abertos não-vaziod e conexo caso contrário. Claramente, se existe um aberto-fechado u na topologia de X, então $X = u \dot{\cup} (X \setminus u)$ é desconexo. O conceito de zero-dimensionalidade procura descrever espaços que são desconexos de forma extrema, tendo uma "presença grande" de abertos-fechados.

Definição 5.21. Dizemos que um espaço topológico é zero-dimensional se existe uma base de abertos-fechados dele.

Em topologia geral, espaços zero-dimensionais são relativamente comuns. É fácil de ver que todo espaço discreto é zero-dimensional. Listamos a seguir, sem nos preocupar com demonstrações detalhadas, alguns exemplos famosos.

Exemplo 5.22. O espaço de números racionais com a topologia de subespaço da reta real é zero-dimensional, onde $\{]a,b[\cap\mathbb{Q} \mid a,b\in\mathbb{R}\}$ é uma base de abertos-fechados.

Analogamente, o espaço $\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q}$ de números irracionais com a topologia de subespaço da reta real é zero-dimensional, onde $\{]a,b[\cap(\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q}) \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ é uma base de abertos-fechados.

Exemplo 5.23. O conjunto

$$\{0\}\cup\left\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\right\}$$

com a topologia de subespaço da reta real é zero-dimensional.

Exemplo 5.24. A *reta de Sorgenfrey* é um espaço topológico que tem como conjunto base a reta real e seus abertos básicos são os intervalos fechados à esquerda e abertos à direita. Como

$$\mathbb{R}\smallsetminus[a,b[\,=\,]-\infty,a[\,\cup\,[b,\infty[\,=\,[b,\infty[\,\cup\bigcup\{[n,a[\mid n<a, n\in\mathbb{N}\},$$

temos que a reta de Sorgenfrey é zero-dimensional.

5.1.4 Construções topológicas

Listamos alguns métodos de obter novos espaços topológicos de espaços antigos e as propriedades que usaremos destas construções. Dizemos que uma propriedade é *preservada* por uma construção se ela vale para o espaço topológico resultante quando ela já valia para todos os espaços envolvidos.

Subespaços

Uma forma fácil de encontrar novos espaços topológicos é restringindo os abertos a um subconjunto dele. Mais precisamente, temos a seguinte definição.

Definição 5.25. Seja $(X,\mathfrak{T}_X)$ um espaço topológico e $Y\subseteq X$. Então $(Y,\mathfrak{T}_Y)$, onde

$$\mathfrak{T}_Y=\{u\cap Y\mid u\in\mathfrak{T}_Y\}$$

é um espaço topológico, dito subespaço de X.

Claramente se $\mathcal{B}$ é uma base de X, então $\{B\cap Y\mid B\in\mathcal{B}\}$ é uma base do subespaço $Y\subseteq X$. Note que subespaços preservam o axioma de separação T_2 e zero-dimensionalidade.

União disjunta

Seja $\{X_i\}_{i\in I}$ uma família indexada de espaços topológicos. Definimos o conjunto

$$\bigsqcup_{i\in I} X_i = \prod_{i\in I} X_i \times \{i\}$$

no qual identificamos cada espaço X_i original através da injeção canônica

$$\begin{array}{rccc} \phi_i: & X_i & \to & \bigsqcup_{i\in I} X_i \\ & x & \mapsto & (x,i) \end{array}$$

para cada $i \in I$. A condição

$$u \in \mathfrak{T} \iff \phi_i^{-1}[u] \in \mathfrak{T}_{X_i} \text{ para todo } i \in I$$

define uma topologia em $\bigsqcup_{i\in I} X_i$.

Definição 5.26. Seja $\{X_i\}_{i\in I}$ uma família indexada de espaços topológicos. Dizemos que o espaço topológico com conjunto base $\bigsqcup_{i\in I} X_i$ munido da topologia construída acima é a união disjunta da família $\{X_i\}_{i\in I}$.

Note que uniões disjuntas sempre preservam o axioma de separação T_2 e zero-dimensionalidade, porém só preservam compacidade no caso finito.

Produto

Seja $\{X_i\}_{i\in I}$ uma família indexada de espaços topológicos. No produto cartesiano $\prod_{i\in I} X_i$ identificamos cada elemento $(x_i)_{i\in I}$ com a sequência

$$\begin{array}{rccc} x: & I & \to & X_i \\ & i & \mapsto & x_i \end{array}$$

e cada espaço X_i pode ser recuperado pela projeção canônica

$$\begin{array}{rccc} \rho_i: & \prod_{i\in I} X_i & \to & X_i \\ & x & \mapsto & x(i) \end{array}$$

Definição 5.27. Seja $\{X_i\}_{i\in I}$ uma família indexada de espaços topológicos. Dizemos que o produto topológico de $\{X_i\}_{i\in I}$ é o espaço topológico com conjunto base o produto cartesiano de $\prod_{i\in I} X_i$

munido da topologia na qual

$$\Big\{\prod_{i\in I} U_i \mid U_i \text{ é aberto em } X_i \text{ e } \{U_i \mid U_i \neq X_i\} \text{ é um conjunto finito}\Big\}$$

é uma base.

O produto topológico preserva o axioma de separação T_2 e zero-dimensionalidade. O Axioma da Escolha equivale ao produto topológico de espaços compactos ser compacto.

5.2 Espaços booleanos e a topologia de Stone

Como uniões de abertos são abertos e intersecções finitas (não vazias) de abertos são abertos, topologias são reticulados com a ordem dada pela inclusão. É uma pergunta natural se elas são álgebras de Boole, isto é, se esses reticulados são distributivos e complementados.

Como as propriedades distributivas dependem apenas das operações $\cup$ e $\cap$, recuperadas da ordem do contido, toda topologia é um reticulado distributivo. Porém, dado um aberto U de um espaço topológico X, se a topologia de X é um reticulado complementado, então existe aberto V tal que $U \cup V = X$ e $U \cap V = \emptyset$, isto é, U é um aberto-fechado. Então, se uma topologia é uma álgebra de conjuntos, seus abertos são abertos-fechados e o espaço topológico não é conexo.

Assim, nem toda topologia é um espaço de Boole, porém sempre podemos "reduzir" uma topologia para obter um reticulado complementando, considerando apenas os abertos que também são fechados, o que fornece uma nova classe de exemplos de álgebras de Boole.

Exemplo 5.28 (Álgebra de abertos-fechados)**.** Dado um espaço topológico $(X, \mathfrak{T})$, o conjunto

$$\mathrm{Clop}X = \{U \in \mathfrak{T} \mid U \text{ é aberto-fechado}\}$$

é uma álgebra de conjuntos. De fato, $(\mathrm{Clop}X, \subseteq)$ é um reticulado, pois é um conjunto de abertos. Ele é claramente distributivo e também é complementado, pois dado $U \in \mathrm{Clop}X$, como U é aberto-fechado, então $X \setminus U$ também é aberto-fechado.

Podemos reconhecer algumas álgebras familiares com este método. Por exemplo, se o espaço X é conexo ou caótico, então $\mathrm{Clop}X = \{\emptyset, X\}$ é a álgebra de dois elementos ou, no caso em que $X = \emptyset$, a álgebra trivial. Se X for discreto, então todo subconjunto de X é aberto e logo o complemento de todo subconjunto também é aberto, portanto $\mathrm{Clop}X = \wp(X)$ é a álgebra das partes de X.

Assim, para obter álgebras "interessantes" de um espaço topológico X usando este método, precisamos que $\mathrm{Clop}X$ seja grande, mas não todos os subconjuntos de X, isto é, $\mathrm{Clop}X$ deve conter abertos-fechados não triviais, mas nem todo aberto de X deve ser também fechado. Para fazer isto, vamos considerar topologias em que todo aberto é uma união de abertos-fechados, ou seja, em que o conjunto de abertos-fechados é uma base.

Como qualquer conjunto de abertos-fechados de um espaço X esta contido por definição em Clop$X$, segue que um espaço X é zero-dimensional se e somente se Clop$X$ é uma base de X. Assim o conceito de zero-dimensionalidade surge naturalmente da análise de álgebras de abertos-fechados.

Definição 5.29. Um espaço topológico é dito um *espaço booleano*[3]se é T_2, compacto e zero-dimensional.

Exemplo 5.30 (Espaços discretos e o espaço booleano 2)**.** Todo espaço discreto X finito é booleano, no qual o conjunto de unitários do espaço é uma base de abertos-fechados. Note que neste caso Clop$X = \wp(X) \cong 2^{|X|}$.

Em particular, o espaço booleano com dois elementos $\{0, 1\}$ com a topologia discreta será denotado pelo simbolo 2. Note que um espaço discreto infinito não é booleano, pois apesar de ser T_2 e zero-dimensional, não é compacto, já que a coleção dos seus conjuntos unitários é uma cobertura de abertos sem subcobertura finita.

Agora, vamos discutir como espaços booleanos interagem com as construções topológicas usuais. Como as propriedades necessárias para ser booleano, isto é, ser T_2, compacidade e zero-dimensionalidade, são preservadas por produtos topológicos arbítrios, temos o seguinte resultado.

Proposição 5.31. *O produto topológico de uma família de espaços booleanos é um espaço booleano.*

Em particular, o produto topológico do espaço 2 indexado em um conjunto infinito I é denotado por ${}^{I}2$ e denominada o *espaço generalizado de Cantor de peso* $|I|$, um nome que será justificado na subseção 5.5.

Analogamente, união disjunta de uma quantidade finita de espaços topológicos também preservam as propriedades relevantes e temos a seguinte preposição.

Proposição 5.32. *A união disjunta de uma família finita de espaços booleanos é um espaço booleano.*

Quanto a subespaços, compacidade não é uma propriedade necessariamente preservada por subespaços (por exemplo, $]0, 1[$ é um subespaço não compacto de $[0, 1]$). Portanto subespaços de espaços booleanos não precisam ser booleanos, porém como subespaço fechados de espaços compactos são compactos, essa suposição adicional permite a seguinte preposição.

[3]O termo "espaço booleano" foi originalmente utilizado por Marshall Stone quando lidava com tais espaços, justificado pelas conexões que ele descobriu com álgebras de Boole. Alguns autores atualmente denominam tais espaços "espaços de Stone" para homenagear as descobertas de Stone, porém aqui usaremos essa denominação para uma topologia especifica que descreveremos a seguir.

Proposição 5.33. *Subespaços fechados de espaços booleanos são booleanos.*

Vamos coletar algumas propriedades úteis de espaços booleanos para referência futura. Começamos provando uma propriedade de separação.

Lema 5.34. *Seja X um espaço booleano.*

(a) Se $\mathcal{B}$ é uma base de X e u é um aberto-fechado de X, então existe $B \subseteq \mathcal{B}$ finito tal que $u = \bigcup B$.

(b) Se $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{Clop}X$ é uma base de X fechado por uniões finitas, então $\mathcal{B} = \mathrm{Clop}X$.

(c) Se Y é um subespaço fechado de X, então $\mathrm{Clop}Y = \{u \cap Y \mid u \in \mathrm{Clop}X\}$.

Demonstração: *(a)* Seja u um aberto-fechado de X. Como $\mathcal{B}$ é uma base de X, existe $B \subseteq \mathcal{B}$ tal que $u = \bigcup B$. Como u é fechado, $B \cup \{X \smallsetminus u\}$ sobre X e logo por compacidade existe $B' \subseteq B$ finito tal que $B' \cup \{X \smallsetminus u\}$ sobre X e portanto $u = \bigcup B'$ como queríamos.

(b) Dado aberto-fechado u de X, pelo item anterior existe $B \subseteq \mathcal{B}$ finito tal que $u = \bigcup B$, portanto $\mathrm{Clop}X \subseteq B$.

(c) Basta usar o item anterior e o fato que $\{u \cap Y \mid u \in \mathrm{Clop}Y\}$ é uma base do espaço booleano Y fechada por uniões finitas. ■

Proposição 5.35. *Seja X um espaço booleano e $y, z \subseteq X$. Se y e z são fechados, então existe aberto-fechado a de X que separa y e z, isto é, tal que $y \subseteq a$ e $z \subseteq X \smallsetminus a$.*

Demonstração: Sejam y e z subconjuntos fechados de X. Como eles são fechados, $y \cup z$ também é fechado e logo é um subespaço booleano de X no qual y e z são abertos-fechados. Assim, como $\mathrm{Clop}(y \cup z) = \{a \cap (y \cup z) \mid a \in \mathrm{Clop}X\}$ é uma base de $y \cup z$, temos que existe algum a aberto-fechado de X tal que $y = a \cap (y \cup z)$. Claramente $y \subseteq a$ e $z \subseteq X \smallsetminus a$. ■

O estudo de homeomorfismos entre espaços booleanos é extremamente beneficiado pelos seguintes resultados puramente topológicos.

Proposição 5.36. *Sejam X um espaço compacto, Y um espaço T_2 e $f : X \to Y$ uma função entre eles. Então f é um homeomorfismo se e somente se f é uma bijeção contínua.*

Demonstração: Basta mostrar que f^{-1} é contínua, isto é, que f mapeia abertos a abertos. Seja u aberto em X, então $X \smallsetminus u$ é fechado e como X é compacto, segue que $X \smallsetminus u$ é compacto. Como f é contínua, $f[X \smallsetminus u]$ é compacto em Y, e como Y é T_2, segue que $f[X \smallsetminus u]$ é fechado, portanto $f[u] = Y \smallsetminus f[X \smallsetminus u]$ é aberto. ■

Proposição 5.37. *Seja X um espaço compacto, $\mathcal{B}$ uma base de X e u um aberto de X. Se u é fechado, então existe $B \subseteq \mathcal{B}$ finito tal que $u = \bigcup B$.*

Demonstração: Como u é aberto, existe $B' \subseteq \mathcal{B}$ tal que $u = \bigcup B'$. Se u é também fechado, $X \smallsetminus u$ é aberto e portanto $B' \cup \{X \smallsetminus u\}$ é uma cobertura de X. Por compacidade, existe $B \subseteq B'$ finito tal que $B \cup \{X \smallsetminus u\}$ cobre X. Como todo elemento de B' é disjunto de $X \smallsetminus u$, concluímos que $u = \bigcup B$. ■

Proposição 5.38. *Seja X um espaço compacto, $\mathcal{B}$ uma base dele, u um aberto de X e $t \subseteq u$. Se t é fechado, então existe $B \subseteq \mathcal{B}$ finito tal que $t \subseteq \bigcup B \subseteq u$.*

Demonstração: Como u é aberto, existe $B' \subseteq \mathcal{B}$ tal que $u = \bigcup B'$. Como t é fechado, $X \smallsetminus t$ é aberto, e como $t \subseteq u$, temos que $B' \cup \{X \smallsetminus t\}$ é uma cobertura de X. Como X é compacto, existe $B \subseteq B'$ finito tal que $B \cup \{X \smallsetminus t\}$ cobre X e portanto $t \subseteq \bigcup B \subseteq u$. ■

Voltando a álgebras de Boole, relembre que o mapeamento de Stone é um monomorfismo entre álgebras de Boole. Em particular, se A é uma álgebra de Boole, temos que para todo $a, b \in A$, $s(a) \cap s(b) = s(a \cdot b)$, logo o conjunto $s[A]$ é fechado por intersecções finitas e portanto ele é a base de uma única topologia em Ult$A$.

Definição 5.39. Seja A uma álgebra de Boole. A topologia em Ult$A$ que tem $s[A]$ como base é denominada *topologia de Stone* . O espaço topológico formado do conjunto Ult$A$ com a topologia de Stone é dito o *espaço de Stone* (de A).

Em algumas literaturas, o espaço de Stone de uma álgebra é denotado por $\mathcal{S}(A)$, porém aqui usaremos a convenção usual de topologia de identificar um espaço topológico com o conjunto base no qual ele está definido.

Teorema 5.40. *O espaço de Stone de uma álgebra de Boole é um espaço booleano.*

Demonstração: Seja X o espaço de Stone de A. Como $s[A]$ já é uma base de X, seus elementos são abertos. Além disso, como s é um homomorfismo para uma álgebra de conjuntos, se $s(a) \in s[A]$, então Ult$A \smallsetminus s(a) = s(-a) \in s[A]$ logo $s(a)$ é um aberto-fechado, portanto $s[A]$ é uma base de abertos-fechados, mostrando a zero-dimensionalidade.

Agora, sejam p e q ultrafiltros distintos de X. Como $p \neq q$ e pela maximalidade de cada um deles como filtros, podemos supor que existe um elemento $a \in p \smallsetminus q$. Então $p \in s(a)$ e $q \notin s(a)$, logo $q \in$ Ult$A \smallsetminus s(a) = s(-a)$, logo $s(a)$ e $s(-a)$ são vizinhanças disjuntas de p e q respectivamente, mostrando que X é T_2.

Para mostrar compacidade suponha que para algum $A' \subseteq A$, o conjunto $\mathcal{C} = \{s(a) \mid a \in A'\}$ é uma cobertura de X por abertos básicos. Queremos mostrar que $\mathcal{C}$ admite subcobertura finita, assim suponha por absurdo que isto não ocorre, isto é, para todo $n \in \omega$ e $a_1, \cdots, a_n \in A'$, temos que $X \neq s(a_1) \cup \cdots \cup s(a_n)$. Pelo fato de s ser um homomorfismos das álgebras, segue que

$$X = s(1) \neq s(a_1 + \cdots + a_n) \Rightarrow 1 \neq a_1 + \cdots + a_n \Rightarrow 0 \neq -a_1 \cdot \ldots \cdot -a_n$$

o que demonstra que o conjunto $-A' = \{-a \mid a \in A'\}$ tem a PIF, logo existe ultrafiltro $p \in \text{Ult}A$ que o contém. Como $\mathcal{C}$ é uma cobertura de X, existe $a \in A'$ tal que $p \in s(a)$, isto é $a \in p$, mas como p contém $-A'$, temos que $-a \in p$, portanto $0 \in p$, uma contradição. Portanto X é compacto. ■

5.3 Uma conexão não trivial entre álgebra e topologia

Mostramos que todo espaço de Stone é booleano. Podemos considerar o conjunto de abertos-fechados de um espaço de Stone, obtendo uma álgebra de Boole. É natural questionar as relações que podem existir entre uma álgebra de Boole A e a álgebra Clop$\text{Ult}A$ obtida deste processo.

Como $s[A]$ é uma base de abertos-fechados de Ult$A$, temos imediatamente que $s[A]$ é uma subálgebra de ClopUlt$A$ isomorfa a A. Vamos mostrar a seguir que ela não é própria.

Proposição 5.41. *Seja A uma álgebra de Boole. Então $s[A] = ClopUltA$.*

Demonstração: Como comentamos antes de enunciar a preposição, uma inclusão segue diretamente da definição da topologia de Stone. Para a outra, seja U um aberto fechado em Ult$A$, como $s[A]$ é uma base e U é aberto, existe $A' \subset A$ tal que $U = \bigcup_{a \in A'} s(a)$. Como U é fechado, Ult$A \setminus U$ é aberto, segue que $\{\text{Ult}A \setminus U\} \bigcup \{s(a) \mid a \in A'\}$ é um recobrimento de Ult$A$, assim por compacidade podemos tomar A' finito. Suponha então que $A' = \{a_1, \cdots, a_n\}$ para algum n natural, temos que

$$U = s(a_1) \cup \cdots \cup s(a_n) = s(a_1 + \cdots + a_n)$$

portanto $U \in s[A]$. ■

Assim, refinamos a versão conjuntista do Teorema de Representação de Stone, identificando a imagem do mapeamento de Stone como uma álgebra bem específica, e de fato mostrando que toda álgebra de Boole "surge" desta forma, isto é, de um espaço booleano.

Teorema 5.42 (Representação de Stone - Versão Topológica)**.** *Toda álgebra de Boole é isomorfa à uma álgebra de abertos-fechados de um espaço booleano.*

Demonstração: Para toda álgebra de Boole A, seu espaço de Stone é booleano e $s[A] = \text{ClopUlt}A$ é uma álgebra de abertos-fechados isomorfa a ela. ■

Agora, mostramos que todo espaço de Stone é booleano e usamos este fato para demonstrar o teorema acima. Naturalmente, podemos nos perguntar se existem espaços booleanos que não cumprem o papel descrito acima, isto é, se todo espaço booleano é isomorfo ao espaço de Stone de uma álgebra de Boole.

Para responder esta pergunta, analisemos como inverter o mapeamento de Stone. Como ele é um isomorfismo, cada elemento de uma álgebra de Boole pode ser inferido dos ultrafiltros que o contém. De fato, dado um aberto básico $s(a)$ de $\mathrm{Ult}A$, temos que a intersecção dos filtros de $s(a)$ resulta no filtro principal gerado por a e portanto

$$\min \bigcap s(a) = a\,.$$

Analogamente, em um espaço T_2, cada ponto dele pode ser recuperado de um sistema fundamental de vizinhanças. Mais precisamente, dado um ponto p em um espaço topológico T_2 X e um sistema de vizinhanças fundamentais $\mathcal{V}_p$ de p, temos que

$$\bigcap \mathcal{V}_p = \{p\}.$$

De fato, se p é o único ponto do espaço, não há o que provar. Caso contrário, seja q um ponto diferente de p. Como X é um espaço T_2, existe aberto U que contém p e não contém q e como $\mathcal{V}_p$ é um sistema de vizinhanças de p, existe aberto $V \in \mathcal{V}_p$ tal que $V \subseteq U$ e portanto $q \notin \mathcal{V}_p$.

Reciprocamente, fixando uma base $\mathcal{B}$ de X que contém $\mathcal{V}_p$, temos que

$$\mathcal{V}_p \subseteq \{u \in \mathcal{B} \mid p \in U\}.$$

Note que, se o nosso sistema de vizinhanças fundamentais original $\mathcal{V}_p$ fosse o conjunto $\{u \in \mathcal{B} \mid p \in U\}$, teríamos uma igualdade na inclusão acima, estabelecendo uma correspondência bijetora entre pontos e os sistemas fundamentais de vizinhanças que se escrevem desta forma.

Quando se trata de espaços booleanos, temos uma base clara que podemos fixar, assim temos motivação para explorar a seguinte função, que associa cada ponto a um sistema fundamental de vizinhanças dele.

Definição 5.43. Seja X um espaço booleano. Definimos a seguinte função.

$$\begin{array}{rccl} t_X: & X & \to & \wp(\mathrm{Clop}X) \\ & x & \mapsto & \{u \in \mathrm{Clop}X \mid x \in u\} \end{array}$$

Dizemos que t_X é o *mapa de Stone (para espaços booleanos) (de X)* e, quando possível, evitaremos o subscrito e a denotaremos simplesmente por t.

Note que, dado um espaço booleano X, as observações feitas imediatamente antes da definição acima mostram que t_X é injetor. Apesar disso, a zero-dimensionalidade de X permite uma demonstração mais direta deste fato, que apresentamos a seguir.

Lema 5.44. *Para todo espaço espaço booleano X, o mapa t_X é injetor.*

Demonstração: Sejam x e y pontos distintos de X. Pela zero-dimensionalidade e separação T_2 de X, existe aberto-fechado u tal que $x \in u$ e $y \notin u$. Portanto $t(x) \neq t(y)$, pois $u \in t(x) \setminus t(y)$. ■

Para determinar se t_X é contínua, precisamos decidir de forma natural uma topologia no seu contradomínio, o que leva a seguinte proposição.

Proposição 5.45. *Seja X um espaço booleano e $x \in X$. Então $t(x)$ é um ultrafiltro da álgebra Clop$X$.*

Demonstração: Vamos começar verificando que $t(x)$ é um filtro. De fato, $1_{\text{Clop}X} = X \in t(x)$ e para todos $u, v \in \text{Clop}X$, claramente $u \cap v$ contém x se e somente se $x \in u$ e $x \in v$.

Agora, para mostrar que $t(x)$ é um ultrafiltro, seja $w \in \text{Clop}X$ e note que w e $X \setminus w$ não podem simultaneamente pertencer a $t(x)$, já que isto resultaria em $x \in w \cap (X \setminus w) = \emptyset$. Se $w \notin t(x)$, então $x \notin w$ e logo $x \in X \setminus w$, portanto $X \setminus w \in t(x)$ e mostramos que $t(x)$ é um ultrafiltro. ■

Assim, mostramos que a imagem da função t_X está contida no conjunto Ult$\text{Clop}X$ e podemos discutir a continuidade dela considerando a topologia de Stone de Clop$X$.

Proposição 5.46. *Seja X um espaço booleano. Então $t : X \to \text{UltClop}X$ é uma função contínua.*

Demonstração: Basta verificar que a imagem inversa de abertos básicos é aberta, e o resto segue do resultado puramente topológico 5.36. Assim, seja $s(a) \in \text{UltClop}X$ e note que

$$\begin{aligned} x \in t^{-1}(s(a)) &\iff t(x) \in s(a) \\ &\iff \{u \in \text{Clop}X \mid x \in u\} \in \{p \in \text{UltClop}X \mid a \in p\} \\ &\iff a \in \{u \in \text{Clop}X \mid x \in u\} \\ &\iff x \in a \end{aligned}$$

portanto $t^{-1}(s(a)) = a$ é um aberto-fechado de X, e logo aberto. ■

Como t_X é injetora e contínua, já temos que $t_X[X]$ é um subespaço de UltClop$X$ e a seguir mostramos que ele não é próprio.

Proposição 5.47. *Seja X um espaço booleano. Então $t[X] = \text{UltClop}X$.*

Demonstração: Seja p um ultrafiltro de Clop$X$. Então p é um conjunto de fechados de X que tem a propriedade da intersecção finita, pela compacidade de X e o resultado topológico 5.19, segue que $\bigcap p \neq \emptyset$. Assim, seja $x \in X$ tal que $x \in a$ para cada $a \in p$. Claramente $p \subseteq \{u \in \text{Clop}X \mid x \in u\} = t(x)$, mas então pela maximalidade de p como ultrafiltros, segue que $t(x) = p$. ■

Finalmente, estamos pronto para demonstrar que todo espaço booleano "surge" de uma álgebra de Boole.

Teorema 5.48 (Representação de Stone para espaços booleanos)**.** *Todo espaço booleano é homeomorfo ao espaço de Stone de uma álgebra de Boole.*

Demonstração: Basta mostrar que, para todo espaço booleano X, a função $t : X \to \mathrm{UltClop}X$ é um homeomorfismo. Como X e $\mathrm{UltClop}X$ são ambos espaços compactos T_2, pelo resultado topológico 5.36, basta mostrar que t é contínua e bijetora, o que já foi feito nas preposições 5.46 e 5.47 respectivamente. ■

Por fim, resumimos os resultados desta seção no seguinte teorema.

Teorema 5.49 (Dualidade de Stone para álgebras de Boole e espaços booleanos)**.** *Toda álgebra de Boole é isomorfa à álgebra de abertos-fechados do seu espaço de Stone. Reciprocamente, todo espaço de Boole é homeomorfo ao espaço dual de seus abertos fechados. Mais precisamente, para toda álgebra de Boole A e para todo espaço de Boole X, os mapeamentos*

$$\begin{array}{rccl} s: & A & \longrightarrow & \mathrm{ClopUlt}A \\ & a & \longmapsto & \{p \in \mathrm{Ult}A \mid a \in p\} \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} t: & X & \longrightarrow & \mathrm{UltClop}X \\ & x & \longmapsto & \{u \in \mathrm{Clop}X \mid x \in u\} \end{array}$$

são respectivamente um isomorfismo entre álgebras de Boole e um homeomorfismo entre espaços booleanos.

Além disso, existe uma correspondência bijetora, exceto por isomorfismos, entre álgebras de Boole e espaços booleanos. Mais precisamente, as associações

$$A \longmapsto \mathrm{Ult}A \qquad e \qquad X \longmapsto \mathrm{Clop}X$$

entre álgebras de Boole e espaços booleanos são, exceto por isomorfismos, inversas uma da outra.

Demonstração: A primeira parte do teorema já foi provado em 5.42 e 5.48. Quanto a segunda parte, sejam A uma álgebra de Boole e X um espaço booleano. Realizando consecutivamente as associações anunciadas no teorema temos que $A \mapsto \mathrm{Ult}A \mapsto \mathrm{ClopUlt}A \cong A$ e analogamente $X \mapsto \mathrm{Clop}X \mapsto \mathrm{UltClop}X \cong X$. ■

Este teorema justifica as seguintes definições, que usaremos com frequência.

Definição 5.50. Seja A uma álgebra de Boole e X um espaço booleano. Dizemos que

- $\mathrm{Ult}A$ é o espaço booleano *dual* a A.
- $\mathrm{Clop}X$ é a álgebra de Boole *dual* a X.

A segunda parte do teorema acima sugere o seguinte: dada uma álgebra de Boole A com certa propriedade algébrica $\mathcal{P}$ preservada por isomorfismo, o espaço booleano Ult$A$ de alguma forma codifica $\mathcal{P}$ a uma propriedade topológica $\mathcal{T}$ preservada por homeomorfismo.

Isto ocorre pois do espaço Ult$A$ conseguimos obter uma álgebra isomorfa a A, assim a propriedade $\mathcal{P}$ não foi "perdida" na dualização. Definindo a propriedade topológica

$$\mathcal{T}_{\mathcal{P}} \equiv \text{ a álgebra de abertos-fechados satisfaz } P$$

temos que $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ é preservada por homeomorfismos e claramente poderíamos enunciar o teorema

$$\text{Uma álgebra de Boole satisfaz } \mathcal{P} \text{ se e somente se seu espaço de Stone satisfaz } \mathcal{T}_{\mathcal{P}}. \tag{II.1}$$

É claro que o teorema acima se tornaria menos trivial se conseguirmos encontrar uma descrição mais precisa da propriedade $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ em termos topológicos mais usuais.

De forma completamente análoga, se um espaço booleano X satisfaz uma propriedade topológica $\mathcal{T}$ preservada por homeomorfismos, podemos definir a propriedade algébrica

$$\mathcal{P}_{\mathcal{T}} \equiv \text{ o espaço de Stone satisfaz } \mathcal{T}$$

e enunciar o teorema

$$\text{Um espaço booleano satisfaz } \mathcal{T} \text{ se e somente se sua álgebra de abertos-fechados satisfaz } \mathcal{P}_{\mathcal{T}}. \tag{II.2}$$

que pode ser tornado mais interessante se descrevemos $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ em termos algébricos usuais.

Os teoremas como os descritos acima são denominados *teoremas de tradução*, já que eles "traduzem" propriedades algébricas a propriedades topológicas e vice-versa.

Como todo espaço booleano é o espaço de Stone de uma álgebra de Boole e toda álgebra de Boole é a álgebra de abertos-fechados de um espaço booleano, temos que toda tradução como a de II.1 pode ser enunciada como em II.2 e vice-versa, por isso basta enunciar um deles.

Além disso, a dualidade de Stone é simplesmente uma ferramenta fantástica, dando uma nova dimensão a problemas em topologia e álgebra. Para exemplificar este processo, vamos provar dois lemas simples: um de formulação completamente algébrica e outro de formulação completamente topológica.

Lema 5.51. *Sejam A uma álgebra de Boole e $p_1, \ldots, p_n$ ultrafiltros distintos dela, com n natural. Então, para cada conjunto $M \subseteq \{1, \ldots, n\}$ de índices, existe $a \in A$ tal que $a \in p_i$ se e somente se $i \in M$.*

Demonstração: Como o espaço Ult$A$ é T_2, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ podemos escolher um aberto

u_i tal que $u_i \cap \{p_1, \ldots, p_n\} = \{p_i\}$. Por zero-dimensionalidade, podemos tomar cada u_i sendo um aberto-fechado e portanto $u_M = \bigcup_{i \in M} u_i$ é um aberto-fechado para cada $M \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Como $s[A] = \text{ClopUlt}A$, existe algum $a_M \in A$ tal que $s(a_M) = u_M$. Agora, basta notar que

$$a \in p_i \iff p_i \in s(a) \iff p_i \in \bigcup_{k \in M} u_k \iff u_i \subseteq u_M \iff i \in M$$

como queríamos demonstrar. ■

Para o seguinte lema, lembramos que dado um espaço topológico X, um ponto x dele é dito *isolado* se o conjunto $\{x\}$ é aberto em X.

Lema 5.52. *Seja X um espaço booleano. Para todo $x \in X$ isolado, $\{x\}$ é um aberto-fechado de X.*

Demonstração: Seja x é um ponto isolado de X, $t = t_X$ e $s = s_{\text{Clop}X}$. Como t é um homeomorfismo, $t(x)$ é um ponto isolado de $\text{UltClop}X$. Como $\{t(x)\}$ é aberto, existe aberto básico $s(a) \neq \emptyset$ com $a \in \text{Clop}X$ tal que $s(a) \subseteq \{t(x)\}$. Como $s(a)$ é não vazio, temos que $s(a) = \{t(x)\}$ e portanto $\{t(x)\}$ é um aberto-fechado de $\text{UltClop}X$, logo $\{x\}$ é um aberto-fechado de X. ■

5.4 Alguns teoremas de tradução

Vamos começar traduzindo a caracterização de álgebras de partes dada pelo corolário 4.14. Para isto precisaremos de traduções para os conceitos de atomicidade e completude.

Proposição 5.53. *Seja A uma álgebra de Boole, X um espaço booleano, $a \in A$ e $x \in X$. Então*

(i) a é um átomo de A se e somente se $s(a)$ é um ponto isolado de $\text{Ult}A$.

(ii) x é um ponto isolado de X se e somente se $t(x)$ é um ultrafiltro principal de $\text{Clop}X$.

Demonstração: Se a é um átomo de A, então o filtro principal p_a gerado por ele é o único ultrafiltro que contém a, portanto $s(a) = \{p_a\}$ é um ponto isolado. Para a recíproca, se $s(a)$ é um ponto isolado, então existe um único ultrafiltro que contém a e basta mostrar que se um elemento não é um átomo, então existem pelo menos dois ultrafiltros que o contém.

De fato, se a não é um átomo, p_a não é um ultrafiltro e então existe algum $b \in A$ tal que b e $-b$ não pertencem a p_a. Daí, como p_a é um filtro, temos que $b \cdot a$ e $-b \cdot a$ são não nulos e portanto existem ultrafiltros p e q que contém cada um deles. Como $b \cdot a$ e $-b \cdot a$ são disjuntos, temos que p e q são distintos e claramente $\{p, q\} \subseteq s(a)$.

Agora, sejam x um ponto isolado de X, $t = t_X$ e $s = s_{\text{Clop}X}$. Pelo demonstração do lema 5.52, temos que $s(a) = \{t(x)\}$ e pelo primeiro item do teorema, a é um átomo de $\text{Clop}X$ e portanto $t(x)$ é um filtro principal. ■

Assim, átomos correspondem dualmente a pontos isolados e portanto atomicidade dependerá da presença de pontos isolados no espaço dual, como provamos a seguir.

Teorema 5.54. *Seja A uma álgebra de Boole. Então*

(i) A não possui átomos se e somente se Ult$A$ não tem pontos isolados.

(ii) A é atômica se e somente se o conjunto de pontos isolados de Ult$A$ é um conjunto denso.

Demonstração: A primeiro item segue imediatamente da proposição anterior. Para o segundo, suponha que A é atômica e seja $s(b)$ um aberto básico de Ult$A$. Como A é atômica, existe $a \in \mathrm{At}A$ tal que $a \leq b$, logo $s(a) \subseteq s(b)$ e portanto $s(a)$ é um ponto isolado, pela proposição anterior.

Reciprocamente, seja $b \in A$ e considere o aberto básico $s(b) \in \mathrm{Ult}A$. Como os pontos isolados são um conjunto denso, existe ponto isolado $\{p\} \subseteq s(b)$. Pelo segundo item da proposição anterior, p é um ultrafiltro principal, portanto gerado por um átomo $a \in \mathrm{At}A$, assim $s(a) = \{p\}$ e $s(a) \subseteq s(b)$. Como o mapa s é um isomorfismo, temos que $a \leq b$, provando que A é atômico. ■

Agora, focamos nossa atenção em traduzir completude. Primeiramente, dada uma álgebra de Boole A, note que como o mapa de Stone $s : A \to \mathrm{ClopUlt}A$ é um isomorfismo, um subconjunto $M \subseteq A$ tem limitante superior em A se e somente se $s[M]$ tem limitante superior em ClopUlt$A$. Portanto, para mostrar que um subconjunto M tem supremo em A, basta procurar supremo de $s[M]$ em ClopUlt$A$.

Proposição 5.55. *Seja A uma álgebra de Boole e $M \subseteq A$. Então $\sum M$ existe em A se e somente se o fecho de $\bigcup s[M]$ em Ult$A$ é um conjunto aberto.*

Demonstração: Seja A uma álgebra de Boole, $M \subseteq A$ e c o fecho de $\bigcup s[M]$ em Ult$A$. Suponha que c é um conjunto aberto. Claramente c é o menor conjunto fechado que contém $s(m)$ para todo $m \in M$. Pela hipótese, c é um aberto-fechado, e portanto é o menor limitante superior de $s[M]$ em ClopUlt$A$, logo pela observação feita antes da proposição, $\sum M$ existe em A.

Reciprocamente, suponha que $\sum M$ existe em A, então existe menor limitante superior de $s[M]$ em ClopUlt$A$, seja ele b. Então $\bigcup s[M] \subseteq b$ e portanto $c \subseteq \overline{b} = b$. Suponha por absurdo que $c \neq b$, então $b \smallsetminus c$ é aberto, por zero-dimensionalidade existe $d \subseteq b \smallsetminus c$ aberto-fechado. Então $b \smallsetminus d \subsetneq b$ contradiz a minimalidade de b entre os limitantes superiores de $s[M]$ em ClopUlt$A$. Portanto $b = c$, mostrando que c é um conjunto aberto. ■

Introduzimos uma nova definição para tornar o teorema seguinte mais elegante.

Definição 5.56. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é *extremamente desconexo* se o fecho de todo conjunto aberto é um conjunto aberto. Dizemos que X é *basicamente desconexo* se o fecho da união de uma quantidade enumerável de abertos-fechados é aberto.

Teorema 5.57. *Seja A uma álgebra de Boole. Então*

- *A é σ-completa se e somente se $\mathrm{Ult}A$ é basicamente desconexo.*
- *A é completa se e somente se $\mathrm{Ult}A$ é extremamente desconexo.*

Demonstração: O primeiro item segue imediatamente da proposição anterior. Para o segundo, basta notar que, por zero-dimensionalidade, um subconjunto u de um espaço de Stone $\mathrm{Ult}A$ é aberto se e somente se $u = \bigcup s[M]$ para algum $M \subseteq A$, portanto o fecho de todo conjunto aberto é aberto em $\mathrm{Ult}A$ se e somente se o fecho de toda união de de abertos-fechados é aberto, e o resto segue pela proposição anterior. ∎

Finalmente, podemos exibir uma caracterização dos espaços de Stone de álgebras de partes, que fica demonstrada pelo teorema 4.14 e os resultados desenvolvidos nessa subseção.

Teorema 5.58. *Seja A uma álgebra de Boole. Então $A \cong \wp(X)$ para algum conjunto X se e somente se $\mathrm{Ult}A$ é um espaço extremamente desconexo no qual os pontos isolados constituem um conjunto denso.*

O conceito de densidade em espaços booleanos tem uma equivalência algébrica bem útil.

Definição 5.59. Seja A uma álgebra de Boole e $D \subseteq A$. Dizemos que D é denso em A se $s[D]$ é denso em $\mathrm{Ult}A$.

Assim, temos que o conjunto $\mathrm{At}A$ é denso em A se e somente se A é atômica pelo teorema 5.54. De fato, a definição algébrica de atomicidade encapsula o conceito dual de densidade topológica, como mostramos a seguir.

Proposição 5.60. *Um subconjunto D de uma álgebra de Boole A é denso nela se e só se para todo $a \in A^+$ existe $d \in D$ tal que $0 < d \leq a$.*

Demonstração: Seja $a \in A^+$ qualquer. Como $s[D]$ é denso em $\mathrm{Clop}A$ e $s(a)$ é aberto, existe $d \in D$ tal que $\emptyset = s(0) \subsetneq s(d) \subseteq s(a)$. Como $s : A \to \mathrm{ClopUlt}A$ é um isomorfismo, segue que $0 < d \leq a$.

Reciprocamente, dado aberto u de $\mathrm{Ult}A$, por zero-dimensionalidade existe $a \in A$ tal que $s(a) \subseteq u$. Por hipótese, existe $d \in D$ tal que $0 < d \leq a$ e portanto $\emptyset \neq s(d) \subseteq s(a)$, mostrando que $s[D]$ é denso. ∎

No caso de álgebras finitas, isto é, álgebras isomorfas a $\wp(X)$ com X um conjunto finito, o teorema 5.58 pode ser extremamente simplificado.

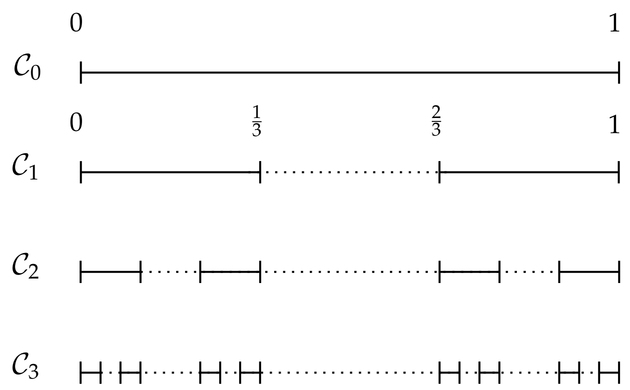
Teorema 5.61. *Uma álgebra de Boole é finita se e somente se seu espaço de Stone é discreto.*

Demonstração: Se A é finita, então cada ultrafiltro de A é um filtro principal gerado por um átomo e portanto $\mathrm{Ult}A = \{p_a \mid a \in \mathrm{At}A\}$. Dado $p_a \in \mathrm{Ult}A$, $\{p_a\} = s(a)$ é um ponto isolado, mostrando que $\mathrm{Ult}A$ é discreto.

Reciprocamente, suponha que $\mathrm{Ult}A$ é discreto. Como observamos no exemplo 5.30, espaços booleanos discretos não podem ser infinitos, logo $\mathrm{Ult}A$ é finito. Como $\mathrm{Ult}A$ é discreto, existem exatamente $2^{|\mathrm{Ult}A|}$ abertos-fechados nele, como $|A| = |\mathrm{ClopUlt}A|$, segue que A é finita. ■

5.5 O espaço generalizado de Cantor

Vamos construir um subconjunto dos reais recursivamente. Seja $\mathcal{C}_0 = [0, 1]$ e suponha que $\mathcal{C}_n$ já foi definido para algum n natural. Então seja $\mathcal{C}_{n+1}$ o subconjunto de $\mathcal{C}_n$ obtido ao substituir cada intervalo maximal fechado $[a, b]$ de $\mathcal{C}_n$ pelos dois subintervalos fechados $[a, a + (b - a)/3]$ e $[b - (b - a)/3, b]$. Seja $\mathcal{C} = \bigcap_{n \in \omega} \mathcal{C}_n$, denominado o *conjunto de Cantor*, e note que $1 \in \mathcal{C}$ e logo ele é não vazio. O conjunto de Cantor com a topologia de subespaço induzida pela reta real é dito o *espaço (clássico) de Cantor*.



Pela construção do espaço de Cantor, ele é o complemento de uma união de conjuntos abertos da reta real, portanto é fechado. Como a reta real é T_2, $\mathcal{C}$ também é T_2. Como $\mathcal{C}$ é um subespaço limitado e fechado da reta, ele também é compacto.

Para verificar que $\mathcal{C}$ é zero dimensional, seja $x \in \mathcal{C}$ e $]r, s[$ um aberto básico dos reais que contém x. Note que em cada passo $n \in \omega$ da construção de $\mathcal{C}$, os intervalos fechados maximais são abertos-fechados em $\mathcal{C}_n$ e tem tamanho $1/3^n$

Assim, é possível escolher n grande o suficiente para que, no passo n da construção de $\mathcal{C}$, x está contido em um único intervalo maximal I tal que $I \subseteq]r, s[$. Temos então que I é um aberto-fechado em $\mathcal{C}_n$ e portanto $I \cap \mathcal{C}$ é um aberto-fechado em $\mathcal{C}$ e $x \in I \cap \mathcal{C} \subseteq]r, s[$.

Portanto $\mathcal{C}$ é um espaço booleano. Vamos explorar sua álgebra de abertos-fechados. Primeiramente, lembramos a seguinte definição.

Definição 5.62. Para cada espaço topológico X, definimos o cardinal

$$wX = \min\{|\mathcal{B}| \mid \mathcal{B} \text{ é uma base de } X\}$$

denominado o *peso* de X.

Proposição 5.63. *Para toda álgebra de Boole infinita A, temos que $w\mathrm{Ult}A = |A|$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{B}$ uma base qualquer de $\mathrm{Ult}A$. Para cada $a \in A$, pelo primeiro item do lema 5.34, existe $B_a \subseteq \mathcal{B}$ finito tal que $a = \bigcup B_a$. Assim, o mapeamento

$$\begin{array}{rcl} A & \to & [\mathcal{B}]^{<\aleph_0} \\ a & \mapsto & B_a \end{array}$$

é claramente uma injeção e portanto $|A| \leq |[\mathcal{B}]^{<\aleph_0}|$. Como A é infinito, temos que $[\mathcal{B}]^{<\aleph_0}$ é infinito e portanto $\mathcal{B}$ tem que ser infinito, logo $|B| = |[\mathcal{B}]^{<\aleph_0}|$ e $|A| \leq |\mathcal{B}|$. Assim $|A| \leq w\mathrm{Ult}A$. Porém como $s[A]$ é uma base de $\mathrm{Ult}A$, temos que $w\mathrm{Ult}A \leq |s[A]| = |A|$, mostrando o resultado. ■

Assim, aplicando o teorema anterior ao espaço de Cantor, obtemos que $w\mathrm{UltClop}\mathcal{C} = |\mathrm{Clop}\mathcal{C}|$. Porém como a reta real possui uma base enumerável (basta considerar o conjunto dos intervalos abertos $]a, b[$ com a e b racionais), e $\mathcal{C}$ é um subespaço de $\mathbb{R}$, temos que $w\mathrm{UltClop}\mathcal{C} = w\mathcal{C} = \aleph_0$.

Além disso, considere que os pontos extremais a e b de cada intervalo maximal $[a, b]$ em cada passo da construção de $\mathcal{C}$ nunca são removidos no restante da construção. Assim, dado um ponto $x \in \mathcal{C}$, podemos construir uma sequência destes pontos extremais, associando a cada $n \in \omega$ o ponto x_n que tem a menor distância possível de x. Note que como o ponto mediano de cada intervalo é removido no próximo passo da construção, esta sequência fica bem definida e é fácil convencer-se que x_n converge para x, e logo x não é um ponto isolado de $\mathcal{C}$.

Assim, como $\mathcal{C}$ tem base enumerável e não tem pontos isolados, segue que $\mathrm{Clop}\mathcal{C}$ é uma álgebra enumerável sem átomos. Vamos mostrar a seguir que esta propriedade a caracteriza.

Lema 5.64. *Seja A uma álgebra de Boole. São equivalentes:*

- *A é sem átomos.*
- *Para todo $a \in A$, as álgebras $A \restriction a$ e $A \restriction -a$ são ambas sem átomos.*

Demonstração: Basta notar que

$$\mathrm{At}A = \mathrm{At}(A \restriction a) \cup \mathrm{At}(A \restriction -a)$$

já que $A \cong (A \restriction a) \times (A \restriction -a)$, a ordem parcial das álgebras relativas são simplesmente a ordem de A restrita a elas e um átomo não pode ser menor que a e $-a$ ao mesmo tempo. ■

Teorema 5.65. *Todas as álgebras de Boole enumeráveis e sem átomos são isomorfas.*

Demonstração: Como as álgebras envolvidas são enumeráveis, vamos usar o Teorema do Isomorfismo de Vaught. Defina a relação $\mathcal{R}$ por

$$A\mathcal{R}B \iff A \text{ e } B \text{ são ambas triviais ou ambas enumeráveis e sem átomos.}$$

Vamos mostrar que $\mathcal{R}$ é uma relação de Vaught.

Claramente $\mathcal{R}$ é simétrica e foi definida de forma a satisfazer a condição de trivialidade. Quanto a propriedade de vai-e-volta, suponha que $A\mathcal{R}B$ para algum A não trivial e seja $a \in A$. Escolha $b \in B$ qualquer. Pelo lema 5.64, as álgebras $A \upharpoonright a$, $A \upharpoonright -a$, $B \upharpoonright b$ e $B \upharpoonright -b$ são todas sem átomos e portanto infinitas. Como elas são infintas e imagens homomorfas de álgebras enumeráveis, elas são também enumeráveis, portanto $(A \upharpoonright a)\mathcal{R}(A \upharpoonright b)$ e $(A \upharpoonright -a)\mathcal{R}(B \upharpoonright -b)$. ■

Assim, toda álgebra enumerável e sem átomos é isomorfa ao espaço de Stone do espaço de Cantor. Note que no nosso estudo já encontramos uma álgebra de Boole com estas propriedades: a álgebra de intervalos dos racionais é enumerável e sem átomos (ver 1.48 e 4.6 respectivamente), assim temos que Ult $[\mathbb{Q}[\cong \mathcal{C}$. De fato, por dualidade provamos o seguinte teorema.

Teorema 5.66. *Todos os espaços booleanos com base enumerável e sem pontos isolados são homeomorfos.*

Em particular, considere o espaço booleano ${}^{\omega}2$ das sequências binárias com a topologia produto. A sua base

$$\left\{\{x : \omega \to 2 \mid x[I] = \{1\} \text{ e } x[J] = \{0\}\} \mid I, J \in [\omega]^{<\aleph_0}, I \cap J = \varnothing\right\}$$

é claramente enumerável. Agora, seja $x = (x_n)_{n\in\omega}$ um ponto nele. Se a sequência $x : \omega \to 2$ eventualmente se torna constante, digamos a partir do natural n_0, ela pertence ao aberto básico

$$\prod_{i=0}^{n_0}\{x_i\} \times \prod_{n_0<i<\omega} 2$$

e caso contrário, a sequência $(a_i)_{i\in\omega}$ dada por

$$a_k = (x_0, \cdots, x_k, 1, 1, 1, \ldots)$$

para cada $k \in \omega$, nunca atinge o ponto x, mas converge a ele, mostrando que x não é um ponto isolado. Portanto não existem pontos isolados em ${}^{\omega}2$. Assim, pelo teorema acima, temos que ${}^{\omega}2 \cong \mathcal{C}$. O seguinte teorema resume a discussão desta subseção.

Teorema 5.67.

- *Toda álgebra de Boole enumerável sem átomos é isomorfa a $[\mathbb{Q}[$.*

- *Todo espaço booleano enumerável sem pontos isolados é homeomorfo a* ${}^{\omega}2$.

Por causa disso, dizemos que os espaços topológicos da forma ${}^{\kappa}2$, onde κ é um cardinal infinito, são espaços de Cantor *generalizados*, que tem como base

$$\Big\{\{x : \omega \to 2 \mid x[I] = \{1\} \text{ e } x[J] = \{0\}\} \mid I, J \in [\kappa]^{<\aleph_0}, I \cap J = \varnothing\Big\} \subseteq \operatorname{Clop}{}^{\kappa}2$$

e portanto tem peso κ. Na seção 9, caracterizaremos as álgebras de abertos-fechados destes espaços com uma propriedade universal.

6 Dualidade categórica

Nesta seção, vamos estudar como homomorfismos entre álgebras de Boole e funções contínuas entre espaços booleanos interagem com o processo de dualização que descrevemos, isto é, queremos associar de forma significativa a cada homomorfismo entre álgebras uma função contínua entre seus espaços de Stone e vice-versa.

Apesar desta parte da dualidade de Stone implorar pelo uso de linguagem categórica, evitaremos usá-la, preferindo enunciar os teoremas com a linguagem algébrica e topológica desenvolvida até agora.

6.1 A dualidade de Stone para homomorfismos e funções contínuas

A ideia essencial para dualizar os homomorfismos entre álgebras de Boole a funções entre os espaços de Stone delas é considerar suas imagens inversas. Durante este capítulo, dado uma função $h : A \to B$, denotaremos por h^* a função entre álgebras de Boole definida por

$$\begin{array}{rccc} h^*: & \wp(B) & \to & \wp(A) \\ & S & \mapsto & h^{-1}[S] \end{array}$$

É um exercício usual de teoria dos conjuntos verificar que

$$h^{-1}[E \cap F] = h^{-1}[E] \cap h^{-1}[F] \qquad\qquad h^{-1}[E \cup F] = h^{-1}[E] \cup h^{-1}[F]$$

para qualquer função h e subconjuntos A e B do seu contradomínio, portanto h^* é um homomorfismo entre álgebras de Boole. Além disso, esta operação "estrela" em funções satisfaz as seguintes propriedades.

Proposição 6.1. *Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções entre conjuntos. Então*

(a) $id_A{}^* = id_{\wp(A)}$.

(b) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Demonstração: Para o primeiro item, basta notar que $\mathrm{id}_A{}^*(a) = \mathrm{id}_A^{-1}[a] = a$ para qualquer $a \in \wp(A)$. Para o segundo item, temos que

$$x \in (g \circ f)^{-1}[c] \iff (g \circ f)(x) \in c \iff f(x) \in g^{-1}(c) \iff x \in f^{-1}[g^{-1}[c]]$$

para todo $c \in \wp(C)$. ■

Como, para uma álgebra fixa A, $\mathrm{Ult}A \subseteq \wp(A)$, vamos considerar $h^* \restriction_{\mathrm{Ult}B}$ como um candidato a uma função contínua entre os espaços booleanos Ult$A$ e Ult$B$, mas antes precisamos verificar se ela está bem definida.

Definimos anteriormente que, dado uma álgebra A, ultrafiltros dela são imagens inversas do elemento 1 por homomorfismos da forma $A \to 2$. Note que $\{1\}$ é o único ultrafiltro de 2, então as imagens inversas dos ultrafiltros de 2 por homomorfismos da forma $A \to 2$ são ultrafiltros em A. Generalizamos este resultado na seguinte proposição.

Proposição 6.2. *Seja $f : A \to B$ uma função entre álgebras de Boole e p um ultrafiltro de B. Se f é um homomorfismo, então $f^{-1}[p]$ é um ultrafiltro de A.*

Demonstração: Sejam $f : A \to B$ e p como no enunciado. Como p é um ultrafiltro de B, a função $\chi_p : B \to 2$ é um homomorfismo. Como f também é um homomorfismo, temos que a composição $\chi_p \circ f : A \to 2$ é um homomorfismo. Portanto $(\chi_p \circ f)^{-1}[1] = f^{-1}[\chi^{-1}[1]] = f^{-1}[p]$ é um ultrafiltro de A. ■

Assim, a proposição anterior motiva a seguinte definição.

Definição 6.3. Seja $f : A \to B$ um homomorfismo entre álgebras de Boole. Definimos a função f^d por

$$\begin{array}{rccc} f^d : & \mathrm{Ult}B & \to & \mathrm{Ult}A \\ & p & \mapsto & f^{-1}[d] \end{array}$$

isto é, $f^d = f^* \restriction_{\mathrm{Ult}B}$ e dizemos que ela é a função *dual* a f.

Proposição 6.4. *Para todo homomorfismo $f : A \to B$ entre álgebras de Boole, $f^d : UltB \to UltA$ é uma função contínua entre espaços booleanos.*

Demonstração: Para todo aberto básico $s_A(a)$ de Ult$A$, onde $a \in A$, para cada $x \in$ Ult$B$ vale

$$\begin{aligned} x \in (f^d)^{-1}[s_A(a)] &\iff f^d(x) \in s_A(a) \\ &\iff f^{-1}[x] \in \{p \in \mathrm{Ult}A \mid a \in p\} \\ &\iff a \in f^{-1}[x] \\ &\iff f(a) \in x \\ &\iff x \in \{p \in \mathrm{Ult}B \mid f(a) \in p\} \\ &\iff x \in s_B(f(a)) \end{aligned}$$

e portanto $(f^d)^{-1}[s_A(a)] = s_B(f(a))$ é um aberto básico de Ult$B$, mostrando que f^d é contínua. ■

Analogamente, dado uma função contínua $\varphi : X \to Y$ entre espaços booleanos, a função $\varphi^* : \wp(Y) \to \wp(X)$ pode ser restrita as álgebras de abertos-fechados delas.

Proposição 6.5. *Seja $\varphi : X \to Y$ uma função entre espaços booleanos e u um aberto-fechado de Y. Se φ é contínua, então $\varphi^{-1}[u]$ é um aberto-fechado de X.*

Demonstração: Sejam $\varphi : X \to Y$ e u como no enunciado. Como φ é contínua e u é aberto, $\varphi^{-1}[u]$ é aberto. Por outro lado, como u é fechado, $\varphi^{-1}[Y \setminus u] = X \setminus \varphi^{-1}[u]$ é aberto, portanto $\varphi^{-1}[u]$ é um aberto-fechado de X. ∎

Novamente, a proposição anterior motiva a seguinte definição.

Definição 6.6. Seja $\varphi : X \to Y$ uma função contínua entre espaços booleanos. Definimos a função φ_d por

$$\begin{aligned} \varphi_d : \ \mathrm{Clop}Y &\to \mathrm{Clop}X \\ u &\mapsto \varphi^{-1}[u] \end{aligned}$$

isto é, $\varphi_d = \varphi^* \restriction_{\mathrm{Clop}Y}$ e dizemos que ela é a função *dual* a φ.

Proposição 6.7. *Para todo homeomorfismo $\varphi : X \to Y$ entre espaços booleanos, $\varphi_d : ClopY \to ClopX$ é um homomorfismo entre álgebras de Boole.*

Demonstração: De fato, φ_d é uma restrição do homomorfismo $\varphi^* : \wp(Y) \to \wp(X)$ a uma subálgebra de $\wp(Y)$, portanto φ_d também preserva soma e produto e logo é um homomorfismo. ∎

Note que ambas as dualizações descritas são restrições da operação "estrela" definida no começo da seção, e portanto a preposição 6.1 tem como corolário o seguinte teorema.

Teorema 6.8 (Funtorialidade da dualização de homomorfismos)**.** *Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ homomorfismos entre álgebras de Boole e $\varphi : X \to Y$ e $\psi : Y \to Z$ funções contínuas entre espaços booleanos. Então*

(a) $(id_A)^d = id_{UltA}$.

(b) $(g \circ f)^d = f^d \circ g^d$.

(c) $(id_X)_d = id_{ClopX}$

(d) $(\psi \circ \varphi)_d = \varphi_d \circ \psi_d$

Assim, mostramos que todo diagrama comutativo entre álgebras de Boole constituído por homomorfismos pode ser transformado em um diagrama comutativo entre seus espaços duais constituído por funções contínuas, basta trocar cada espaço de Boole e homomorfismo pelo seu dual, invertendo o sinal das flechas como esquematizado abaixo.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& C
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ult}A & \mathrm{Ult}B \arrow[l, "f^d"'] \\
& \mathrm{Ult}C \arrow[ul, "(g \circ f)^d"] \arrow[u, "g^d"']
\end{tikzcd}
$$

E analogamente para espaços booleanos.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi \circ \varphi"'] & Y \arrow[d, "\psi"] \\
& Z
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Clop}X & \mathrm{Clop}Y \arrow[l, "\varphi_d"'] \\
& \mathrm{Clop}Z \arrow[ul, "(\psi \circ \varphi)_d"] \arrow[u, "\psi_d"']
\end{tikzcd}
$$

Em particular, dualizando duas vezes um homomorfismo $f : A \to B$ entre álgebras de Boole, obtemos uma função $f_d^d : \mathrm{ClopUlt}A \to \mathrm{ClopUlt}B$ entre álgebras isomorfas a A e B. Vamos mostrar a seguir que f_d^d atua entre estas álgebras isomorfas assim como f atua nas álgebras originais, passando apenas pelo isomorfismo de Stone, como esquematizado no seguinte diagrama.

$$
\begin{tikzcd}
& \mathrm{Ult}A \arrow[dr, mapsto] & \\
A \arrow[ur, mapsto] \arrow[rr, "s_A"] \arrow[dd, "f"'] & & \mathrm{ClopUlt}A \arrow[dd, "f_d^d"] \\
& \mathrm{Ult}B \arrow[uu, "f^d"'] \arrow[dr, mapsto] & \\
B \arrow[ur, mapsto] \arrow[rr, "s_B"] & & \mathrm{ClopUlt}B
\end{tikzcd}
$$

E analogamente para espaços booleanos.

$$
\begin{tikzcd}
& \mathrm{Clop}X \arrow[dr, mapsto] & \\
X \arrow[ur, mapsto] \arrow[rr, "t_X"] \arrow[dd, "\varphi"'] & & \mathrm{UltClop}X \arrow[dd, "\varphi_d^d"] \\
& \mathrm{Clop}Y \arrow[uu, "\varphi_d"'] \arrow[dr, mapsto] & \\
Y \arrow[ur, mapsto] \arrow[rr, "t_Y"] & & \mathrm{UltClop}Y
\end{tikzcd}
$$

Teorema 6.9. *Sejam $f : A \to B$ um homomorfismo entre álgebras de Boole e $\varphi : X \to Y$ uma função contínua entre espaços booleanos. Então*

(a) $s_B \circ f = f_d^d \circ s_A$. *(b)* $t_Y \circ \varphi = \varphi_d^d \circ t_X$.

Demonstração: Na demonstração da proposição 6.4 mostramos que

$$(f^d)^{-1}[s_A(a)] = s_B(f(a))$$

para todo $a \in A$ e portanto o primeiro item já foi provado. Para o segundo, vamos analogamente mostrar que

$$(\varphi_d)^{-1}[t_X(x)] = t_Y(f(x))$$

para todo $x \in X$. De fato,

$$\begin{aligned} a \in (\varphi_d)^{-1}[t_X(x)] &\iff \varphi_d(a) \in t_x(x) \\ &\iff \varphi^{-1}[a] \in \{u \in \mathrm{Clop}X \mid x \in u\} \\ &\iff x \in \varphi^{-1}[a] \\ &\iff \varphi(x) \in a \\ &\iff a \in \{u \in \mathrm{Clop}Y \mid \varphi(x) \in u\} \\ &\iff a \in t_Y(\varphi(x)) \end{aligned}$$

para todo $a \in \mathrm{Clop}Y$. ■

A partir de agora, usaremos a denominação "dualidade de Stone" para nos referir a conglome -ração dos resultados 5.49, 6.8 e 6.9.

Permitindo-se falar brevemente na linguagem da teoria de categorias, estes resultados estabelecem uma *dualidade* entre a categoria **BA** das álgebras de Boole munido dos homomorfismos entre elas e a categoria **BS** dos espaços booleanos munida das funções contínuas entre eles. Mais precisamente, a dualização de álgebras/espaços dada pelo teorema 5.49 junto com a dualização de homomorfismos/funções contínuas estabelecida nesta seção e o resultado 6.8 definem funtores contravariantes entre as categorias **BA** e **BS**.

Estes funtores não são inversos um do outro, porém suas composições geram objetos isomorfos ao original. Assim, pelo resultado 6.9, as funções s e t são transformações naturais que atestam a dualidade de **BA** e **BS**.

6.2 Subálgebras e imagens homomorficas

O teorema 6.9 prova que toda propriedade de funções que é preservada por composição com isomorfismos/homeomorfismos é retida neste processo de dualização dupla. Por exemplo, se uma função f for injetora ou sobrejetora, então f_d^d também será.

Assim como a preservação de propriedades na dualização dupla de álgebras/espaços, essa preservação de propriedades de funções indica que nenhuma informação é "perdida" na dualização, e portanto é possível inferir propriedades de f^d a partir de f e vice-versa. Nesta subseção, vamos focar no estudo da dualização de funções injetoras e sobrejetoras, já que já estabelecemos que elas correspondem a subálgebras e imagens homomorfas respectivamente.

Lema 6.10. *Sejam B uma álgebra de Boole, A uma subálgebra dela e $i : A \to B$ a inclusão de A em B. Então $i^d : UltB \to UltA$ é uma função sobrejetora dada por $i^d(p) = p \cap A$.*

Demonstração: Por cálculo direto, temos que

$$i^d(p) = i^{-1}[p] = \{a \in A \mid a \in p\} = p \cap A$$

para todo $p \in \mathrm{Ult}B$. Para verificar sobrejeção, seja $q \in \mathrm{Ult}A$. Como q tem a propriedade da intersecção finita em A, também tem em B e portanto existe ultrafiltro p de $\mathrm{Ult}B$ tal que $q \subseteq p$ e portanto $i^d(p) = q$. ■

Lema 6.11. *Seja L um espaço booleano, K um subespaço dele e $i : K \to L$ a inclusão de K em L. Então $i_d : ClopL \to ClopK$ é um epimorfismo dado por $i_d(u) = u \cap L$.*

Demonstração: Por cálculo direto, temos que

$$i_d(u) = i^{-1}[u] = \{p \in K \mid p \in u\} = u \cap L$$

para todo $u \in \mathrm{Clop}L$. Para verificar sobrejeção, note que K é fechado em L e portanto,

$$\mathrm{Clop}K = \{u \cap L \mid u \in \mathrm{Clop}L\}$$

pelo terceiro item do lema 5.34, logo $\mathrm{Clop}K = i_d[\mathrm{Clop}L]$. ■

Teorema 6.12. *Seja $f : A \to B$ um homomorfismo entre álgebras de Boole. Então*

(a) f é um monomorfismo se e somente se f^d é uma função contínua sobrejetora.

(b) f é um epimorfismo se e somente se f^d é uma função contínua injetora.

Seja $\varphi : X \to Y$ uma função contínua entre espaços booleanos. Então *(i)* *φ é uma função contínua injetora se e somente se φ_d é um epimorfismo.*

(ii) *φ é uma função contínua sobrejetora se e somente se φ_d é um monomorfismo.*

Demonstração: Se $f : A \to B$ é um monomorfismo, então podemos decompor $f = i \circ \tilde{f}$, onde $\tilde{f} : A \to f[A]$ é a função f com contra-domínio restrito e $i : f[A] \to B$ é a inclusão da subálgebra. Então, pela dualidade de Stone, temos que $f^d = \tilde{f}^d \circ i^d$. Pelo lema 6.10, temos que i^d é sobrejetora e como $\tilde{f}^d$ é claramente bijetora, segue que f^d é sobrejetora.

Se $\varphi : X \to Y$ é uma função injetora, então podemos analogamente decompor $\varphi = i \circ \tilde{\varphi}$ e concluir pelo lema 6.11 que φ_d é sobrejetora.

Se $f : A \to B$ é um epimorfismo, então dados ultrafiltros distintos $p, q \in \mathrm{Ult}B$, existe $b \in p$ tal que $b \notin q$. Como f é sobrejetora, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$ e portanto $f(a) \in p$ e $f(a) \notin q$, mostrando que $f^d[p] \neq f^d[q]$ e portanto f^d é sobrejetora.

Se $\varphi : X \to Y$ é uma função sobrejetora, vamos mostrar que $\mathrm{Ker}\varphi_d = \{0\}$ e portanto que φ_d é injetora. De fato, se $a \in \mathrm{Clop}Y$ é não-vazio, então existe $u \in Y$ tal que $u \in a$. Como f é sobrejetora, segue que existe $v \in X$ tal que $f(v) = u$ e portanto $v \in \varphi^{-1}[a] = \varphi_d(a)$, mostrando que ele é não vazio.

Todas as afirmações restantes seguem do teorema 6.9 e do que já foi provado desde teorema. Por exemplo, se f^d é uma função contínua, então f^d_d é um monomorfismo, e como $s_B \circ f = f^d_d \circ s_A$, segue que f também é um monomorfismo. ■

Como discutimos na subseção 3.3, fixada uma álgebra A, cada subálgebra de A determina um monomorfismo e vice-versa. Usando o resultado acima, podemos estender essa conexão a imagens contínuas como descrevemos a seguir

Observação 6.13. Existe uma correspondência biunívoca entre subálgebras de um espaço de Boole e imagens contínuas do seu espaço de Stone. Mais precisamente, esta correspondência é data pelas seguintes associações.

$$\begin{array}{ccc}
\left\{ \begin{array}{c} \text{Subálgebras} \\ \text{de } A \end{array} \right\} & \rightleftharpoons & \left\{ \begin{array}{c} \text{Imagens contínuas} \\ \text{de Ult}A \end{array} \right\} \\
B & \mapsto & (\mathrm{id}_A \restriction_B)^d[\mathrm{Ult}A] \\
\mathrm{dom}\varphi_d & \leftarrow\!\shortmid & \varphi[\mathrm{Ult}A]
\end{array}$$

Existe analogamente uma correspondência entre epimorfismos e subespaços fechados, porém deixamos para detalha-lho na seção 7, quando tivermos estabelecido quocientes de álgebras de Boole.

6.3 Uma propriedade universal do homomorfismo de Stone

Fixada uma álgebra de Boole A, dizemos que uma função $e : A \to \wp(X)$ é uma *representação* de A se e é um monomorfismo entre álgebras de Boole. Finalizamos esta seção caracterizando a representação dada pelo mapeamento de Stone entre as possíveis representações de uma álgebra através de uma propriedade universal.

Primeiramente, note que toda representação $e : A \to \wp(X)$ induz o seguinte mapa:

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & X & \to & \mathrm{Ult}A \\ & x & \mapsto & \{a \in A \mid x \in e(a)\} . \end{array}$$

Como $e[A]$ é fechado por intersecções finitas, ela é uma base de uma única topologia em X. Queremos que φ seja um homeomorfismo entre esses espaços, então vamos analisar condições necessárias e suficientes para isto.

Definição 6.14. Uma representação $e : A \to \wp(X)$ é dita reduzida se $e[A]$ separa os pontos de X, isto é, para todos $x, y \in X$ distintos, existe $a \in A$ tal que $x \in s(a)$ e $y \notin s(a)$.

Lema 6.15. *O mapa $\varphi : X \to \mathrm{Ult}A$ induzido por uma representação $e : A \to \wp(X)$ é injetor se e somente se e é uma representação reduzida.*

Demonstração: Suponha que φ é injetora. Então, dados $x, y \in X$ distintos, $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ e podemos supor sem perda de generalidade que existe $a \in \varphi(x) \setminus \varphi(y)$ e portanto $x \in s(a)$ e $y \notin s(a)$. A recíproca segue invertendo as implicações. ■

Definição 6.16. Uma representação $e : A \to \wp(X)$ é dita perfeita se para todo $p \in \mathrm{Ult}A$, existe $x \in X$ tal que $a \in p$ se e só se $x \in e(a)$.

Lema 6.17. *O mapa $\varphi : X \to \mathrm{Ult}A$ induzido por uma representação $e : A \to \wp(X)$ é sobrejetor se e somente se e é uma representação perfeita.*

Demonstração: Suponha que φ é sobrejetora. Então, dado $p \in \mathrm{Ult}A$, existe $x \in X$ tal que $\varphi(x) = p$ e portanto $a \in p$ se e somente se $x \in e(a)$. A recíproca segue invertendo as implicações. ■

Tomando $e : A \to \wp(X)$ como sendo o homomorfismo de Stone $s : A \to \wp(\mathrm{Ult}A)$, temos que o mapa induzido φ é simplesmente a identidade em $\mathrm{Ult}A$, portanto injetor e sobrejetor, provando a seguinte proposição.

Proposição 6.18. *O homomorfismo de Stone é uma representação reduzida e perfeita.*

Teorema 6.19. *Para toda representação $e : A \to \wp(X)$ reduzida e perfeita, existe um único isomorfismo $f : \wp(UltA) \to \wp(X)$ entre as álgebras de Boole que decompõe e por s, isto é, tal que $e = f \circ s$.*

Mais precisamente, X munido da topologia em que $e[A]$ é uma base é um espaço booleano no qual $ClopX = e[A]$ e existe um único homeomorfismo $\varphi : X \to Ult$ tal que sua dualização faz o seguinte diagrama comutar.

$$\begin{tikzcd}
& ClopUltA \arrow[dd, "\varphi_d"] & UltA \arrow[l, mapsto] \\
A \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, "e"'] & & \\
& ClopX & X \arrow[l, mapsto] \arrow[uu, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

Isto é, tal que $e = \varphi_d \circ s$.

Demonstração: Como $e : A \to \wp(X)$ é reduzida e perfeita, a função $\varphi : X \to \mathrm{Ult}A$ é uma bijeção. Dado aberto básico $s(a)$ de Ult$A$, com $a \in A$, temos que

$$\begin{aligned} x \in \varphi^{-1}[s(a)] &\iff \varphi(x) \in s(a) \\ &\iff a \in \varphi(x) \\ &\iff x \in e(a) \end{aligned}$$

para todo $x \in X$ e portanto $\varphi^{-1}[s(a)] = e(a)$ é um aberto básico, mostrando que φ é contínua e que $\varphi_d \circ s = e$. Como φ mapeia continuamente a base $e[A]$ de X a base $s[A]$ de Ult$A$, temos que φ é um homeomorfismo.

Para mostrar unicidade, suponha que φ' é um mapa contínuo que satisfaz $\varphi'_d \circ s = e$, então para todo $x \in X$ e $a \in A$ vale

$$\varphi(x) \in s(a) \iff x \in e(a) \iff \varphi'(x) \in s(a)\ .$$

Portanto não é possível separar $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ por abertos básicos, para todo $x \in X$. Como Ult$A$ é T_2, concluímos que $\varphi = \varphi'$. ■

Note que poderíamos dualizar o teorema para caracterizar o homeomorfismo de Stone $t : X \to \mathrm{UltClop}X$ entre as possíveis funções contínuas com propriedades duais a reduzida e perfeita.

Capítulo III

Construções algébricas e seus espaços de Stone

Existem três construções principais em quaisquer estruturas algébricas: subestrutura, produto e quociente. Já verificamos como subálgebras correspondem a imagens contínuas pela dualidade de Stone, assim neste capítulo vamos caracterizar os espaços de Stone do quociente e do produto de álgebras de Boole, respectivamente nas seções 7 e 8.

Neste capítulo, as principais referências são [Kop89] e [BS81].

7 Quocientes

Vamos estudar as conexões usuais entre relações de equivalências, epimorfismos e quocientes no contexto de álgebras de Boole. Para isto, introduzimos a noção de ideais em álgebras de Boole, conceito dual ao de filtro e provamos a versão booleana do Teorema do Homomorfismo usual.

7.1 Relações de equivalência e ideais

Imaginamos que o(a) leitor(a) já tenho familiaridade com o conceito conjuntista de relações de equivalências e conjuntos quocientes. Naturalmente, estamos interessados nas relações de equivalências que "preservam" as operações booleanas, motivando a seguinte definição.

Definição 7.1. Seja $\sim$ uma relação de equivalência em uma álgebra de Boole A. Dizemos que $\sim$ é uma relação de congruência (em A) se, para todos $x, x', y, y' \in A$, se $x \sim x'$ e $y \sim y'$, então $-x \sim -x'$ e $x + y \sim x' + y'$.

Assim como provamos anteriormente que toda função entre álgebras de Boole que preserva $+$ e $-$ é um homomorfismo, a definição acima implica que as relações de congruência $\sim$ também respeitam a operação $\cdot$ e toda outra operação definida a partir das operações usuais booleanas, como a diferença simétrica. Essa observação prova o seguinte lema.

Lema 7.2. *Para todo homomorfismo $f : A \to B$ entre álgebras de Boole, a relação*

$$x \sim_f y \iff f(x) = f(y)$$

em A é de congruência.

Reciprocamente, vamos mostrar que toda relação de congruência pode ser escrita como $\sim_f$ para algum homomorfismo f. Para isso, vamos definir uma estrutura de álgebra de Boole no conjunto quociente $A/\sim$.

Construção 7.3. Seja A uma álgebra de Boole e $\sim$ uma relação de equivalência nela. Então definimos em $A/\sim$ as operações

$$[a] +_\sim [b] = [a+b] \qquad [a]\cdot_\sim[b] = [a\cdot b] \qquad -_\sim[a] = [-a]$$

e é fácil verificar que estas operações estão bem definidas se e somente se $\sim$ é uma relação de congruência. Também identificamos os seguintes elementos.

$$0_\sim = [0] \qquad 1_\sim = [1]$$

Verificar que $(A/\sim, +_\sim, \cdot_\sim, -_\sim, 0_\sim, 1_\sim)$ é uma álgebra de Boole segue de uma verificação usual dos axiomas. Na prática, não indicamos a relação $\sim$ nas operações e nos elementos especiais.

Proposição 7.4. *Para toda relação de congruência $\sim$ em uma álgebra de Boole A, existe epimorfismo $\pi : A \to A/\sim$ tal que $\sim = \sim_\pi$.*

Demonstração: Defina

$$\begin{array}{rccc} \pi: & A & \to & A/\sim \\ & a & \mapsto & [a] \end{array}$$

e então

$$\pi(a+b) = [a+b] = [a]+[b] = \pi(a)+\pi(b)\,,$$

$$\pi(a\cdot b) = [a\cdot b] = [a]\cdot[b] = \pi(a)\cdot\pi(b)$$

e para $[a] \in A/\sim$, claramente $\pi(a) = [a]$. Portanto π é um epimorfismo. Além disso,

$$a \sim b \;\Leftrightarrow\; [a] = [b] \;\Leftrightarrow\; \pi(a) = \pi(b)$$

como queríamos mostrar. ■

Definição 7.5. Para toda álgebra de Boole A e relação de congruência $\sim$ em A, a função $\pi : A \to A/\!\sim$ dada pela proposição acima é dita o *epimorfismo canônico* de A em $A/\!\sim$.

Definimos agora um conjunto dual à filtros, dualizando cada afirmação da proposição 4.18.

Definição 7.6. Um subconjunto I de uma álgebra de Boole A é dito um *ideal* (de A) se ocorrem

(i) $0 \in I$.

(ii) Se $x, y \in I$, então $x + y \in I$.

(iii) Se $x \in I$, então $\{y \in A \mid x \geq y\} \subseteq I$.

Assim como pensávamos intuitivamente em filtros como elementos "grandes" da álgebra, interpretamos que ideais são coleções de elementos "pequenos". A condição *(i)* pede que 0, o menor elemento da ordem, sempre pertença a um ideal. A condição *(ii)* afirma que estes elementos são tão pequenos que o supremo deles ainda é pequeno. E por fim, a condição *(iii)* traz a ideia transitiva que se um elemento é pequeno, os elementos menores que ele também são pequenos.

Pela dualidade da Definição 7.6 com a Proposição 4.18, temos imediatamente que para cada filtro F de uma álgebra de Boole A, o conjunto

$$-F = \{-f \mid f \in F\}$$

é um ideal de A, dito o *ideal dual* de F. Analogamente, para cada ideal I de A, o conjunto

$$-I = \{-i \mid i \in I\}$$

é um filtro de A, dito o *filtro dual* de I.

Claramente, estas associações entre filtros e ideais são inversas uma da outra. Além disso, se $I \subseteq J$ são filtros, então $-I \subseteq -J$, e logo existe uma correspondência biunívoca que preserva a ordem parcial da inclusão entre o os filtros e os ideais de uma álgebra ordenados pela inclusão.

Essa dualização nos dá também exemplos fáceis de ideais ao dualizar filtros. Isto motiva as seguintes definições.

Definição 7.7. Seja A uma álgebra de Boole e I um ideal de A. Dizemos que

(i) I é um *ideal principal* se seu filtro dual é principal.

(ii) I é um *ideal próprio* se seu filtro dual é um filtro próprio, isto é, se $I \neq A$.

(iii) I é um *ideal trivial* se seu filtro dual é um filtro trivial, isto é, se $I = \{0\}$.

Dualizando a definição de filtro gerado, temos a seguinte proposição.

Proposição 7.8. *Para qualquer subconjunto E de uma álgebra de Boole A, o conjunto*

$$\left\{x \in A \mid \; x \leq \sum F \text{ para algum subconjunto finito não vazio } F \subseteq E\right\}.$$

é o menor filtro na ordem da inclusão que contém E.

7.2 O teorema do homomorfismo

Vamos agora conectar ideais (e logo filtros) a relações de congruências e com isto provar a versão para álgebras do Boole do clássico teorema do homomorfismo.

Lema 7.9. *Sejam A uma álgebra de Boole e $x, y \in A$. Então $x \triangle y$ é menor elemento a de A que satisfaz $x + a = y + a$.*

Demonstração: O resultado é verdadeiro em álgebras de conjuntos, e portanto vale por uma aplicação direta do teorema 4.38 de trivialização de aritmética finita. ■

Proposição 7.10. *Seja A uma álgebra de Boole, I um ideal dela e F seu filtro dual. A relação*

$$x \equiv y \;\Leftrightarrow\; x \triangle y \in I$$

é de congruência em A. Para todos x e y em A, temos que

$$x \equiv y \;\Leftrightarrow\; \text{Existe } i \in I \text{ tal que } x + i = y + i$$

e que

$$x \equiv y \;\Leftrightarrow\; \text{Existe } f \in F \text{ tal que } x \cdot f = y \cdot f.$$

Demonstração: Vamos verificar primeiro que $\equiv$ é uma relação de congruência. Reflexividade segue do fato que a diferença simétrica entre um elemento e ele mesmo é 0, que sempre pertence a um ideal. Simetria é trivial. Transitividade segue do fato que

$$x \triangle z \leq x \triangle y + y \triangle z$$

e então se $x \triangle y, y \triangle z \in I$, então $x \triangle y + y \triangle z \in I$ pela propriedade *(ii)* da definição de filtro. Logo $x \triangle z \in I$ pela propriedade *(iii)* da mesma definição.

Agora, verificamos as equivalências de $\equiv$ propostas acima. Note que para $x, y \in A$, se existe $i \in I$ tal que $x + i = y + i$, então $-x \cdot -i = -y \cdot -i$ e tomando $f = -i \in F$, temos que $x \cdot f = y \cdot f$. A recíproca é análoga e assim basta mostrar um deles.

De fato, pelo lema acima, $x + x \triangle y = y + x \triangle y$ e se existe $i \in I$ tal que $x + i = y + i$, então $i \geq x \triangle y$ e por I ser um filtro, segue que $x \triangle y \in I$.

Por fim, com estas caracterizações vamos mostrar que $\equiv$ é de equivalência. Se $x \equiv x'$ e $y \equiv y'$, então sejam $f, g \in F$ tais que $x \cdot f = x' \cdot f$ e $y \cdot g = y' \cdot g$. Então

$$(x+y) \cdot f \cdot g = (x \cdot f) \cdot g + (y \cdot g) \cdot f = (x' \cdot f) \cdot g + (y' \cdot g) \cdot f = (x' + y') \cdot f \cdot g$$

e como F é um filtro, temos que $f \cdot g \in F$. A demonstração de que $\equiv$ preserva a operação $-$ é análoga. ∎

Definição 7.11. Dada uma álgebra de Boole A, um ideal dela I, F seu filtro dual e a relação $\equiv$ como da proposição anterior, denotamos por A/I a álgebra de Boole $A/\equiv$ e dizemos que ela é *álgebra quociente* de A por I.

Note que o epimorfismo canônico $\pi : A \to A/I$ de uma álgebra quociente tem como núcleo justamente o conjunto I, já que

$$\pi(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x \equiv 0 \ \Leftrightarrow \ x \triangle 0 \in I \ \Leftrightarrow \ x \in I$$

e passando este resultado para complementos, obtemos que $f^{-1}[\{1\}]$ é o filtro dual de I.

Assim, cada ideal I de uma álgebra de Boole determina um epimorfismo $\pi : A \to A/I$. A seguir mostramos o tradicional teorema do homomorfismo, que determina que todo epimorfismo determina um ideal.

Teorema 7.12 (Teorema do homomorfismo)**.** *Seja $f : A \to B$ um epimorfismo de álgebras de Boole e I um ideal. Se $Kerf \subseteq I$, então existe um único homomorfismo $g : A/I \to B$ tal que $f = g \circ \pi$, onde $\pi : A \to A/I$ é o epimorfismo canônico.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & A/I \arrow[d, dashed, "g"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Em particular, se $Kerf = I$, então g é um isomorfismo e portanto $A/Kerf \cong Imf$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & A/Kerf \arrow[d, dashed, "\cong"] \\ & Imf \end{tikzcd}$$

Demonstração: Para provar a unicidade, sejam g e g' tais que $f = g \circ \pi$ e $f = g' \circ \pi$. Para cada $x \in A/I$, seja $a \in A$ tal que $\pi(a) = x$. Então

$$g(x) = (g \circ \pi)(a) = f(a) = (g' \circ \pi)(a) = g'(x)$$

e portanto $g = g'$.

Para provar a existência, defina

$$\begin{array}{rccc} g: & A/I & \to & B \\ & a & \mapsto & f(x_a) \end{array}$$

onde $x_a \in A$ tal que $\pi(x_a) = a$. Vamos verificar que g está bem definida. Sejam $x_a, y_a \in A$ tais que $\pi(x_a) = a = \pi(y_a)$. Então

$$f(x_a) = f(x_b) \Leftrightarrow f(x_a) \triangle f(x_b) = 0 \Leftrightarrow f(x_a \triangle x_b) = 0 \Leftrightarrow x_a \triangle x_b \in \mathrm{Ker} f$$

e portanto pela hipótese $\mathrm{Ker} f \subseteq I$, temos que

$$\pi(x_a) = \pi(x_b) \Rightarrow x_a \triangle x_b \in I \Rightarrow x_a \triangle x_b \in \mathrm{Ker} f \Rightarrow f(x_a) = f(x_b)$$

e portanto $g(x_a) = g(x_b)$. Claramente todo elemento x de A pode ser escrito como x_a, tomando $a = [x]$. Assim

$$(g \circ \pi)(x_a) = g(a) = f(x_a)$$

como queríamos provar.

Agora, como f é um epimorfismo e $f = g \circ \pi$, temos que g é um epimorfismo. No caso em que $\mathrm{Ker} f = I$, temos que

$$g(a) = 0 \Leftrightarrow f(x_a) = 0 \Leftrightarrow x_a \in \mathrm{Ker} f = I \Leftrightarrow x_a \triangle 0 \in I \Leftrightarrow a = \pi(x_a) = 0_{\equiv}$$

e assim o núcleo de g é trivial e portanto g é um isomorfismo. ■

Vamos mostrar algumas aplicações padrões do teorema do homomorfismo.

Exemplo 7.13 (Quociente por ideais principais)**.** Seja A uma álgebra de Boole qualquer e o ideal $I = \{x \in A \mid x \leq -a\}$ principal gerado por $-a$. Então o epimorfismo

$$\begin{array}{rccc} \rho_a: & A & \to & A \restriction a \\ & x & \mapsto & x \cdot a \end{array}$$

tem núcleo I, pois $x \cdot a = 0$ se e só se $x \leq -a$. Assim, pelo teorema do homomorfismo, $A/I \cong A \restriction a$.

Proposição 7.14. *Seja F um filtro de uma álgebra A. Então F é um ultrafiltro se e somente se $A/F \cong 2$.*

Demonstração: Seja $\pi : A \to A/F$ o epimorfismo canônico. Se F é um ultrafiltro, então a função característica $\chi_F : A \to 2$ tem núcleo $-F$. Pelo teorema do homomorfismo, $A/F \cong 2$.

Reciprocamente, se $A/F \cong 2$, seja $f : A/F \to 2$ um isomorfismo. Então $F = (\pi \circ f)^{-1}[\{1\}]$ é um ultrafiltro. ■

Este resultado pode ser generalizado no caso finito.

Proposição 7.15. *Sejam $p_1, \dots, p_n$ ultrafiltros distintos de uma álgebra A. Então $A/(p_1 \cap \dots \cap p_n) \cong \wp(n)$ e para cada $M \subseteq \{1, \dots, n\}$, existe $a \in A$ tal que $a \in p_i$ se e só se $i \in M$ para todo $i \in I$.*

Demonstração: Sejam $F = p_1 \cap \dots \cap p_n$ e $X = \{1, \dots, n\}$. Defina

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & \wp(X) \\ & a & \mapsto & \{i \in X \mid a \in p_i\} \end{array}$$

e note que f é um homomorfismo de núcleo F. Seja $M \subseteq X$. Dados $i, j \in X$ distintos, pela maximalidade de p_i e p_j como filtros próprios, fixe $a_{ij} \in p_i \setminus p_j$. Para cada $i \in M$, sejam

$$a_i = \prod\{a_{ij} \mid j \in X \setminus M\}$$

e

$$a = \sum\{a_i \mid i \in M\}.$$

Então, como $a_i \in p_i$, mas $a_i \notin p_j$ para todo $j \in X \setminus M$, temos que $a \in p_i$ se e só se $i \in M$ para todo $i \in I$, como queríamos. Além disso, isto mostra que f é sobrejetora e portanto $A/F \cong \wp(X)$. ■

É natural se perguntar quais propriedades das estudadas até agora (completude, atomicidade, celularidade, etc) são preservadas pela álgebra quociente. A resposta é que em geral, nenhuma delas, porém deixamos os contra-exemplos disso para a Seção 10, onde estudaremos extensivamente um quociente que falha em preservar todas estas propriedades simultaneamente.

7.3 O espaço de Stone de álgebras quocientes

Mostramos que epimorfismos correspondem a álgebras quocientes e portanto, pela dualidade de Stone, os espaços de Stone de álgebras quocientes devem corresponder a funções contínuas injetoras, ou seja, a subespaços. De fato, vamos mostrar que os ideais de uma álgebra fixa tem uma correspondência de ordem com subespaços fechados.

Lema 7.16. *Se I é um ideal de uma álgebra de Boole, então $\bigcup s[I]$ é um aberto do seu espaço de Stone.*

Demonstração: De fato, é uma união de abertos, logo é aberta. ■

Lema 7.17. *Se U é um aberto de um espaço booleano, então $\{a \in A \mid s(a) \subseteq U\}$ é um ideal da sua álgebra de abertos-fechados.*

Demonstração: De fato, este conjunto é um ideal principal gerado por U. ■

Teorema 7.18. *O reticulado de ideais de uma álgebra de Boole é ordem-isomorfo à topologia do seu espaço de Stone.*

Demonstração: Seja A uma álgebra de Boole, $\mathcal{I}$ o conjunto de seus ideais e $\mathfrak{T}$ a topologia do seu espaço de Stone. Defina as funções

$$\begin{array}{rccc} o: & \mathcal{I} & \to & \mathfrak{T} \\ & I & \mapsto & \bigcup s[I] \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rccc} i: & \mathfrak{T} & \to & \mathcal{I} \\ & u & \mapsto & \{a \in A \mid s(a) \subseteq u\} \end{array}$$

que claramente preservam a ordem da inclusão. Vamos mostrar que elas são inversas uma da outra.

Primeiramente, seja u aberto de $\mathrm{Ult}A$, então claramente

$$o(i(u)) = o(\{a \in A \mid s(a) \subseteq u\}) = \bigcup s\big[\{a \in A \mid s(a) \subseteq u\}\big] \subseteq u.$$

Para a recíproca, seja $x \in u$. Por zero-dimensionalidade, seja $a \in A$ tal que $x \in s(a) \subseteq u$. Então $a \in i(u)$ e portanto $x \in o(i(u))$, portanto $u \subseteq o(i(u))$.

Analogamente, para I um ideal de A, temos que

$$i(o(I)) = i\big(\bigcup s[I]\big) = \{a \in A \mid s(a) \subseteq \bigcup s[I]\} \subseteq I$$

e para a recíproca, seja $a \in i(o(I))$ e então $s(a) \subseteq \bigcup s[I]$. Por compacidade, existem $i_1, \ldots, i_n \in I$ tais que $s(a) \subseteq s(i_1) \cup \cdots \cup s(i_n) = s(i_1 + \ldots + i_n)$ e pelo fato de s ser um isomorfismo segue que $a \leq i_1 + \ldots + i_n$ e portanto $a \in I$. ■

O teorema acima nos dá outra forma de estudar a topologia de Stone, através dos ideais de sua álgebra de Boole e as funções o e i acima são bem úteis para transferir ideais e abertos e vice-versa. Como exemplo disso, temos a seguinte caracterização dos espaços de Stone de álgebras quocientes.

Teorema 7.19. *Seja A uma álgebra de Boole e I um ideal. Então $\mathrm{Ult}(A/I) \cong \mathrm{Ult}A \smallsetminus \bigcup s[I]$.*

Demonstração: Sejam A e I como no enunciado e $u = \bigcup s[I]$. Defina a função

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & \mathrm{Clop}(\mathrm{Ult}A \smallsetminus u) \\ & a & \mapsto & s(a) \cap (\mathrm{Ult}A \smallsetminus u) \end{array}$$

entre álgebras de Boole. Note que f é um homomorfismo bem definido e que como $\mathrm{Ult}A \smallsetminus u$ é um subespaço fechado, pelo terceiro item do lema 5.34, f é um epimorfismo. Assim, pelo teorema do homomorfismo, $A/\mathrm{Ker}f \cong \mathrm{Clop}(\mathrm{Ult}A \setminus u)$. Agora, basta notar que

$$s(a) \cap (\mathrm{Ult}A \setminus u) = \emptyset \iff s(a) \subseteq u \iff a \in I$$

e portanto $\mathrm{Ker}f = I$ e pela dualidade de Stone, temos que

$$\mathrm{Ult}(A/I) \cong \mathrm{UltClop}(\mathrm{Ult}A \setminus u) \cong \mathrm{Ult}A \setminus u$$

como queríamos demonstrar. ■

Assim, álgebras quocientes correspondem a subespaços fechados dos seus espaços de Stone, como esperado pela dualidade de Stone. Ainda na linguagem do teorema anterior, se $o(I)$ é um aberto-fechado, temos o seguinte caso.

Exemplo 7.20 (Espaços de Stone de quocientes por ideias principais)**.** Já provamos que se I é o ideal principal gerado por $-a$, então $A/I \cong A \restriction a$. Note que neste caso $\bigcup s[I] = s(-a)$ e portanto $\mathrm{Ult}(A \restriction a) \cong \mathrm{Ult}A \setminus s(-a) = s(a)$.

7.4 A quantidade de ideais de uma álgebra de Boole

Pela dualização de filtros, ideais, abertos e fechados, temos que o estudo na quantidade de ideais (ou de filtros) em uma álgebra de Boole se traduz a um estudo na quantidade de abertos (ou de fechados) em um espaço booleano.

Resultados concretos sobre a quantidade de abertos em espaços topológicos são pouco triviais. Aqui, mostraremos um resultado inicial do assunto que limita esta quantidade e também responde parcialmente a recíproca do problema estudado na subseção 5.5, em que vimos que dado um espaço booleano X, a cardinalidade da sua álgebra dual $\mathrm{Clop}X$ é exatamente o peso de X, e logo que se $X \cong \mathrm{Ult}A$, $\mathrm{Clop}X$ tem cardinalidade A.

Assim, vamos estudar o processo inverso, isto é, dada uma álgebra de Boole A, o que podemos dizer sobre a cardinalidade de $\mathrm{Ult}A$? Mais precisamente, vamos provar através de uma sequência de lemas o seguinte teorema.

Teorema 7.21. *Para toda álgebra de Boole A infinita,*

$$|A| \leq |UltA| \leq |FiltA| \leq |SubA| \leq 2^{|A|}$$

onde $FiltA$ e $SubA$ denotam respectivamente o conjunto de filtros e de subálgebras de A.

Lema 7.22. *Seja B uma subálgebra de A. B é uma subálgebra própria se e somente se existem ultrafiltros distintos de A que coincidem em B, isto é, existem $p, q \in UltA$ tais que $p \neq q$ e $p \cap B = q \cap B$.*

Demonstração: Claramente se existem $p, q \in \text{Ult}A$ tais que $p \neq q$ e $p \cap B = q \cap B$, então $A \neq B$. Para a recíproca, considere a inclusão de B em A.

$$B \xhookrightarrow{i} A$$

Como B é própria, esta inclusão não é sobrejetora e portanto a função dual

$$\text{Ult}B \xtwoheadleftarrow{i^d} \text{Ult}A$$

é uma sobrejeção que não é injetora, portanto existem $p, q \in \text{Ult}B$ tais que $p \neq q$ e $i^d(p) = i^d(q)$, ou seja, tais que $p \cap B = q \cap B$. ■

Lema 7.23. *Para todo filtro F de A, $F \cup -F$ é uma subálgebra de A.*

Demonstração: $F \cup -F$ é a pré-imagem da subálgebra 2 do espaço A/F através da projeção canônica, portanto é uma subálgebra de A. ■

Lema 7.24. *Se F e G são filtros não-maximais distintos de A, então $F \cup -F$ e $G \cup -G$ são subálgebras distintas de A.*

Demonstração: Sejam F e G como no enunciado e suponha, sem perda de generalidade, que existe $a \in F \setminus G$. Se $a \notin -G$, então $a \in F \cup -F$ e $a \notin G \cup -G$, como queríamos demonstrar. Se $-a \in G$, então pela não-maximalidade de F entre os filtros próprios, existe $b \in A$ tal que $b, -b \notin F$. Como $(b + -a) \cdot (-b + -a) = -a \notin F$, temos que $b + -a$ e $-b + -a$ não podem pertencer simultaneamente a F. Novamente, sem perda de generalidade, suponha que $b + -a \notin F$, então $b + -a \in G \cup -G$ e $b + -a \notin F \cup -F$, provando o resultado. ■

Agora, provaremos cada uma das desigualdades do Teorema 7.21.

Lema 7.25. *Para toda álgebra de Boole A infinita, $|A| \leq |\text{Ult}A|$.*

Demonstração: Para cada par (p, q) de ultrafiltros distintos em A, pela maximalidade de p e q como filtros próprios, é possível escolher $a_{(p,q)} \in p \setminus q$. Seja

$$B = \langle a_{(p,q)} \mid (p, q) \in (\text{Ult}A)^2,\ p \neq q \rangle \,,$$

e note que, pelo Teorema da Forma Normal e infinitude de A, temos

$$|B| \leq |\{(p, q) \in (\text{Ult}A)^2 \mid p \neq q\}| \leq |\text{Ult}A|^2 = |\text{Ult}A| \,.$$

Se B fosse uma álgebra própria de A, existiriam ultrafiltros p e q de A que coincidem em B pelo Lema 7.22, porém $a_{(p,q)} \in p \cap B \setminus q \cap B$, logo $B = A$ e portanto $|A| = |B|$. ■

Lema 7.26. *Para toda álgebra de Boole A infinita, $|UltA| \leq |FiltA|$.*

Demonstração: Trivial. ∎

Lema 7.27. *Para toda álgebra de Boole A infinita, $|FiltA| \leq |SubA|$.*

Demonstração: Defina temporariamente PrA o conjunto de todos os filtros de A que são próprios mas não são maximais. Fixado $p \in \mathrm{Ult}A$, o mapa

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathrm{Ult}A \setminus \{p\} & \to & \mathrm{Pr}A \\ & q & \mapsto & q \cap p \end{array}$$

é injetor pela proposição 7.15 e como A é infinito, Ult$A$ é infinito e portanto temos que $|\mathrm{Ult}A| = |\mathrm{Ult}A \setminus \{p\}| \leq |\mathrm{Pr}$
Como todo filtro é impróprio, próprio não-maximal ou maximal, temos que

$$|\mathrm{Filt}A| = 1 + |\mathrm{Pr}A| + |\mathrm{Ult}A| = |\mathrm{Pr}A|$$

e agora o lema 7.24 prova que a associação

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathrm{Pr}A & \to & \mathrm{Sub}A \\ & F & \mapsto & F \cup -F \end{array}$$

é injetora e portanto $|\mathrm{Filt}A| = |\mathrm{Pr}A| \leq |\mathrm{Sub}A|$ como queríamos demonstrar. ∎

Lema 7.28. *Para toda álgebra de Boole A infinita, $|SubA| \leq 2^{|A|}$.*

Demonstração: Toda subálgebra de A é também um subconjunto de A e $|\wp(A)| = 2^{|A|}$. ∎

Para o caso finito, temos o seguinte teorema.

Teorema 7.29. *Para toda álgebra de Boole A finita, se $n = |AtA|$, então*

- $|A| = 2^n$,
- $|FiltA| = 2^n$,
- $|UltA| = n$,
- $|SubA| = B_n$,

onde $FiltA$ e $SubA$ denotam respectivamente o conjunto de filtros e de subálgebras de A e B_n é o n-ésimo número de Bell, isto é, a quantidade de partições de um conjunto com n elementos.

Demonstração: A única destas que não segue imediatamente do Teorema de Representação de Stone é a cardinalidade de Sub$A$. De fato, se A é uma álgebra finita, então toda subálgebra de A é determinada exclusivamente por seus átomos, e tais átomos particionam o conjunto de átomos de A, portanto cada partição de AtA, de cardinalidade n, corresponde a exatamente uma subálgebra de A. ∎

8 Produtos

Vamos estudar o produto com operações definidas coordenada a coordenada entre álgebras de Boole, caracterizando-o com uma propriedade universal. Para tratar do espaço de Stone desta construção, vamos ter que usar compactificações e introduzir uma noção mais fraca do produto.

8.1 Construção e propriedade universal

Construção 8.1. Seja $\{A_i\}_{i\in I}$ uma família não-vazia de álgebras de Boole. No produto cartesiano

$$\prod_{i\in I} A_i = \{(a_i)_{i\in I} \mid a_i \in A_i \text{ e } i \in I\}$$

dos conjuntos A_i definimos as operações coordenada a coordenada

$$(a_i)_{i\in I} \boxplus (b_i)_{i\in I} = (a_i + b_i)_{i\in I} \qquad (a_i)_{i\in I} \boxdot (b_i)_{i\in I} = (a_i \cdot b_i)_{i\in I} \qquad \boxminus(a_i)_{i\in I} = (-a_i)_{i\in I}$$

e os seguintes elementos

$$0_\square = (0_{A_i})_{i\in I} \qquad 1_\square = (1_{A_i})_{i\in I}$$

Através de uma verificação usual de axiomas, prova-se que $\left(\prod_{i\in I} A_i, \boxplus, \boxdot, \boxminus, 0_\square, 1_\square\right)$ é uma álgebra de Boole, dita a *álgebra produto* da família $\{A_i\}_{i\in I}$. Na prática, usamos as notações usuais das operações de álgebra de Boole na álgebra produto. No caso em que $A_i = A$ para todo $i \in I$ e alguma álgebra de Boole A, denotamos

$$\prod_{i\in I} A_i = A^I .$$

Podemos identificar cada espaço A_i original através do epimorfismo

$$\begin{array}{rccc} \rho_i : & \prod_{i\in I} A_i & \to & A_i \\ & (a_k)_{k\in I} & \mapsto & a_i \end{array}$$

para cada $i \in I$. Tais mapas são denominadas *projeções* (na i-ésima coordenada).

Naturalmente, podemos realizar a construção acima impondo condições sobre a quantidade de coordenadas que pode ser o máximo ou mínimo da álgebra. Assim, definimos o *κ-produto fraco* de $\{A_i\}_{i\in I}$ como sendo a subálgebra

$$\prod_{i\in I}{}^{<\kappa} A_i := \left\{(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i \mid |\{i \in I \mid a_i \neq 0\}| < \kappa \text{ ou } |\{i \in I \mid a_i \neq 1\}| < \kappa\right\}$$

do produto "completo" $\prod_{i\in I} A_i$, onde κ é um cardinal infinito. No caso em que $\kappa = \aleph_0$, denotamos $\prod_{i\in I}^{<\kappa} A_i$ simplesmente por $\prod_{i\in I}^{w} A_i$ e dizemos que ele é o produto fraco de $\{A_i\}_{i\in I}$.

Se B é uma subálgebra do produto $\prod_{i\in I} A_i$ que contém o produto fraco $\prod_{i\in I}{}^{\mathrm{w}} A_i$, dizemos que B é uma *álgebra intermediária* (de $\prod_{i\in I} A_i$).

Exemplo 8.2. Para todo conjunto I, temos $\wp(I) \cong 2^I$. De fato,

$$\begin{array}{rccc} f: & 2^I & \to & \wp(I) \\ & (a_i)_{i\in I} & \mapsto & \{i \in I \mid a_i = 1\} \end{array}$$

é claramente um isomorfismo.

Pelas definições coordenada a coordenada das operações descritas acima, a ordem na álgebra produto pode ser descrita por

$$(a_i)_{i\in I} \leq (b_i)_{i\in I} \;\Leftrightarrow\; a_i \leq b_i \text{ para cada } i \in I$$

e portanto as propriedades de ordem das álgebras A_i influenciam diretamente as propriedades da álgebra produto.

Proposição 8.3. *Seja $\{A_i\}_{i\in I}$ uma família de álgebras de Boole. Então $\prod_{i\in I} A_i$ é completa se e somente se cada A_i é completa.*

Demonstração: Seja $P = \prod_{i\in I} A_i$. Pela descrição da ordem na álgebra produto, fica claro que se um subconjunto M de P é limitado superiormente por um elemento $(l_i)_{i\in I}$, então l_i limita superiormente a imagem $\rho_i[M]$ em A_i e que reciprocamente se existem l_i limitando superiormente $\rho_i[M]$ para cada $i \in I$, então $(l_i)_{i\in I}$ limita superiormente M. Portanto

$$\sum{}^{P} M = \left(\sum{}^{A_i} \rho_i[M]\right)_{i\in I}$$

no sentido que se o lado esquerdo da igualdade existe, então o direito também existe e eles coincidem. ∎

A demonstração do teorema acima generaliza para σ-completude, κ-completude, falta de completude, etc. Em particular, como cada álgebra finita é completa, todo produto de álgebras finitas é completa, dando outra demonstração que $\wp(I) \cong 2^I$ é completa.

Proposição 8.4. *Seja $\{A_i\}_{i\in I}$ uma família de álgebras de Boole. Então $\prod_{i\in I} A_i$ é sem átomos se e somente se cada A_i é sem átomos.*

Demonstração: Seja $P = \prod_{i\in I} A_i$. Se A_i é sem átomos para todo $i \in I$, então dado $(a_i)_{i\in I} \in P$ não-nulo, seja $K \subseteq I$ não-vazio tal que $a_k \neq 0$ para todo $k \in K$. Como A_k não tem átomos, existe $b_k \in A_k$ tal que $0 < b_k < a_k$ para cada $k \in K$. Assim $(b_i)_{i\in I}$ onde $b_i = b_k$ se $i \in K$ e $b_i = 0$ caso contrário testemunha que $(a_i)_{i\in I}$ não é um átomo.

Reciprocamente, se P é sem átomos, então dado $a \in A_k$ com $k \in I$ fixo, o elemento $(a_i)_{i\in I}$ dado por $a_k = a$ e $a_i = 0$ caso contrário não é um átomo. Assim, existe $(b_i)_{i\in I} \in P$ tal que $0 < (b_i)_{i\in I} < (a_i)_{i\in I}$, mas como $a_i = 0$ para todo $i \in I \setminus \{k\}$, temos que $0 < b_k < a_k = a$ e portanto a não é um átomo. ■

Uma demonstração análoga a anterior mostra a seguinte proposição.

Proposição 8.5. *Seja $\{A_i\}_{i\in I}$ uma família de álgebras de Boole. Então $\prod_{i\in I} A_i$ é atômica se e somente se cada A_i é atômica.*

Agora, vamos descrever uma propriedade universal do produto de álgebras junto com as projeções que é usual neste tipo de construção.

Teorema 8.6. *Seja $\{A_i\}_{i\in I}$ uma família de álgebras de Boole. O par $(\prod_{i\in I} A_i, (\rho_i)_{i\in I})$ tem a seguinte propriedade universal: Dado outro par $(B, (f_i)_{i\in I})$, onde B é uma álgebra de Boole e $(f_i)_{i\in I}$ uma família de epimorfismos, existe um único homomorfismo $f : B \to \prod_{i\in I} A_i$ tal que $\rho_i \circ f = f_i$ para cada $i \in I$.*

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[dd, dashed, "f"] \arrow[dr, "f_i"] & \\
 & A_i \\
\prod\limits_{i\in I} A_i \arrow[ur, "\rho_i"'] &
\end{tikzcd}
$$

Reciprocamente, se $(Q, (q_i)_{i\in I})$ tem a propriedade universal acima, então existe um único isomorfismo $h : \prod_{i\in I} A_i \to Q$ tal que $q_i \circ h = \rho_i$ para cada $i \in I$.

$$
\begin{tikzcd}
\prod\limits_{i\in I} A_i \arrow[dd, dashed, "h"'] \arrow[dr, "\rho_i"] & \\
 & A_i \\
Q \arrow[ur, "q_i"] &
\end{tikzcd}
$$

Demonstração: A demonstração é a usual deste tipo de resultado. Para a existência e unicidade da função f, defina

$$
\begin{array}{rccc}
f: & B & \to & \prod\limits_{i\in I} A_i \\
 & b & \mapsto & (f_i(b))_{i\in I}
\end{array}
$$

e note que, pela definição coordenada a coordenada das operações no produto, f é um homomorfismo e claramente $\rho_i \circ f = f_i$ para cada $i \in I$.

Para a segunda afirmação, basta usar as propriedades universais em sentidos opostos: Pela propriedade universal de $(Q, (q_i)_{i\in I})$, existe único $h : \prod_{i\in I} A_i \to Q$ tal que $\rho_i \circ h = \rho_i$ e pela propriedade universal de $(\prod_{i\in I} A_i, (\rho_i)_{i\in I})$ existe único homomorfismo $h' : Q \to \prod_{i\in I} A_i$ tal que $\rho_i \circ h' = q_i$. Então

$$\rho_i \circ (h' \circ h) = q_i \circ h = \rho_i$$

e

$$q_i \circ (h \circ h') = \rho_i \circ h' = q_i$$

para cada $i \in I$ e pela sobrejeção de cada ρ_i e q_i, segue que h é a inversa de h' e portanto h é um isomorfismo. ■

8.2 Decomposições e partições

Agora, vamos generalizar os resultados de decomposições de uma álgebra em álgebras relativas obtido na subseção 2.3, mostrando que toda fatoração de uma álgebra de Boole surge desta forma.

Teorema 8.7. *Para toda partição da unidade $(a_i)_{i\in I}$ de uma álgebra de Boole A, a função*

$$\begin{array}{rccl} f: & A & \to & \prod_{i\in I} (A \upharpoonright a_i) \\ & x & \mapsto & (x \cdot a_i)_{i\in I} \end{array}$$

é um monomorfismo. Ela é um isomorfismo se e somente se para todo elemento $(c_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} (A \upharpoonright a_i)$, a soma $\sum^A_{i\in I} c_i$ existe.

Reciprocamente, para todo isomorfismo $g : A \to \prod_{i\in I} A_i$, existe $(a_i)_{i\in I}$ partição da unidade de A tal que $A_i \cong A \upharpoonright a_i$ para todo $i \in I$.

Demonstração: Claramente f como definido acima é um homomorfismo. Para verificar que é um monomorfismo, note que $f(x) = 0$ se e só se $x \cdot a_i = 0$ para todo $i \in I$ e como $\sum_{i\in I} a_i = 1$, segue que isto ocorre se e só se $x = 0$. Além disso, se vale a condição de existência de somas do enunciado, então f é sobrejetora, já que dado $(c_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} (A \upharpoonright a_i)$, claramente $f(\sum_{i\in I} c_i) = (c_i)_{i\in I}$.

Para a reciproca, para cada $i \in I$, seja $e^i \in \prod_{i\in I} A_i$ tal que $e^i_i = 1$ e $e^i_j = 0$ se $i \neq j$. Claramente $(e^i)_{i\in I}$ é uma partição da unidade em $\prod_{i\in I} A_i$. Para cada $i \in I$, seja $a_i = f^{-1}(e^i)$. Como f é um isomorfismo, claramente $(a_i)_{i\in I}$ é uma partição da unidade em A e f restrito a $A \upharpoonright a_i$ é um isomorfismo de $A \upharpoonright a_i$ a $\prod_{i\in I} A_i \upharpoonright e^i \cong A_i$. ■

Corolário 8.8. *Para toda partição da unidade $(a_i)_{i\in I}$ de uma álgebra de Boole A, se A é $|I|^+$-completa,* *então* $A \cong \prod_{i \in I} (A \upharpoonright a_i)$.

O resultado anterior é bem simples, porém exibe uma conexão fundamental entre partições da unidade e fatores de uma álgebra produto que reduzem muitas questões a apenas as álgebras relativas.

Apesar disso, resultados de isomorfismo entre álgebras a partir de suas álgebras relativas raramente valem. Por exemplo, William P. Hanf mostrou que existe uma álgebra não enumerável A tal que $A^2 \cong A$, $A \times 2^n \cong A$ e $A \times 2^k \not\cong A$ para todo $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. No caso enumerável, Vaught mostrou que álgebras com infinitos átomos são isomorfas ao produto delas mesmas por qualquer álgebra finita. A seguir mostramos este segundo resultado.

Proposição 8.9. *Se A é uma álgebra enumerável com infinitos átomos, então $A \cong A \times 2$.*

Demonstração: Vamos definir a seguinte relação $\mathcal{R}$ entre álgebras de Boole.

$$
\begin{aligned}
A\mathcal{R}B \quad \Leftrightarrow \quad & \text{ou} \quad A \text{ e } B \text{ são finitas e isomorfas} \\
& \text{ou} \quad A \text{ e } B \text{ são infinitas e } |\mathrm{At}A| = |\mathrm{At}B| < \aleph_0 \\
& \text{ou} \quad A \text{ e } B \text{ são infinitas e } |\mathrm{At}A| = |\mathrm{At}B| = \aleph_0 \text{ e} \\
& \qquad\; \text{existe } n \in \omega \text{ tal que } A \cong B \times 2^n \text{ ou } B \cong A \times 2^n.
\end{aligned}
$$

Claramente, se $\mathcal{R}$ é uma relação de Vaugh, o teorema segue, então vamos mostrar as três propriedades listadas na definição 3.32.

De fato, $\mathcal{R}$ foi definida de forma simétrica e se A for trivial e $A\mathcal{R}B$, então pela primeira linha da definição de $\mathcal{R}$, segue que $A \cong B$ e logo B é trivial. Assim, basta mostrar a propriedade de vai-e-volta.

Se $A\mathcal{R}B$ vale pela primeira condição da definição de $\mathcal{R}$ acima, não há o que demonstrar.

Se $A\mathcal{R}B$ vale pela segunda condição, então seja $a \in A$. Se $A \upharpoonright a$ é finita, basta tomar $b \in B$ tal que $B \upharpoonright b$ tem o mesmo tamanho, tomando b a soma da quantidade adequada de átomos. Se $A \upharpoonright a$ é infinita com k átomos, então $A \upharpoonright a \cong 2^k \times B$, onde B é uma álgebra enumerável sem átomos. Basta escolher $b \in B$ tal que existem k átomos abaixo dele, mas que $B \upharpoonright b$ não é finito, o que é possível pela infinitude de B.

Se $A\mathcal{R}B$ vale pela terceira condição, então podemos assumir sem perda de generalidade que $A = B \times 2^n$ para algum $n \in \omega$. Assim, dado $a = (\beta, \alpha) \in B \times 2^n = A$, podemos assumir também que $B \upharpoonright \beta$ tem infinitos átomos, pois caso contrário basta trocar os papéis de a e $-a$ na demonstração. Escolha $x_1, \ldots, x_n$ átomos distintos de $B \upharpoonright \beta$ e defina

$$\gamma = x_1 + \cdots + x_m \qquad \text{e} \qquad \delta = x_{m+1} + \cdots + x_n$$

onde m é a quantidade de átomos de $2^n \restriction \alpha$. Por fim, tome

$$b = \beta \cdot -(\gamma + \delta) + \gamma\,.$$

Então $A \restriction a = B \restriction b \times 2^m$ e portanto $(A \restriction a)\mathcal{R}(B \restriction b)$. Além disso, como $2^n \restriction -\alpha \cong 2^{n-m} \cong B \restriction \delta$, $-b = \delta + -\beta$ e $\delta \cdot -\beta = 0$, segue que

$$A \restriction -a \cong (B \restriction -\beta) \times (2^n \restriction -\alpha) \cong (B \restriction -\beta) \times (B \restriction \delta) \cong B \restriction -b$$

e portanto $(A \restriction a)\mathcal{R}(B \restriction b)$. ■

Corolário 8.10. *Se A é uma álgebra enumerável com infinitos átomos e B é uma álgebra finita, então $A \times B \cong A$.*

Demonstração: Se B é finita, então $B \cong 2^n$ para algum $n \in \omega$ e então

$$A \times B \cong A \times 2^n \cong A \times 2 \times 2^{n-1} \cong A \times 2^{n-1} \cong \cdots \cong A \times 2 \cong A$$

por n aplicações consecutivas da proposição anterior. ■

8.3 O espaço de Stone de álgebras produto

Vamos explorar como a dualidade de Stone se comporta com o produto de álgebras de Boole. Invertendo as setas no Teorema 8.6, encontramos uma propriedade universal da união disjunta de espaços topológicos, indicando sua presença nesta parte da teoria.

Proposição 8.11. *Para cada produto finito $A_1 \times \cdots \times A_n$ de álgebras de Boole, o espaço de Stone do produto delas é homeomorfo a união disjunta dos espaços de Stone de cada álgebra, isto é*

$$Ult(A_1 \times \cdots \times A_n) \cong UltA_1 \bigsqcup \cdots \bigsqcup UltA_n\,.$$

Demonstração: Seja U o produto disjunto de $\{\mathrm{Ult}A_i\}_{1 \leq i \leq n}$. Como $a \in U$ é aberto-fechado se e só se $a \cup \mathrm{Ult}A_i$ é aberto-fechado para cada i, temos que

$$\mathrm{Clop}U \cong \mathrm{ClopUlt}A_1 \times \cdots \times \mathrm{ClopUlt}A_n \cong A_1 \times \cdots \times A_n$$

onde o segundo isomorfismo segue da dualidade de Stone. Agora, a propriedade de ser booleano é preservado pela união disjunta finita, então U é um espaço booleando, logo novamente pela dualidade de Stone, $U \cong \mathrm{UltClop}U$. ■

No caso infinito, não há esperança desta solução funcionar, já que uma união disjunta infinita de espaços topológicos (não-vazios) nunca é compacta, porém a união disjunta ainda se faz presente na solução. Relembramos a definição da compactificação de espaços topológicos.

Definição 8.12. Seja X um espaço topológico. Uma compactificação de X é um par (γ, C), onde C é uma espaço topológico T_2 compacto e $\gamma : X \to C$ é uma função contínua injetora cuja imagem é densa em C.

Por abuso de notação e simplicidade, muitas vezes supomos que $X \subseteq C$ e que γ é a inclusão de X em C na definição acima. Recomendamos [Eng89] para uma demonstração de que um espaço topológico admite uma compactificação se e somente se ele é um espaço de Tychonoff.

Teorema 8.13 (Caracterização dos espaços duais de álgebras intermediárias)**.** *Seja $(A_i)_{i\in I}$ uma família de álgebras de Boole. Os espaços duais de álgebras intermediárias de $\prod\limits_{i\in I} A_i$ são exatamente as compactificações zero-dimensionais de $\bigsqcup\limits_{i\in I} \mathrm{Ult} A_i$.*

Demonstração: Vamos definir novamente para cada $i \in I$ o elemento $e^i \in \prod_{i\in I} A_i$ dado por

$$e^i_j = \begin{cases} 1 & \text{, se } i = j \\ 0 & \text{, se } i \neq j \end{cases}$$

Seja B uma álgebra intermediária de $\prod_{i\in I} A_i$ e seja $s = s_B$ o seu isomorfismo de Stone. Como no exemplo 7.20, temos que

$$\mathrm{Ult}B \restriction e^i \cong s(e^i) \cong \mathrm{Ult}A_i$$

e portanto existe para cada $i \in I$ um homeomorfismo $f_i : \mathrm{Ult}A_i \to s(e^i)$. Tomando

$$\gamma = \bigcup_{i\in I} f_i : \bigsqcup_{i\in I} \mathrm{Ult}A_i \to \mathrm{Ult}B$$

temos que $(\gamma, \mathrm{Ult}B)$ é uma compactificação zero-dimensional de $\bigsqcup_{i\in I} \mathrm{Ult}A_i$. De fato, γ está bem definida, pois $\{s(e^i) \mid i \in I\}$ é um conjunto de abertos dois a dois disjuntos e como $\sum^B_{i\in I} e^i = 1$, temos que $\bigsqcup_{i\in I} s(e^i)$, que é a imagem de γ, é densa em $\mathrm{Ult}B$.

Reciprocamente, seja X uma compactificação zero-dimensional de $\bigsqcup_{i\in I} \mathrm{Ult}A_i$. Para cada $i \in I$, seja $s_i = s_{A_i}$ seu isomorfismo de Stone. Defina

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathrm{Clop}X & \to & \prod_{i\in I} A_i \\ & a & \mapsto & (s_i^{-1}[a \cap \mathrm{Ult}A_i])_{i\in I} \end{array}$$

e vamos mostrar que ela é um isomorfismo da álgebra $\mathrm{Clop}X$ a uma álgebra intermediária de $\prod_{i\in I} A_i$. De fato, como cada $\mathrm{Ult}A_i$ é aberto e compacto em X, segue que eles são abertos-fechados e portanto f está bem definida e é claramente um homomorfismo. Para verificar que é um monomorfismo, basta notar que, pela densidade de $\bigsqcup_{i\in I} \mathrm{Ult}A_i$, todo aberto-fechado não-vazio de X intersecta algum $\mathrm{Ult}A_i$ e portanto $f(a) = 0$ se e só se a é vazio.

Para mostrar que $B = f[\mathrm{Clop}X]$ é uma álgebra intermediária, seja $x = (a_i)_{i\in I} \in \prod^{\mathrm{w}}_{i\in I} A_i$ tal que $a_i = 0$ exceto em um conjunto finito. Então $a = \bigcup_{i\in I} s_i(a_i)$ é um aberto-fechado de X e claramente $f(x) = a$, portanto $a \in B$. O análogo ocorre quando $a_i = 1$ exceto em um conjunto finito. ∎

Em particular, para os dois casos extremos, o produto fraco e o produto usual, temos caracterizações mais precisas dos seus espaços de Stone

Definição 8.14. Uma compactificação $(\alpha, \alpha X)$ de um espaço topológico X é dita de Alexandroff se $|\alpha X \setminus \alpha[X]| = 1$.

É possível provar que todas as compactificações de Alexandroff são homeomorfas e portanto a denotamos simplesmente por αX e sempre supomos que ela é a compactificação de um ponto descrita a seguir.

Construção 8.15 (Compactificação de um ponto)**.** Seja X um espaço topológico T_2 não-compacto no qual todo ponto admite uma vizinhança compacta. Defina $X^* = X \cup \{\infty\}$, onde ∞ é um ponto que não pertence a X. Defina uma topologia em X^* tomando a topologia de X e unindo todos os conjuntos da forma $\{\infty\} \cup (X \setminus C)$, onde C é um compacto de X.

Toda cobertura de $\{\infty\}$ vai falhar em cobrir apenas uma porção compacta do espaço X^*, X é claramente denso em X^* e $|X^* \setminus X| = 1$, portanto $X^* \cong \alpha X$.

Teorema 8.16. *Seja $(A_i)_{i\in I}$ uma família de álgebras de Boole. Se I é infinito e A_i é não trivial para todo $i \in I$, então o espaço dual do produto fraco da família é homeomorfo a compactificação de um ponto da união disjunta do espaço dual de cada álgebra, isto é*

$$Ult\Big(\prod_{i\in I}{}^{\mathrm{w}} A_i\Big) \cong \alpha\Big(\bigsqcup_{i\in I} Ult A_i\Big).$$

Demonstração: Ainda na linguagem da demonstração do Teorema 8.13, temos que $\bigsqcup_{i\in I} s(e^i)$ é um subespaço aberto denso de $\mathrm{Ult}(\prod^{\mathrm{w}}_{i\in I} A_i)$ homeomorfo a $\bigsqcup_{i\in I} A_i$. Seja

$$p^* = \Big\{ b \in \prod_{i\in I}{}^{\mathrm{w}} A_i \mid \{i \in I \mid b_i \neq 1\} \text{ é finito } \Big\}$$

e note que p^* é um ultrafiltro de $\mathrm{Ult}\prod^{\mathrm{w}}_{i\in I} A_i$ que não pertence a $\mathrm{Ult}\bigsqcup_{i\in I} s(e^i)$ por definição. Basta mostrar que $\mathrm{Ult}\prod^{\mathrm{w}}_{i\in I} A_i = (\mathrm{Ult}\bigsqcup_{i\in I} s(e^i)) \cup \{p^*\}$.

De fato, se p é um ultrafiltro de $\prod^{\mathrm{w}}_{i\in I} A_i$ diferente de p^*, então existe algum $J \subseteq I$ finito e $b \in p$ tal que $b \leq \sum_{j\in J} e^j$ e portanto $e^k \in p$ para algum $k \in J$ e logo $p \in s(e^k) \subseteq \mathrm{Ult}\bigsqcup_{i\in I} s(e^i)$. ∎

Definição 8.17. Uma compactificação $(\beta, \beta X)$ de um espaço topológico X é dita de *Stone-Čech* se tem a seguinte propriedade universal: Para todo homeomorfismo $f : X \to Y$, existe um único homeomorfismo $\beta f : \beta X \to Y$ tal que $\beta f \circ \beta = f$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "f"'] & \beta X \arrow[d, "\beta f"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

A compactificação de Stone-Čech é única, exceto por homeomorfismos e sempre existe para espaços de Tychonoff e recomendamos novamente [Eng89] para uma demonstração deste fato. Por isso, a denotamos simplesmente por βX.

Teorema 8.18. *Seja $(A_i)_{i\in I}$ uma família de álgebras de Boole. O espaço dual de sua álgebra produto é homeomorfo a compactificação de Stone-Cech da união disjunta do espaço dual de cada álgebra, isto é*

$$Ult\Big(\prod_{i\in I} A_i\Big) \cong \beta\Big(\bigsqcup_{i\in I} Ult A_i\Big).$$

Demonstração: Novamente, estamos na linguagem da demonstração do teorema 8.13 e temos que $\bigsqcup_{i\in I} s(e^i)$ é um subespaço aberto denso de $\mathrm{Ult}(\prod_{i\in I} A_i)$ homeomorfo a $\bigsqcup_{i\in I} A_i$, assim basta mostrar que a propriedade característica da compactificação de Stone-Čech.

Para simplificar as notações, sejam

$$X = \mathrm{Ult}(\prod_{i\in I} A_i) \;\text{ e }\; U = \bigsqcup_{i\in I} s(e^i).$$

Afirmação 1: Fechados disjuntos de U podem ser separados por um aberto-fechado de X.

De fato, pelo fato que cada $s(e^i)$ é booleano e pela proposição 5.35, dados a e b conjuntos fechados de U, escolha $c_i \in s(e^i)$ aberto-fechado que separa $a \cap s(e^i)$ e $b \cap s(e^i)$ para cada $i \in I$. Então tomando $x = (\rho_i(b_i))_{i\in I} \in \mathrm{Clop}X$, onde ρ_i é a projeção canônica na i-ésima coordenada, temos que ele separa a e b.

Afirmação 2: Para todo ponto $p \in X$ e $f : U \to Y$ função contínua de U a um espaço regular, o subconjunto

$$M_p = \bigcap\{\overline{f[c\cap U]} \mid c \text{ é uma vizinhança aberta-fechada de } p \text{ em } X\}\ ,$$

de Y contém exatamente um ponto.

Pela densidade de U em X, $\overline{f[c\cap U]}$ é um fechado não-vazio de Y para cada vizinhança c de p em X e portanto M_p não é vazio pela compacidade de Y. Suponha por absurdo que $y, y' \in M_p$ com $y \neq y'$ e escolha abertos u e u' de Y tais que $y \in u$, $y' \in u'$ e $\overline{u} \cap \overline{u'} = \emptyset$.

Pela primeira afirmação, existe c aberto-fechado de X tal que $f^{-1}[\overline{u}] \subseteq c$ e $f^{-1}[\overline{u'}] \subseteq X \setminus c$. Sem perda de generalidade, suponha que $p \in c$ e portanto $y' \in M_p \subseteq \overline{f[c \cap U]}$ e $y' \in u'$, então como u' é aberto, temos que $u' \cap f[c \cap U] \neq \emptyset$. Segue que $f^{-1}[u'] \cap (c \cap U) \neq \emptyset$, contradizendo que $f^{-1}[u'] \subseteq X \setminus c$.

Afirmação 3: (id_U, X) é uma compactificação de Stone-Čech de U.

Seja $f : U \to Y$ uma função contínua de U a um espaço T_2 compacto Y. Então, pela segunda afirmação, a função

$$\begin{array}{rccc} \beta f : & X & \to & Y \\ & p & \mapsto & \bigcup M_p \end{array}$$

está bem definida. Para verificar continuidade de βf, seja v uma vizinhança aberta de $\beta f(p)$ em Y, para algum $p \in X$ e então $M_p \subseteq v$. Por compacidade de Y, existe alguma vizinhança aberta-fechada c de p tal que $\overline{f[c \cap U]} \subseteq v$ e então βf mapeia c em v.

Por fim, βf de fato estende f, já que se $p \in U$, então $f(p) \in M_p$ e portanto, pela segunda afirmação, $\bigcup M_p = f(p)$. ■

Os resultados acima refletem o fato de que a compactificação de Stone-Čech e a compactificação de um ponto são o mínimo e o máximo na relação de ordem parcial usual entre compactificações de um espaço, e de fato o Teorema 8.13 estabelece um isomorfismo de ordem entre as álgebras intermediárias e as compactificações zero-dimensionais descritas nele.

Por fim, vamos considerar um caso específico e interessante do Teorema 8.13. Seja X um conjunto infinito qualquer com a topologia discreta. Temos que o produto fraco de $|X|$ álgebras de dois elementos é isomorfo a álgebra $\mathrm{FinCofin}X$. Logo pelo Teorema 8.18

$$\mathrm{UltFinCofin}X \cong \alpha X$$

e pelo isomorfismo $2^X \cong \wp(X)$, temos que

$$\mathrm{Ult}\wp(X) \cong \beta X$$

e portanto temos a seguinte caracterização alternativa do Teorema 5.58.

Teorema 8.19. *Uma álgebra de Boole A é isomorfa a uma álgebra de partes se e somente se $\mathrm{Ult}A$ é uma compactificação de Stone-Čech de uma topologia discreta.*

Capítulo IV

Classes especiais de Álgebras de Boole

Por fim, vamos aplicar a teoria desenvolvida até agora em dois casos interessantes que mostram um pouco a direção que este estudo leva. Como estes são casos são relativamente desconexos, indicaremos as principais referências na introdução de cada um deles.

9 Álgebras livres

O conceito de "estrutura livre" é recorrente na matemática. Se trata de identificar subconjuntos que tem a propriedade que toda função definida nele pode ser estendida unicamente a um morfismo. No contexto de álgebras de Boole, temos a seguinte definição.

Definição 9.1. Seja X um conjunto. Uma álgebra de Boole F é *livre sobre* X se existe uma função $e : X \longrightarrow F$ tal que o par (e, F) tem a seguinte propriedade universal: Para todo par (f, A), onde A é uma álgebra de Boole e $f : X \longrightarrow A$ é uma função, existe um único homomorfismo $g : F \longrightarrow A$ tal que $g \circ e = f$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "f"'] & F \arrow[d, dashed, "\exists! g"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Caso quisermos tornar a função e explícita, dizemos que (e, F) é *livre sobre* X. Dizemos que uma álgebra de Boole é simplesmente *livre* se existir algum conjunto X tal que ela é livre sobre X.

Exemplo 9.2. A álgebra de quatro elementos é livre sobre qualquer conjunto unitário.

De fato, sejam $X = \{x\}$, $F = \{0, a, -a, 1\} \cong 2^2$, $e : X \to \{a\}$ a única função possível, B uma álgebra de Boole qualquer e $f : X \to B$ uma função. Então $g : F \to A$ dada por $g(0) = 0$, $g(a) = f(x)$, $g(-a) = -f(x)$ e $g(1) = 1$ é um homomorfismo tal que $g \circ e = f$.

Para mostrar a unicidade de g, seja $g' : F \to A$ tal que $g' \circ e = f$, então g coincide com g' em $\{a\}$, um conjunto gerador de F, e portanto $g = g'$.

Note que poderíamos realizar um argumento análogo para mostrar que a álgebra de dois elementos é livre sobre o conjunto vazio.

A princípio, não sabemos se a definição 1.1 acima é justificada, isto é, se álgebras livres de fato existem para qualquer conjunto X. De fato, provaremos existência e unicidade delas, além de algumas observações e caracterizações úteis ao longo do caminho.

Nessa seção, as principais referências são [Kop89] e [Joh82].

9.1 Independência

Começamos simplificando a definição 9.1 acima com a seguinte observação que usaremos de forma rotineira.

Observação 9.3. Se (e, F) é livre sobre X, então e é injetora, e logo sempre podemos supor que $X \subseteq F$ e que $e : X \longrightarrow F$ é a identidade em F restrita à X.

De fato, se existir $x, y \in X$ distintos tais que $e(x) = e(y)$, podemos definir uma função $f : X \longrightarrow 2$ tal que $f(x) = 0$ e $f(y) = 1$. Como (e, F) é livre sobre X, existe um homomorfismo $g : F \longrightarrow 2$ tal que $g \circ e = f$, portanto

$$0 = f(x) = (g \circ e)(x) = g(e(x)) = g(e(y)) = (g \circ e)(y) = f(y) = 1$$

uma contradição.

Agora, vamos analisar uma condição suficiente para um subconjunto X de uma álgebra F ter a propriedade de extensão a homomorfismo descrita na definição 9.1, isto é,

$$\forall f : X \to A,\ \exists! g \in \mathrm{Hom}(F, A) : g \restriction_X = f\ .$$

Note que se um conjunto X com esta propriedade gera F, então pelo Teorema da Forma Normal[3.9], todo elemento de F pode ser escrito da forma $\sum_{i<n} \prod_{j<m} \varepsilon(x_{ij}) x_{ij}$ para algum subconjunto $X' = \{x_{ij} \mid i < n, j < m\}$ de X e $\varepsilon \in \{0,1\}^{X'}$ com $n, m < \omega$. Assim toda função $f : X \to A$ tem apenas um candidato a homomorfismo $g : F \to A$ que a estende: a função que associa

$$\sum_{i<n} \prod_{j<m} \varepsilon_{ij} x_{ij} \ \mapsto\ \sum_{i<n} \prod_{j<m} \varepsilon_{ij} f(x_{ij})\ ,$$

garantindo a unicidade de g.

Além disso, se X tem tal propriedade, então o Teorema da Extensão de Sikorski[3.28] garante, para toda função $f : X \to A$, $\{x_1, \dots, x_n\} \in [X]^{<\aleph_0}$ e $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\} \subseteq \{0, 1\}$, que vale

$$\varepsilon_1 x_1 \cdot \cdots \cdot \varepsilon_n x_n = 0_F \implies \varepsilon_1 f(x_1) \cdot \cdots \cdot \varepsilon_n f(x_n) = 0_A$$

e portanto essa é uma condição necessária. Uma forma de garantir que X a satisfaz é por vacuidade, isto é, impondo uma condição sobre X para que o lado esquerdo da implicação nunca ocorra. Estas observações motivam a seguinte definição e proposição.

Definição 9.4. Um subconjunto U de uma álgebra A é dito *independente* se todos os produtos elementares não triviais sobre U são não nulos, isto é,

$$\forall X \in [U]^{<\aleph_0}, \forall \epsilon \in \{-1, 1\}^X, \prod_{x \in X} \epsilon(x) x \neq 0 \,.$$

Se $U \subseteq A$ é independente, então dizemos que a subálgebra $\langle U \rangle$ de A é *gerada de forma independente por* U, ou *independentemente gerada por* U. A proposição a seguir justifica dizer que $\langle U \rangle$ é *gerada de forma livre por* U ou *livremente gerada por* U.

Proposição 9.5. *Sejam X um conjunto, F uma álgebra de Boole e $e : X \to F$ uma função. São equivalentes:*

(I) O par (e, F) é livre sobre X.

(II) F é independentemente gerada por $e[X]$.

Demonstração: Pela observação 9.3, vamos supor que $X \subseteq F$ e $e : X \longrightarrow F$ é a inclusão em F.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, bend right, "\chi_p \restriction X"'] & F \arrow[d, dashed, bend right, "\chi_p"'] \arrow[d, dashed, bend left, "\chi_{p'}"] \\ & 2 \end{tikzcd}$$

Se X gera uma subálgebra B própria de F, pelo lema 7.22, existem ultrafiltros distintos p e p' de F tais que $p \cap B = p' \cap B$. Sejam χ_p e $\chi_{p'}$ as funções características de p e p' respectivamente. Como ambas χ_p e $\chi_{p'}$ estendem $\chi_p \restriction X$, e como F é livre sobre X, temos que $\chi_p = \chi_{p'}$ e logo $p = p'$, um absurdo. Portanto $\langle X \rangle = F$.

Suponha que X não é independente, então existem $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in X$, com $n, m \in \omega$ tais que o produto elementar $x_1 \cdot \dots \cdot x_n \cdot -y_1 \cdot \dots \cdot -y_m$ é nulo. Seja $f : X \longrightarrow 2$ uma função que associa cada x_i ao 1 e cada y_j ao 0.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & F \arrow[d, dashed, "\nexists g"] \\ & 2 \end{tikzcd}$$

Segue que $f(x_1) \cdot \dots \cdot f(x_n) \cdot -f(y_1) \cdot \dots \cdot -f(y_m) = 1 \neq 0$, logo o critério de Sikorski garante que não existe $g : \langle X \rangle \longrightarrow 2$ que estende f, contradizendo que $\langle X \rangle = F$ é livre sobre X.

Reciprocamente, suponha que $X \subseteq F$ gera independentemente F e seja (f, A) um par, onde A é uma álgebra de Boole e $f : X \longrightarrow A$ uma função. Então vale a suposição do critério de Sikorski por vacuidade, já que para quaisquer $x_1, \dots, x_n \in X$, temos que $\epsilon_1 x_1 \cdot \dots \cdot \epsilon_n x_n \neq 0$ pela independência de X. Portando, existe $g : F \longrightarrow A$ que estende f, logo $g \circ \mathrm{id}\restriction_X = f$, o que mostra que $(\mathrm{id}\restriction_X, F)$ é livre sobre X. ■

Proposição 9.6 (Unicidade). *Sejam X e X' conjuntos de mesma cardinalidade. Se (e, F) é livre sobre X e (e', F') é livre sobre X', então $F \cong F'$. Mais precisamente, para toda bijeção $f : X \to X'$, existe um isomorfismo $\phi : F \to F'$ tal que $\phi \circ e = e' \circ f$.*

Demonstração: Como $|X| = |X'|$, fixe $f : X \to X'$ uma bijeção. Como (e, F) é livre sobre X e $e' \circ f$ é uma função de X a uma álgebra de Boole F', existe homomorfismo $g : F \longrightarrow F'$ tal que $g \circ e = e' \circ f$. Analogamente, existe $g' : F' \longrightarrow F$ tal que $g' \circ e' = e \circ f'$.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rrr, bend left, "g"] & X \arrow[l, "e"'] \arrow[r, shift left, "f"] & X' \arrow[l, shift left, "f^{-1}"] \arrow[r, "e'"] & F' \arrow[lll, bend left, "g'"] \end{tikzcd}$$

Então temos que

$$g' \circ g \circ e = g' \circ e' \circ f = e \circ f^{-1} \circ f = e \qquad g \circ g' \circ e' = g \circ e \circ f^{-1} = e' \circ f \circ f^{-1} = e'$$

logo

$$g' \circ g = \mathrm{id}_{e[X]} \qquad g \circ g' = \mathrm{id}_{e'[X']}$$

Como g e g' são homomorfismo, temos que $g \circ g'$ e $g' \circ g$ são homomorfismos que coincidem com a função identidade num conjunto gerador de F e F' respectivamente, portanto $g' \circ g = \mathrm{id}_F$ e $g \circ g' = \mathrm{id}_{F'}$, portanto $g' = g^{-1}$, g é um isomorfismo tal que $g \circ e = e' \circ f$ e $F \cong F'$. ■

Proposição 9.7 (Existência). *Seja I um conjunto. Existe uma álgebra de Boole livre sobre I.*

Demonstração: Dado um conjunto I, seja ${}^I 2$ o espaço de Cantor generalizado de peso $|I|$, isto é, seus elementos são da forma $x : I \longrightarrow 2$ com a topologia produto. Defina

$$\begin{array}{rccl} e: & I & \longrightarrow & \mathrm{Clop}\ {}^I 2 \\ & i & \longmapsto & \{x \in^I 2 \mid x(i) = 1\} \end{array}$$

e vamos mostrar que $(e, \mathrm{Clop}\ {}^I 2)$ é livre sobre I.

Claramente, e está bem definida. Vamos mostrar que $e[I]$ gera $\mathrm{Clop}\ {}^I 2$ independentemente. Dados $\{i_1, \ldots, i_n, j_1, \ldots, j_m\} \in I$, um elemento $x \in {}^I 2$ tal que $x(i_k) = 1$ e $x(j_k) = 0$ testemunha que

$$e(i_1) \cap \cdots \cap e(i_n) \cap ({}^I 2 \smallsetminus e(j_1)) \cap \cdots \cap ({}^I 2 \smallsetminus e(j_m)) \neq \emptyset$$

e portanto $e[I]$ é independente.

Pela compacidade de ${}^{I}2$, cada aberto-fechado de ${}^{I}2$ pode ser escrito como uma união finita de abertos básicos, e como a topologia de ${}^{I}2$ é a topologia produto, cada aberto básico pode ser escrito como

$$\{x : I \to 2 \mid x[J] = \{1\} \text{ e } x[K] = \{0\}\} = \bigcap e[J] \cap \bigcap ({}^{I}2 \setminus e[K]) \, ,$$

onde J e K são subconjuntos finitos de I. Assim, pelo Teorema da Forma Normal, $\mathrm{Clop}^{I}2 \subseteq \langle e[I] \rangle$ e portanto $e[I]$ independentemente gera $\mathrm{Clop}^{I}2$. ■

Concluímos então que quando quisermos tratar de uma álgebra livre sobre um conjunto X de cardinalidade κ, basta considerar a álgebra $\mathrm{Clop}^{\kappa}2$ e identificar cada elemento de X com um ordinal de κ. Isto deixa bem definida a seguinte definição.

Definição 9.8. Para cada cardinal κ, $\mathrm{Fr}\,\kappa$ é uma álgebra de Boole livre sobre κ.

Claramente, todo subconjunto independente de uma álgebra gera uma subálgebra livre, assim definimos um cardinal que mede este fenômeno.

Definição 9.9. Seja A uma álgebra de Boole. Definimos o cardinal

$$\mathrm{ind} A = \sup\{|U| \mid U \text{ é um subconjunto independente de } A\} \, ,$$

dito a *independência* de A.

9.2 Espaços de Stone de álgebras livres

Pela demonstração que realizamos da existência de álgebras livres, o espaço de Stone delas é trivialmente obtido pela dualidade de Stone.

Corolário 9.10. *O espaço de Stone de uma álgebra de Boole livre é homeomorfo à um espaço de Cantor generalizado. Mais precisamente, $\mathrm{Ult}\mathrm{Fr}\,\kappa \cong {}^{\kappa}2$.*

Demonstração: Seja (e, F) uma álgebra livre sobre um conjunto X, e seja $\kappa = |X|$. Pela demonstração da Proposição 9.7 e o isomorfismo dado pela Proposição 9.6, temos que

$$\mathrm{Ult} F \cong \mathrm{Ult}\mathrm{Fr}\,\kappa \cong \mathrm{Ult}\mathrm{Clop}^{\kappa}2 \cong {}^{\kappa}2 \, ,$$

onde o último homeomorfismo segue do Teorema de Stone. ■

Como os espaços ${}^{\kappa}2$ com $\kappa \geq \omega$ tem peso κ, temos que $\mathrm{Fr}\,\kappa$ tem cardinalidade κ. Poderíamos demonstrar isto algebricamente também: como $\mathrm{Fr}\,\kappa$ é gerada por κ elementos, o Teorema da

Forma Normal, mais especificamente o corolário 3.11 dele, garante que $|\mathrm{Fr}\,\kappa| = |\kappa| = \kappa$, já que $\mathrm{Fr}\,\kappa$ é gerado por $\kappa \geq \omega$ elementos. Note que isto mostra que

$$\mathrm{ind}A = \sup\{|\mathrm{Fr}\,\kappa| \mid \mathrm{Fr}\,\kappa \text{ pode ser incluído homomorficamente em } A\}$$

no caso em que A é uma álgebra infinita. No caso finito, temos os seguintes resultados.

Proposição 9.11. *Uma álgebra de Boole finita é livre se e somente se ela tem cardinalidade 2^{2^k} para algum k natural.*

Demonstração: Seja A uma álgebra de Boole finita e livre. Como A é finito, $\mathrm{Ult}A$ é discreto. Se A for livre, temos que $A \cong \mathrm{Fr}\,k$ e, pela finitude de A, k é finito. Temos que

$$|A| = |\mathrm{Fr}\,k| = |\mathrm{ClopUltFr}\,k| = |\mathrm{Clop}^k 2| = |\wp(^k 2)| = 2^{|^k 2|} = 2^{2^k}.$$

Agora, suponha que A tem cardinalidade finita 2^{2^k}, então A é gerada por 2^k átomos e portanto $\mathrm{Ult}A$ é a topologia discreta num conjunto de cardinalidade 2^k, logo isomorfa a $^k 2$ e portanto $A \cong \mathrm{Fr}\,k$. ■

Corolário 9.12. *Para toda álgebra de Boole A finita, $\mathrm{ind}A = \max\{n \in \omega \mid 2^{2^n} \leq |A|\}$.*

O Teorema de Representação de Stone mostra que toda álgebra de Boole pode ser considerada uma subálgebra de uma álgebra de partes. Vamos provar um resultado análogo para espaços booleanos, identificando eles como subespaços fechados de espaços generalizados de Cantor.

Corolário 9.13. *Toda álgebra de Boole A é a imagem homomórfica de uma álgebra de Boole livre. Mais precisamente, se $|A| \leq \kappa$, então A é a imagem homomórfica de $\mathrm{Fr}\,\kappa$.*

Demonstração: Seja κ um cardinal tal que $|A| \leq \kappa$ e fixe $f : \kappa \longrightarrow A$ uma sobrejeção. Como $\mathrm{Fr}\,\kappa$ é livre sobre κ, existe um homomorfismo $g : \mathrm{Fr}\,\kappa \longrightarrow A$. Como f é sobrejetora, segue que g é sobrejetora. ■

Corolário 9.14. *Todo espaço de Boole é homeomorfo a um subespaço fechado de um espaço de Cantor generalizado.*

Demonstração: Seja S um espaço de Boole. Pela Teorema de Stone, $S \cong \mathrm{UltClop}S$ e pelo Corolário 9.13, existe um epimorfismo $g : \mathrm{Fr}\,\kappa \longrightarrow \mathrm{Clop}S$ para algum cardinal κ. Pela Dualidade de Stone para homomorfismos, Teorema de Stone e o Corolário 9.10, segue que existe um mapa contínuo e injetor $f^d : S \longrightarrow {}^k 2$ dual à f como ilustrado abaixo.

$$\mathrm{Fr}\,\kappa \xrightarrow[\text{sobrejetora}]{g} \mathrm{Clop}S \qquad \overset{d}{\curvearrowright} \qquad {}^\kappa 2 \cong \mathrm{UltFr}\,\kappa \xleftarrow[\text{injetora}]{g^d} \mathrm{UltClop}S \cong S$$

Assim, incluímos S no espaço ${}^{\kappa}2$, como S é compacto e ${}^{\kappa}2$ é T_2, segue que S é um subespaço fechado de ${}^{\kappa}2$. ■

9.3 Propriedades algébricas e combinatórias

Agora, podemos transferir resultados entre álgebras livres e os espaços de Cantor generalizados. Na subseção 5.5, argumentamos que ${}^{\omega}2$ não tem pontos isolados, e logo $\mathrm{Clop}^{\omega}2 \cong \mathrm{Fr}\,\omega$ não tem átomos. Vamos generalizar este resultado.

Proposição 9.15. *Toda álgebra de Boole infinita e livre não tem átomos.*

Demonstração: Seja F uma álgebra gerada independentemente por $U \subseteq F$. Pelo Teorema da Forma Normal, todo $b > 0$ em F pode ser escrito como uma soma finita de produtos elementares disjuntos sobre U, como U é independente, não existem produtos elementares disjuntos sobre U, logo todo elemento de F^+ é da forma $b = u_1 \cdot \ldots \cdot u_n \cdot -v_1 \cdot \ldots \cdot -v_m$, onde $\{u_1, \ldots, u_n\}$ e $\{v_1, \ldots, v_m\}$ são subconjuntos finitos e disjuntos de U.

Como F é infinito e gerado por U, segue que U é infinito e é possível escolher um elemento $b > 0$ de $U \setminus \{u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m\}$. Como U é independente, temos que $0 < u \cdot b \leq b$. Se $b = u \cdot b$, então $b \leq u$ e o produto elementar $b \cdot -u$ é claramente 0, contradizendo a independência de U. Portanto $u \cdot b$ testemunha que b não é um átomo. ■

Corolário 9.16. *Todo espaço de Cantor generalizado não tem pontos isolados.*

Uma propriedade visualmente clara do conjunto de Cantor é que cada intervalo fechado maximal dele $[a, b]$ em qualquer passo $\mathcal{C}_n$ da construção vai ser isomorfo ao espaço todo no final dela. De fato, qualquer homeomorfismo de $[a, b]$ a $[0, 1]$ serve para demonstrar isso. Vamos mostrar um resultado mais geral para espaços generalizados de Cantor.

Definição 9.17. Uma álgebra de Boole é dita homogênea se, para todo $b \in B^+$, a álgebra relativa de B em relação a b é isomorfa a B, isto é $B \restriction b \cong B$.

Pela dualidade de álgebras relativas e subespaços fechados que descrevemos no Exemplo 7.20, temos imediatamente a seguinte tradução.

Proposição 9.18. *Uma álgebra de Boole B é homogênea se e só se todo aberto-fechado não vazio de $\mathrm{Ult}B$ é homeomorfo a $\mathrm{Ult}B$.*

Vamos começar identificando algumas condições necessárias para obter homogeneidade em uma álgebra. Imediatamente, temos que uma álgebra homogênea com pelo três elementos não possui átomos, já que se $a \in \mathrm{At}A$, então $A \restriction a \cong 2^1 \ncong A$. Quando A tem menos que três elementos, então $A \cong 2^0$ ou $A \cong 2^1$, que de fato são álgebras homogêneas. Essas observações demonstram a proposição a seguir.

Lema 9.19. *Se A é homogênea, então $|A| \leq 2$ ou $|A| \geq \aleph_0$.*

De fato, estes são exatamente as cardinalidades de álgebras homogêneas, já que para cada cardinalidade infinita κ, mostramos a seguir que existe uma álgebra de Boole homogênea de tamanho κ.

Proposição 9.20. *Toda álgebra de Boole livre e infinita é homogênea.*

Demonstração: Vamos provar a versão dual da proposição. Dado um espaço generalizado de Cantor ${}^{\kappa}2$, com κ infinito, cada elemento da base canônica é um aberto-fechado da forma

$$b_{I,J} = \{x : \kappa \to 2 \mid x[I] = \{1\} \text{ e } x[J] = \{0\}\} \,,$$

onde I e J são subconjuntos finitos de κ. Como κ é infinito, temos que $X = \kappa \smallsetminus I \cup J$ é infinito de cardinalidade κ e portanto

$$b_{I,J} \cong \prod_{i \in I}\{1\} \times \prod_{j \in J}\{0\} \times \prod_{k \in X} 2 \cong \prod_{k \in \kappa} 2 = {}^{\kappa}2 \,,$$

isto é, todo aberto básico de ${}^{\kappa}2$ é homeomorfo ao espaço todo. Considere o conjunto independente

$$U = \{u_i \mid i \in \kappa\} \,,$$

onde

$$u_i = \{x : \kappa \to 2 \mid x(i) = 1\} \,.$$

Pela demonstração da proposição 9.7, temos que U gera $\mathrm{Clop}^{\kappa}2$. Pelo Teorema da Forma Normal e a independência de U, todo aberto-fechado c de ${}^{\kappa}2$ pode ser escrito como a união finita da forma

$$c = b_1 \cup \cdots \cup b_n$$

onde $b_i = \epsilon_k u_k$ para algum $u_k \in U$ e $\epsilon_k \in \{-1, +1\}$. Como $X = u \cup (X \smallsetminus u)$ para qualquer $u \in U$ temos que X é homeomorfo a união disjunta $X \bigsqcup X$ e portanto

$$c \cong \underbrace{X \bigsqcup \cdots \bigsqcup X}_{n \text{ vezes}} \cong X$$

como queríamos mostrar. ∎

Corolário 9.21. *Para toda cardinalidade κ, se $\kappa \leq 2$ ou κ é infinito, então existe uma álgebra homogênea de cardinalidade κ.*

9.4 Condições de cadeias em álgebras livres

A presença de subconjuntos independentes "grandes" gera restrições combinatórias na álgebra de Boole. Como exemplo disto, mostraremos que toda álgebra de Boole livre não possui anti-cadeias não-enumeráveis.

Observação 9.22. Se U é um subconjunto independente de uma álgebra e A e $U_1, \ldots, U_n$ é uma quantidade finita de subconjuntos disjuntos de U, então para quaisquer $a_i \in \langle U_i \rangle$ e todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, temos que

$$a_1 \cdot \cdots \cdot a_n < 0.$$

De fato, para cada $i \in I$, escolha um produto elementar p_i sobre U_i tal que $0 < p_i \leq a_i$ e então $p_1 \cdot \cdots \cdot p_n \leq a_1 \cdot \cdots \cdot a_n$ e $p_1 \cdot \cdots \cdot p_n \neq 0$ pela independência de U.

Para o próximo teorema, enunciaremos um resultado clássico de teoria dos conjuntos.

Definição 9.23. Dada um conjunto A, dizemos que um subconjunto $B \subseteq A$ forma um Δ-*sistema* de A se existe um conjunto r tal que $a \cap b = r$ para quaisquer $a, b \in B$ distintos. Neste caso, dizemos que r é a *raiz* do Δ-sistema.

Teorema 9.24 (Lema do Δ-sistema). *Seja A uma coleção de conjuntos finitos de cardinalidade κ. Se κ é regular e não-enumerável, então existe $B \subseteq A$ de cardinalidade κ tal que B forma um Δ-sistema de A.*

Teorema 9.25. *Sejam κ um cardinal regular não enumerável, F uma álgebra de Boole livre e $X \subseteq F$. Se X tem cardinalidade κ, então X contém um subconjunto independente de tamanho κ.*

Demonstração: Como F é livre, fixe $U \subseteq F$ um subconjunto que gera F independentemente.

Para cada $x \in X$, seja $U_x \subseteq U$ tal que $x \in \langle U_x \rangle$, pelo Teorema da Forma Normal, U_x pode ser escolhido finito. Além disso, dado $x \in X$, como X é infinito, apenas uma quantidade finita de elementos de $X \setminus \{x\}$ pode ser gerada por U_x, logo podemos escolher um subconjunto $X' \subseteq X$ tal que $U_x \neq U_y$ para $x \neq y$ em X'.

Pela regularidade de κ e o Lema do Δ-sistema, X' tem um subconjunto X'' de cardinalidade κ tal que $\{U_x \mid x \in X''\}$ forma um Δ-sistema, seja V sua raiz. Sejam $W_x = U_x \setminus V$, para cada $x \in X''$.

Como V é finito, $\langle V\rangle$ ele é atômico, assim sejam $\{b_1, \ldots, b_n\}$ seus átomos. Como cada $x \in X''$ é gerado por $U_x = V \cup W_x \subseteq \langle V\rangle \cup W_x$. Segue que é possível escrever

$$x = a_{1x} \cdot b_1 + \cdots + a_{kx} \cdot b_k$$

Para cada $x \in X''$. considere os conjuntos

$$M_x = \{i \in \{1, \ldots, k\} \mid a_{ix} > 0\} \qquad N_x = \{i \in \{1, \ldots, k\} \mid -a_{ix} > 0\}$$

Como M_x, N_x são finitos e κ é infinito, a associação $x \mapsto (M_x, N_x)$ tem uma pré-imagem de tamanho κ para algum (M_x, N_x), isto é, existem conjuntos $Y \subseteq X''$ e $M, N \subseteq \wp(\{1, \ldots, k\})$ tais que $M_y = M$ e $N_y = N$ para todos $y \in Y$ e $|Y| = \kappa$. Vamos mostrar que Y é independente.

Sejam S e T subconjuntos finitos e disjuntos de Y e $i \in \{1, \ldots, k\}$. Considere que

$$p = \prod_{s\in S} s \cdot \prod_{t\in T} -t \geq \prod_{s\in S} a_{is} b_i \cdot \prod_{t\in T} -a_{it} b_i = b_i \cdot \prod_{s\in S} a_{is} \cdot \prod_{t\in T} -a_{it}$$

para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Mas então considerando a desigualdade acima para $i \in M \cap N$, pela observação anterior ao teorema segue que $p > 0$, pois $b_i \in \langle V\rangle$, $0 < a_{is} \in \langle W_s\rangle$, $0 < -a_{it} \in \langle W_t\rangle$ e os subconjuntos V, W_s e W_t do conjunto independente U são dois a dois disjuntos. ■

Corolário 9.26. *Toda álgebra de Boole livre satisfaz a condição de cadeia enumerável.*

Demonstração: Seja F uma álgebra de Boole livre e $\mathcal{A} = \{a_\alpha \mid \alpha < \beta\}$ um subconjunto de F indexado em um cardinal β. Se $\beta \leq \aleph_0$ não há o que provar, assim suponha que $\beta > \aleph_0$ e seja $\aleph_1 \leq \kappa < \beta$ cardinal regular.

Pelo Teorema 9.25, $\mathcal{A}' = \{a_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ tem um subconjunto independente de tamanho κ. Mas como elementos distintos de um conjunto independente não podem ser disjuntos, temos que $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ não é uma anti-cadeia. Portanto, F satisfaz a condição de cadeia enumerável. ■

10 Álgebras com a propriedade da separação enumerável

Até mesmo a condição de σ-completude impõe muito sobre uma álgebra, assim é natural procurar um enfraquecimento dela. Note que se uma álgebra for σ-completa, então dados dois conjuntos X e Y dela tais que $x \leq y$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$, os elementos $\sum X$ e $\prod Y$ "separam" X e Y no sentido que $x \leq \sum X \leq \prod Y \leq y$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$.

Assim, vamos enfraquecer σ-completude abstraindo exatamente a propriedade descrita acima e assim todos os resultados dessa seção envolvendo álgebras com tal propriedade também valem para álgebras σ-completas, κ-completas e completas. Começamos com uma definição que simplifica as discussões dessa seção.

Definição 10.1. Seja P uma ordem parcial. Dados dois subconjuntos X e Y de P, denotamos que

$$X \ll Y \iff \forall(x,y) \in X \times Y, x < y$$

e lemos simplesmente X menor que Y, ou se quisermos deixar claro que X e Y são subconjuntos, lemos X está a esquerda de Y (ou Y está a direita de X). Nesta situação, se houver $a \in P$ tal que $\forall x \in X$ e $\forall y \in Y$, vale $x \leq a \leq y$ dizemos que *a separa* X e Y.

Observe que na definição acima, $X \ll Y$ não implica que $X \cup Y$ está totalmente ordenado, já que os elementos de X podem ter diferentes relações entre eles, e analogamente em Y.

Definição 10.2. Uma álgebra A tem a propriedade da separação enumerável (PSE) se dados dois subconjuntos enumeráveis X e Y de A tais que $X \ll Y$, então existe $a \in A$ que separa X e Y. Essa propriedade é dita forte (PSEF) se a separação pode sempre ser tornada estrita, isto é, existe um elemento $a \in A$ tal que $X \ll \{a\} \ll Y$.

A princípio, não sabemos se a definição acima é justificada, isto é, se existe uma álgebra com a PSE que não tem nenhum nível de completude. Para isto, vamos estudar uma álgebra quociente de grande interesse literário pelas suas conexões com os ditos espaços de Paravičenko.

Nesta seção, as principais referências são [Kop89], [DM78], [Mil84] e [Eng89].

10.1 A álgebra $\wp(\omega)/\mathrm{fin}$

Considere a álgebra das partes do ordinal ω. Defina o subconjunto

$$fin := [\omega]^{<\omega}$$

de subconjuntos finitos de ω, claramente um ideal de $\wp(\omega)$, considere o quociente $\wp(\omega)/\mathrm{fin}$ e $\pi : \mathcal{P}(\omega) \to \wp(\omega)/\mathrm{fin}$ a projeção canônica. É imediato da definição de quociente as seguintes equivalências.

$$\begin{aligned}
\pi(a) = 0 &\Leftrightarrow a \text{ é finito} \\
\pi(a) = 1 &\Leftrightarrow \omega \setminus a \text{ é finito} \\
\pi(a) = \pi(b) &\Leftrightarrow a \cup b \setminus a \cap b \text{ é finito} \\
\pi(a) \leq \pi(b) &\Leftrightarrow a \setminus b \text{ é finito} \\
\pi(a) \cdot \pi(b) = 0 &\Leftrightarrow a \cap b \text{ é finito}
\end{aligned}$$

A equivalência de disjunção em $\wp(\omega)/\text{fin}$ em particular é muito interessante. Dizendo que dois subconjuntos de ω são *quase disjuntos* se a intersecção deles é finita, temos que dois elementos $\pi(a)$ e $\pi(b)$ de $\wp(\omega)/\text{fin}$ são disjuntos se e só se a e b são quase disjuntos em ω. O estudo de famílias quase disjuntas é muito rico e pode ser traduzido a álgebras de Boole através da descrição acima.

Vamos agora provar uma série de resultados sobre essa álgebra com o objetivo de comparar as propriedades da álgebra original com a álgebra quociente e eventualmente concluir que $\wp(\omega)/\text{fin}$ satisfaz PSE e não é completa.

Começando analisando a presença de átomos. Como qualquer álgebra de partes é atômica, em particular $\wp(\omega)$ é atômica, porém a próxima proposição mostra que quocientes não preservam nem atomicidade e nem átomos em geral.

Proposição 10.3. *$\wp(\omega)/fin$ não possui átomos*

Demonstração: Seja $\pi(a)$ um elemento de $\wp(\omega)/\text{fin}$. Se $\pi(a) > 0$, então a é infinito. Seja $a = \{a_n \mid n \in \omega\}$ uma enumeração de a e defina $b = \{a_{2n} \mid n \in \omega\}$. Como $b \subseteq a$ e ambos b e $a \setminus b$ são infinitos, temos que $0 < \pi(b) < \pi(a)$, o que mostra que $\pi(a)$ não é um átomo. ■

Lembre-se que $\wp(\omega)$ tem a propriedade que toda família disjunta tem cardinalidade no máximo $\aleph_0$. A próxima proposição mostra que essa propriedade também não precisa ser preservada por quocientes.

Proposição 10.4. *$c(\wp(\omega)/fin) = 2^{\aleph_0}$ é atingida.*

Demonstração: Será mais fácil construir uma família não enumerável quase disjunta em $\wp(\omega)$ e então o resultado segue pela observação de famílias disjuntas em $\wp(\omega)/\text{fin}$ feita no começo dessa subseção.

Para cada número real x, fixe uma sequência estritamente crescente $(r_{xn})_{n\in\omega}$ de números racionais tal que $r_{xn} \to x$ e defina $d_x = \{r_{xn} \mid n \in \omega\}$. Suponha que $x < y$ reais. Então, pela convergência de r_{y_n}, para $\varepsilon = \frac{|x-y|}{2}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$, então $|r_{y_n} - y| < \varepsilon$. Agora, como r_{xn} é estritamente crescente convergindo para x, o conjunto $\{n \in \omega \mid r_{xn} > x\}$ é vazio.

Assim, temos que

$$d_x \cap d_y \subseteq \{r_{y_n} \mid r_{y_n} < x\} \subseteq \{r_{y_n} \mid r_{y_n} < y - \varepsilon\} \subseteq \{r_{y_n} \mid n < n_0\}$$

que é finito. Como $\mathbb{Q}$ é enumerável, $\wp(\omega) \cong \wp(\mathbb{Q})$ e assim podemos considerar os elementos d_x em $\wp(\omega)$ através de um isomorfismo. Além disso, se $x \neq y$, como $d_x \cap d_y$ é finito, mas $d_x \cup d_y$ é infinito, temos que $d_x \Delta d_y$ é infinito, logo $\pi(d_x) \neq \pi(d_y)$ e $\{d_x \mid x \in \mathbb{R}\}$ é uma família quase disjunta como desejávamos. ■

Assim, concluímos que as famílias disjuntas de $\wp(\omega)/\text{fin}$ não precisam ser enumeráveis. O próximo resultado mostra que não apenas a celularidade é não enumerável, mas também que nenhuma família disjunta maximal pode ser enumerável.

Proposição 10.5. *Toda partição da unidade de $\wp(\omega)/\text{fin}$ é não-enumerável.*

Demonstração: Vamos mostrar que toda família enumerável quase disjunta de $\wp(\omega)$ não é maximal.

De fato, suponha que $D = \{A_n \mid n \in \omega\} \subseteq \wp(\omega)$ é quase disjunta. Como cada A_n é infinito e $A_n \cap A_k$ é finito se $k \neq n$, podemos escolher $x_n \in A_n \setminus \bigcup_{i \in n} A_i$ e seja $a = \{a_n \mid n \in \omega\}$. Claramente a é infinito e como $a \cap a_n \subseteq \{x_0, \cdots, x_n\}$, segue que $D \bigcup \{a\}$ é uma família quase disjunta que contém propriamente D. ■

O resultado anterior pode ser usado para provar que toda cadeia enumerável em $\wp(\omega)/\text{fin}$ que não atinge $\pi(\omega)$ é propriamente limitada superiormente, isto é, limitada por um elemento que não é o máximo. De fato, vale um resultado mais geral descrito na proposição a seguir.

Proposição 10.6. *Seja A uma álgebra de Boole. Se A é infinita, então são equivalentes:*

(I) Toda partição da unidade é não enumerável

(II) Toda cadeia enumerável em $A \setminus \{1\}$ é propriamente limitada superiormente.

Demonstração: Suponha que toda partição da unidade é não enumerável e seja C uma cadeia enumerável em $A \setminus \{1\}$. Claramente, se $C = \emptyset$ ou C tem elemento máximo, não há o que provar, assim suponha que $C = \{c_n \mid n \in \omega\}$ com $(c_n)_{n \in \omega}$ estritamente crescente. Definindo $d_n = c_{n+1} \cdot -c_n$, encontramos uma família disjunta enumerável $D = \{d_n \mid n \in \omega\}$ em A, logo pela hipótese, D não é uma partição da unidade e logo existe $b < 1$ que limita d_n, e logo cn, para cada $n \in \omega$.

Reciprocamente, suponha que toda cadeia em $A \setminus \{1\}$ é propriamente limitada e seja P uma família disjunta enumerável em A. Seja $\{p_n \mid n \in \omega\}$ uma enumeração de P e defina a sequência

$c_n = p_1 + \cdots + p_n$. Como os elementos de P são disjuntos, c_n é estritamente crescente e logo está contida em $A \setminus \{1\}$. Pela hipótese, existe $b < 1$ que limita $\{c_n \mid n \in \omega\}$, assim para cada $p_n \in P$, $-b \cdot p_n < -b \cdot c_n = 0$, logo $P \cup \{-b\}$ é uma família disjunta enumerável que contém P. ■

Claramente, dado uma álgebra A, se toda cadeia enumerável em $A \setminus \{1\}$ é propriamente limitada superiormente, então tomando o complemento de todos os elementos envolvidos, temos que toda cadeia enumerável em $A \setminus \{0\}$ é propriamente limitada inferiormente. Isto prova o seguinte lema simples.

Lema 10.7. *Seja A uma álgebra de Boole. São equivalentes:*

- *Toda cadeia enumerável em $A \setminus \{1\}$ é propriamente limitada superiormente.*
- *Toda cadeia enumerável em $A \setminus \{0\}$ é propriamente limitada inferiormente.*
- *Toda cadeia enumerável em $A \setminus \{0, 1\}$ é propriamente limitada.*

Corolário 10.8. *Toda cadeia enumerável em $\wp(\omega)/fin \setminus \{0, 1\}$ é propriamente limitada.*

Por fim, vamos analisar a completude de $\wp(\omega)/\text{fin}$. Assim como toda álgebra das partes, $\wp(\omega)$ é completa, porém $\wp(\omega)/\text{fin}$ falha em ser até mesmo σ-completa.

Proposição 10.9. *$\wp(\omega)/fin$ não é σ-completa.*

Demonstração: Como a celularidade $\wp(\omega)/\text{fin}$ é maior que $\aleph_0$, existe em $\wp(\omega)/\text{fin}$ uma família disjunta enumerável X. Se $\wp(\omega)/\text{fin}$ fosse σ-completa, então $X \bigcup \{-\sum X\}$ seria uma partição da unidade enumerável, contradizendo a Proposição 10.5. ■

Concluímos então que completude não precisa ser preservada por quociente. Por fim, vamos mostrar que $\wp(\omega)/\text{fin}$ possui a PSE com um resultado mais geral.

Lema 10.10. *Para toda álgebra de Boole A, são equivalentes:*

(i) A satisfaz a PSE.

(ii) Para quaisquer subconjuntos $X, Y \in [A]^{<\aleph_0}$ tais que $x \cdot y = 0$ para todos $x \in X$ e $y \in Y$, existe $a \in A$ que separa X e $-Y$.

(iii) Para quaisquer subconjuntos $X, Y \in [A]^{<\aleph_0}$ tais que $X \cup Y$ é uma família disjunta de A, existe $a \in A$ que separa X e $-Y$.

Demonstração: A equivalência de *(i)* e *(ii)* é quase imediata: Se $X \ll Y$, então X e $-Y$ estão nas condições propostas em *ii* e a recíproca segue da mesma forma.

Para uma equivalência entre *(i)* e *(iii)*, basta notar que, pelos mesmos argumentos dados na demonstração da Proposição 2.45, um elemento $a \in A$ separa conjuntos $\{x_n \mid n \in \omega\}$ e $\{y_n \mid n \in \omega\}$ se e somente ele separa os conjuntos $\{x_n \cdot -\sum_{i<n} x_i \mid n \in \omega\}$ e $\{y_n \cdot -\sum_{i<n} y_i \mid n \in \omega\}$, que também são enumeráveis. ∎

Na prática, usaremos as equivalências acima sem menção ao resultado e denominamos qualquer uma delas por PSE.

Proposição 10.11. *A propriedade da separação enumerável é herdada por imagens homomorfas.*

Demonstração: Seja $f : A \to B$ um epimorfismo. Note que se $\{b_n \mid n \in \omega\}$ é uma família disjunta em B, então escolhendo $c_n \in A$ tal que $f(c_n) = b_n$ e tomando $a_n = c_n \cdot -\sum_{i<n} c_i$, temos que $\{a_i \mid i \in \omega\}$ é uma família disjunta e

$$f(a_n) = f\big(c_n \cdot -\sum_{i<n} c_i\big) = b_n \cdot -\sum_{i<n} b_i = b_n$$

para cada $i \in \omega$, logo $f[\{a_i \mid i \in \omega\}] = \{b_n \mid n \in \omega\}$.

Assim, dados X e Y subconjuntos enumeráveis de B tais que $X \cup Y$ é uma família disjunta, escolha M e N famílias disjuntas em A tais que $f[M] = X$ e $f[N] = Y$. Agora, use a PSE de A para determinar $a \in A$ que separa M e $-N$ e então $f(a)$ separa X e $-Y$. ∎

Corolário 10.12. *$\wp(\omega)/fin$ possui a propriedade da separação enumerável.*

Observação 10.13. Sejam X e Y subconjuntos enumeráveis de uma álgebra de Boole A tais que $X \ll Y$. Sejam X' o conjunto de todas as somas finitas de elementos de X e Y' o conjunto de todos os produtos finitos de elementos de Y.

Se então existir $a \in A$ que separa X e Y, então a também separa X' e Y'. Além disso, como $X' \ll Y'$, temos que um elemento separa X e Y se e somente se ele separar $X' \cup X$ e $Y' \cup Y$. Como X' e Y' também são enumeráveis, quando trabalhamos com álgebras com a PSE, com o fim de determinar a que separa X e Y, pode-se assumir que $X' \subseteq X$ e $Y' \subseteq Y$.

Teorema 10.14. *Uma álgebra B tem a PSEF se somente se*

(I) B tem PSE;

(II) B não possui átomos;

(III) Toda cadeia enumerável em $B \setminus \{1\}$ é limitada.

Demonstração: Seja A uma álgebra de Boole com a PSEF, vamos mostrar que valem os três itens. O fato que PSEF implica PSE é trivial. Seja $a \in A^+$, como $\{0\} \ll \{a\}$, a PSEF garante existência de

$b \in A$ tal que $0 < b < a$, logo a não é um átomo. Seja $(a_n)_{n\in\omega}$ uma cadeia crescente enumerável em $A \setminus \{1\}$, como $\{a_n \mid n \in \omega\} \ll \{1\}$, a PSEF garante existência de $b \in A$ tal que $a_n < b < 1$ para todo $n \in \omega$.

Reciprocamente, sejam A uma álgebra de Boole que satisfaz os três itens acima e X e Y dois subconjuntos enumeráveis de A tais que $X \ll Y$, vamos mostrar que A tem a PSEF separando estritamente X e Y. Primeiro, aplicando o PSE, encontramos $a \in A$ tal que $x \leq a \leq y$ para todo $(x, y) \in X \times Y$. Se $a \notin X \cup Y$, não há o que provar, assim suponha o contrário. Note que como $X \ll Y$, temos que ou $a \in X \setminus Y$ ou $a \in Y \setminus X$, assim separamos o resto da demonstração nestes dois casos.

1º caso: $a \in X$ **e** $a \notin Y$.

Note que neste caso temos que $x \leq a < y$ para todo $(x, y) \in X \times Y$. Enumere $Y = \{y_n \mid n \in \omega\}$ e considere a sequência definida por

$$s_n = a + -y_0 - \cdots - y_n$$

para todo $n \in \omega$. Suponha que para algum $m \in \omega$, $s_m = 1$. Como cada $-y_n$ é disjunto de a, segue que $-y_1 - \cdots - y_m = -a$ e assim $y_1 \cdot \cdots \cdot y_m = a$. Pela Observação 10.13, podemos supor que $y_1 \cdot \cdots \cdot y_m \in Y$, contradizendo que $a \notin Y$.

Assim existe $b \in A \setminus \{1\}$ tal que b limita superiormente s_n e como A não tem átomos e $b \neq 1$, existe $c \in A$ tal que $0 < c < -b$. Vamos mostrar que $a + c$ separa estritamente X e Y.

Claramente $x < a + c$ para todo $x \in X$. Agora suponha por absurdo que existe $y \in Y$ tal que $a + c \not< y$, então $(a + c) \cdot -y \geq 0$, logo $a(-y) + c(-y) \geq 0$. Como $a \in X$ e $X \ll Y$, temos que $a(-y) = 0$, portanto $c(-y) \geq 0$. Pela escolha de c, ele é disjunto de $-y$ para todo $y \in Y$, assim $c(-y) > 0$ não ocorre e temos que $c(-y) = 0$. Mas então $c \leq -y$, portanto $a + c \leq a + -y = -y$, uma contradição.

2º caso: $a \in Y$ **e** $a \notin X$.

Este caso é feito de forma análoga. Note que nele temos que $x < a \leq y$ para todo $(x, y) \in X \times Y$. Enumere $X = \{x_n \mid n \in \omega\}$ e defina a sequência

$$t_n = -a + x_0 + \cdots + x_n \,.$$

Novamente, argumentamos que esta sequência não atinge o elemento 1, pois se $t_m = 1$ para algum $m \in \omega$, então $-a + x_0 + \cdots + x_m = 1$ implica que $x_0 + \cdots + x_m = a$, por disjunção de cada x_i de $-a$, pela Observação 10.13 implicando que $a \in X$, uma contradição.

Assim, existe $l \in A \setminus \{1\}$ que limita superiormente t_n e como A não tem átomos, existe $k \in A$ tal que $0 < k < l$. Vamos mostrar que $a \cdot -k$ separa estritamente X e Y.

Claramente $a \cdot -k < y$ para todo $y \in Y$. Suponha por absurdo que existe algum $x \in X$ tal que $x \not< a \cdot -k$. Então $x \cdot -(a \cdot -k) \geq 0$, logo $x \cdot (-a + k) \geq 0$ e daí $x \cdot -a + x \cdot k \geq 0$, e como $x \leq a$ temos que $x \cdot k \geq 0$. Pela escolha de k, $x \cdot k > 0$ não ocorre e portanto $x \cdot k = 0$. Então $x \leq -k$, logo $x = a \cdot x \leq a \cdot -k$, uma contradição. ■

Corolário 10.15. *$\wp(\omega)/fin$ possui a propriedade da separação enumerável forte.*

10.2 Espaços de Parovičenko

Vamos estudar os espaços de Stone de álgebras de Boole com a PSE e com a PSEF. Naturalmente, a propriedade de separação de subconjuntos em uma álgebra A se traduz a uma propriedade de separação de abertos. Lembramos a seguinte definição topológica.

Definição 10.16. Seja X um espaço topológico. Dizemos que um subconjunto de X é

- F_σ se ele é a união de uma quantidade enumerável de fechados de X.
- G_δ se ele é a intersecção de uma quantidade enumerável de abertos de X.

Proposição 10.17. *Dado uma álgebra de Boole A com espaço dual X, são equivalentes:*

(i) A possui a PSE.

(ii) Quaisquer dois abertos F_σ's de X disjuntos possuem fechos disjuntos.

Demonstração: Suponha que $A = \mathrm{Clop}X$ possui a PSE e sejam u e v abertos F_σ's disjuntos de X. Sejam $F = \{F_i\}_{i<\omega}$ e $G = \{G_i\}_{i\in\omega}$ coleções de fechados tais que $u = \bigcup F$ e $v = \bigcup G$.

Para cada $i \in \omega$, como F_i é um fechado contido no aberto u, pela Proposição 5.38, existe $a_i \in A$ tal que $F_i \subseteq s(a_i) \subseteq u$. Analogamente, para cada $i \in \omega$, seja $b_i \in A$ tal que $G_i \subseteq s(b_i) \subseteq v$. Como u e v são disjuntos, segue que $\{a_i \mid i \in \omega\} \ll -\{b_i \mid i \in \omega\}$ e portanto pela PSE de A, existe $c \in A$ que os separam. Como $s(c)$ é um fechado que contém u e $s(-c)$ é um fechado que contém v, segue que u e v possuem fechos disjuntos.

Reciprocamente, sejam X e Y subconjuntos enumeráveis de A tais que $X \ll -Y$. Então $u = \bigcup s[X]$ e $v = \bigcup s[Y]$ são abertos F_σ's disjuntos e portanto possuem fechos disjuntos. Assim, novamente pela Proposição 5.38, existe $c \in A$ tal que $\overline{u} \subseteq s(c) \subseteq X \smallsetminus \overline{v}$ e portanto c separa X e $-Y$, mostrando que A possui a PSE. ■

Para caracterizar topologicamente a PSEF, vamos caracterizar os outros itens do teorema 10.14. Falta de átomos já foi anteriormente caracterizada em 5.54, assim olhemos para o item restante.

Proposição 10.18. *Dado uma álgebra de Boole A com espaço dual X, são equivalentes:*

(i) Toda cadeia enumerável em $A \setminus \{0\}$ é propriamente limitada inferiormente.

(ii) Todo G_δ não-vazio de X possui interior não-vazio.

Demonstração: Suponha que toda cadeia enumerável em $A \setminus \{0\} = \mathrm{Clop}X \setminus \{\emptyset\}$ é propriamente limitada inferiormente e tome G um G_δ não vazio de X. Seja $U = \{U_i\}_{i\in\omega}$ uma coleção de abertos tais que $G = \bigcap U$.

Para cada $m \in \omega$, defina

$$V_m = \bigcup_{i<m} U_i$$

e note que, como G é não vazio, $V = \{V_i\}_{i\in\omega}$ é um coleção decrescente de abertos não-vazios tais que $G = \bigcap V$. Agora, como G é não vazio, fixe $p \in G$ e por zero-dimensionalidade, para cada $n \in \omega$ existe $a_n \in A^+$ tal que $s(a_n) \subseteq V_n$. Pela hipótese, existe $a \in A^+$ tal que $a \leq a_n$ para todo $n \in \omega$ e portanto $s(a)$ é um aberto não vazio contido em G, logo G tem interior não-vazio.

Reciprocamente, seja $C = \{c_n \mid n \in \omega\}$ uma cadeia enumerável em A^+. Como C possui a PIF, existe $p \in \mathrm{Ult}A$ que contém C, mostrando que $G = \bigcap s[C]$ é não-vazio e é claramente um G_δ. Por hipótese, G tem interior não-vazio e portanto por zero-dimensionalidade existe $c \in A^+$ tal que $s(c) \subseteq G \subseteq s(c_n)$ para todo $n \in \omega$ e portanto $0 < c < c_n$ para todo $n \in \omega$. ∎

Para tornar mais elegante a caracterização da PSEF, introduzimos a seguinte definição.

Definição 10.19. Dizemos que um espaço topológico X é de κ-Parovičenko se ele é booleano de peso κ e satisfaz

(a) Quaisquer dois conjuntos F_σ abertos em X possuem fechos disjuntos em X.

(b) X não possui pontos isolados.

(c) Qualquer G_δ não-vazio de X possui interior não vazio.

Omitimos o cardinal no caso $\kappa = 2^{\aleph_0}$, já que o futuro resultado 10.30 implica que este é o menor peso possível de tais espaços.

Teorema 10.20. *Dado uma álgebra de Boole A com espaço dual X, são equivalentes:*

- *A possui a PSEF e cardinalidade κ.*
- *X é um espaço de κ-Parovičenko.*

Como um primeiro exemplo de um espaço de Parovičenko, vamos calcular o espaço dual à álgebra $\wp(\omega)/\mathrm{fin}$. Temos que

$$\mathrm{Ult}(\wp(\omega)/\mathrm{fin}) \cong \mathrm{Ult}\wp(\omega) \setminus \bigcup s[\mathrm{fin}] = \beta\omega \setminus \omega.$$

10.3 Uma equivalência da hipótese do contínuo

Em 1963, Parovičenko mostrou de forma topológica que sob a hipótese do contínuo toda álgebra de Boole com a propriedade da separação enumerável forte e cardinalidade $\aleph_0$ é isomorfa a $\wp(\omega)/\mathrm{fin}$. Este resultado ficou conhecido como a *caracterização de Parovičenko* até que em 1978, Eric K. van Douwen e Jan van Mill demonstraram que ela equivale à hipótese do contínuo. Vamos mostrar esta equivalência.

Proposição 10.21. *Seja $f : A \to B$ um monomorfismo de álgebras de Boole. Se B tem a PSEF e $|A| \leq \aleph_0$, então f pode ser estendido a qualquer extensão simples de A.*

Demonstração: Seja $A(x)$ uma extensão simples de A. Defina os conjuntos

$$I = \{i \in A \mid i \leq x\} \qquad K = I + J$$
$$J = \{j \in A \mid j \leq -x\} \qquad U = A \setminus K$$

Queremos aplicar o Critério de Extensão de Sikorski, assim procuramos $y \in B$ tal que

$$f(i) \leq y \qquad f(j) \leq -y \qquad f(u) \nleq y \qquad f(u) \nleq -y$$

para todos $i \in I$, $j \in J$ e $u \in U$.

Como I e J são ideias, temos que K é um ideal. Fixe $u \in U$ e seja $k \in K$ qualquer. Suponha por absurdo que $u \cdot -k = 0$, então $u \leq k$ e como K é um ideal, teríamos que $u \in K$, uma contradição. Assim $u \cdot -k > 0$ e como f é homomorfismo, concluímos que $f(u) \cdot -f(k) > 0$, o que mostra que $\{0\} \ll \{f(u) \cdot -f(k) \mid k \in K\}$. Como $K \subseteq A$, $|K| \leq \aleph_0$ e a PSEF garantem a existência de um elemento $c_u \in B$ que separa os dois conjuntos. A princípio, $\{c_u \mid u \in U\}$ não precisa ser uma família disjunta, porém podemos tomar um refinamento disjunto dela usando o Teorema de Balcar-Vojtás.

De fato, vamos mostrar que temos as hipóteses do teorema. Seja $b \in B^+$, pelo teorema 10.14, b não é um átomo e logo $B \restriction b$ é infinita e portanto $c(B \restriction b) \geq \aleph_0$. Se ocorresse $c(B \restriction b) = \aleph_0$, poderíamos unir uma família disjunta maximal de $B \restriction b$ com $\{-b\}$ e obter uma família disjunta maximal em B, contradizendo a preposição 10.5, portanto $c(B \restriction b) \geq \aleph_1$. Além disso, $\aleph_0$ é um cardinal infinito e $\{c_u \mid u \in U\} \subseteq A$ tem cardinalidade no máximo $\aleph_0$, portanto existe um refinamento disjunto $(d_u)_{u \in U}$ de $(c_u)_{u \in U}$.

Por construção, $0 < c_u < f(u)$ e $c_u \cdot f(k) = 0$ para cada $u \in U$ e $k \in K$. Como $0 < d_u \leq c_u$ para cada $u \in U$, também vale que $0 < d_u < f(u)$ e $d_u \cdot f(k)$ para cada $u \in U$ e $k \in K$. Como B não tem átomos, podemos escrever cada d_u como a soma de dois elementos não nulos disjuntos, assim sejam x_u e y_u elementos de B^+ tais que $d_u = x_u + y_u$ e $x_u \cdot y_u = 0$. Definam os conjuntos

$$X = f[I] \bigcup \{x_u \mid u \in U\} \qquad\qquad Y = f[J] \bigcup \{y_u \mid u \in U\}$$

É imediato por construção que todo elemento de X é disjunto de cada elemento de Y e logo podemos aplicar o PSE para encontrar y tal que para todo $i \in I$ e $j \in J$, $f(i) \leq y$ e $f(j) \leq -y$, mas além disso $0 < x_u \leq y$ e $x_u < d_u \leq f(u)$ implicam que $f(u) \not\leq y$ e analogamente $f(u) \not\leq -y$. ■

Corolário 10.22. *Toda álgebra de Boole de cardinalidade no máximo $\aleph_1$ pode ser homomorficamente incluída em uma álgebra infinita que satisfaz a PSEF.*

Demonstração: Essa demonstração segue de uma construção transfinita de um homomorfismo injetor na cardinalidade de A. De fato, seja $\kappa = |A|$, enumere $A = \{a_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ escolhendo $a_0 = 0$ e construa, para cada $\alpha < \kappa$, A_α da seguinte forma: $A_0 = \{0, 1\}$ e $A_{\alpha+1} = A_\alpha(a_{\alpha+1})$. Como A_α é uma subálgebra gerada por uma quantidade enumerável de elementos para cada $\alpha < \kappa$, temos que A_α é enumerável.

Seja $f_0 : A_0 \to B$ o único homomorfismo possível. Pela proposição 10.21, existe $f_{\alpha+1} : A_{\alpha+1} \to B$ homomorfismo injetor que estende f_α, assim tome $f = \bigcup_{\alpha<\kappa} f_\alpha$. Como as funções f_α são compatíveis e claramente $\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha = A$, segue que f é um homomorfismo injetor e logo $f[A]$ é a subálgebra de B isomorfa a A que procurávamos. ■

Corolário 10.23. *Toda álgebra de Boole de cardinalidade no máximo $\aleph_1$ pode ser homomorficamente incluída em $\wp(\omega)/fin$.*

Corolário 10.24. *Todo espaço booleano de peso no máximo $\aleph_0$ é uma imagem contínua de $\beta\omega \setminus \omega$.*

Agora, vamos construir dois espaços de Parovičenko que serão utéis na demonstração da equivalência de CH. Lembramos a seguinte definição usual de topologia.

Definição 10.25. Dado um espaço topológico X. Definimos o cardinal

$$\chi(p, X) = \min\{|\mathcal{V}| \mid \mathcal{V} \text{ é um sistema fundamental de vizinhanças de } p\}$$

para todo ponto $p \in X$.

Construção 10.26. Um espaço de Parovičenko X^* no qual $\chi(p, X^*) \geq 2^{\aleph_0}$ para todo $p \in X^*$.

Seja $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ e tome $X = \omega \times {}^{\mathfrak{c}}2$ e $X^* = \beta X \setminus X$. Como X^* é dual à álgebra $\wp(\omega \times {}^{\mathfrak{c}}2)/\text{fin}$, temos que ele é de Parovičenko.

Note que todo aberto-fechado de X^* é da forma $u \cap X^*$ para algum aberto-fechado de βX. Pelo fato que X é denso em βX, cada aberto-fechado de βX é da forma $\overline{v}$ para algum aberto-fechado de X. Por fim, como X é localmente compacto e pela definição da topologia produto, cada aberto-fechado u de X é determinado por uma quantidade no máximo enumerável de coordenadas de $\mathfrak{c}$, isto é

$$u = \pi_I^{-1}[\pi[u]]$$

onde $\pi_I : \omega \times {}^{\mathfrak{c}}2 \to \omega \times {}^{I}2$ é a projeção.

Assim, fixe $x \in X^*$ qualquer e seja $\mathcal{V}_x$ um conjunto de menos que $2^{\aleph_0}$ vizinhanças abertas-fechadas de x. Para cada $V \in \mathcal{V}_x$, seja C_V o aberto-fechado de X tal que $x \in \overline{C_V}^{\beta X} \cap X^* \subseteq V$ e seja $I_V \subseteq \mathfrak{c}$ tal que $C_V = \pi_I^{-1}[\pi_I[C]]$.

Como cada I_V é no máximo enumerável e $\mathcal{V}$ tem cardinalidade menor que $\mathfrak{c}$, existe alguma coordenada $\alpha \in \mathfrak{c} \smallsetminus \bigcup_{V \in \mathcal{V}} I_V$ e então o aberto-fechado $K = \{(n, (p_\xi)_{\xi<\mathfrak{c}}) \in X \mid p_\alpha = x_\alpha\}$ é tal que $\overline{K} \cap X^*$ atesta que $\mathcal{V}$ não é um sistema fundamental de vizinhanças de x.

Construção 10.27. Um espaço de Parovičenko UltC no qual $\chi(p, \mathrm{Ult}C) = \aleph_1$ para algum $p \in \mathrm{Ult}C$.

Seja B uma álgebra de Boole que satisfaz a PSEF e de cardinalidade $\mathfrak{c}$, como por exemplo $\wp(\omega)/\mathrm{fin}$. Como toda cadeia enumerável em $B \smallsetminus \{0, 1\}$ é propriamente limitada, através de uma recursão transfinita de tamanho ω_1, obtemos uma sequência $(c_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ estritamente decrescente em B. Defina

$$C = \{c \in B \mid \exists \alpha < \omega_1 : (c_\alpha \leq c \text{ ou } c \cdot c_\alpha = 0)\},$$

claramente não vazia e fechada para soma e produto, portanto uma subálgebra de B. Para simplificar a discussão de C, vamos denominar que um elemento $c \in C$ é

- C-disjunto se existe algum $\alpha < \omega_1$ tal que $c \cdot c_\alpha = 0$;
- C-fechado se existe algum $\alpha < \omega_1$ tal que $c_\alpha \leq c$.

Afirmação 1: C satisfaz a PSE.

De fato, sejam X e Y conjuntos enumeráveis em C tais que $x \cdot y = 0$ para todo $(x, y) \in X \times Y$. Enumere $X = \{x_n \mid n \in \omega\}$ e $Y = \{y_n \mid n \in \omega\}$.

Se X e Y são conjuntos de elementos C-disjuntos, então para cada $x_n \in X$, seja $\alpha_n < \omega_1$ tal que $x_n \cdot c_{\alpha_n} = 0$. Como a cofinalidade de $\aleph_1$ é não-enumerável, existe $\gamma_X < \omega_1$ tal que $x_n \cdot c_{\gamma_X} = 0$ para todo $n \in \omega$. Analogamente, podemos encontrar $\gamma_Y < \omega_1$ tal que $y_n \cdot c_{\gamma_Y}$ para todo $n \in \omega$. Seja $\gamma = \max\{\gamma_X, \gamma_Y\}$.

Note que cada elemento de $X \cup \{c_\gamma\}$ é disjunto de Y, assim podemos usar a PSE de B para determinar $a \in B$ tal que $x \leq a$ e $y \leq -a$ para todo $(x, y) \in X \times Y$ e $c_\gamma \leq a$. Claramente a é um elemento C-fechado e portanto $a \in C$.

Agora, note que se X contém um elemento C-fechado, então Y contém apenas elementos C-disjuntos, pois caso contrário existem $x \in X$, $y \in Y$ e $\alpha < \beta < \omega_1$ tais que $c_\alpha \leq x$ e $c_\beta \leq y$ e portanto $0 \neq c_\beta \leq x \cdot y$.

Assim, basta considerar o caso em que X é um conjunto de elementos C-disjuntos e Y um conjunto de elementos C-fechados. Porém, neste caso basta separar X e Y pela PSEF de B e então o elemento que separa os conjunto é C-disjunto ou C-fechado e portanto pertence a C.

Afirmação 2: C não tem átomos.

Se um elemento $c \in C$ é não-nulo e C-disjunto, então como B não tem átomos, seja $a \in B$ tal que $0 < a < c$. Claramente a também é C-disjunto, portanto $a \in C$ e c não é um átomo.

Se um elemento $c \in C$ é não-nulo e C-fechado, seja $\alpha < \omega_1$ tal que $c_\alpha \leq c$. Então $0 < c_{\alpha+1} < c$ e portanto c não é um átomo.

Afirmação 3: Toda cadeia em $C \setminus \{0\}$ é propriamente limitada.

Pelos mesmos argumentos apresentados na demonstração da primeira afirmação, toda sequência decrescente $(x_n)_{n\in\omega}$ em $C \setminus \{0\}$ é constituída exclusivamente de elementos C-disjuntos ou exclusivamente de elementos C-fechados. No primeiro caso, basta usar que as sequências estritamente descrentes em $B \setminus \{0\}$ são propriamente limitadas e tal limitante não-nulo também é C-disjunto. No segundo caso, assim como na demonstração da primeira afirmação, por um argumento de cofinalidade, seja $\gamma < \omega_1$ tal que $c_\gamma < x_n$ para todo $n \in \omega$.

Afirmação 4: Existe um ponto p de UltC tal que $\chi(p, C) = \aleph_1$.

O subconjunto $\{c_n \mid n \in \omega_1\}$ tem a propriedade da intersecção finita em C, assim existe um ultrafiltro $p \in$ UltC tal que $c_n \in p$ para todo $n \in \omega$ e portanto $p \in \bigcap_{n\in\omega} s(c_n)$. Dado um aberto básico $s(a)$ de UltC tal que $p \in s(a)$, temos claramente que a é um elemento C-fechado e portanto existe $\alpha < \omega_1$ tal que $0 < c_\alpha < a$. Então $\emptyset \neq s(c_\alpha) \subseteq s(a)$, assim $\{s(c_n) \mid n \in \omega_1\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de cardinalidade $\aleph_1$.

Para mostrar que $\chi(p, C) = \aleph_1$, seja $\{s(k_n) \mid n \in \omega\}$ um conjunto de vizinhanças de p. Claramente $\{k_n \mid n \in \omega\}$ é um conjunto de elementos C-fechados e novamente, pela cofinalidade de $\aleph_1$, existe $\gamma < \omega_1$ tal que $c_\gamma \leq k_n$ para todo $n \in \omega$ e portanto $c_{\gamma+1}$ testemunha que $\{s(k_n) \mid n \in \omega\}$ não é um sistema fundamental de vizinhanças.

Finalmente, estamos prontos para o resultado principal desta seção.

Teorema 10.28. *A caracterização de Parovičenko equivale a hipótese do contínuo.*

Demonstração: Suponha que CH vale e seja B uma álgebra de Boole com a PSEF e cardinalidade $\aleph_1$. Pelo Corolário 10.23 podemos considerar B como uma subálgebra de $\mathcal{P}(\omega)/fin$. Por outro lado, temos que $|\mathcal{P}(\omega)/fin| \leq |\mathcal{P}(\omega)| = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$ e $\mathrm{c}(\mathcal{P}(\omega)/fin) = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$ é alcançada, logo

$\aleph_1 \leq |\mathcal{P}(\omega)/fin|$, portanto novamente podemos considerar $\mathcal{P}(\omega)/fin$ uma subálgebra de B e temos que $\mathcal{P}(\omega)/fin \cong B$.

Reciprocamente, suponha que a hipótese do contínuo falha e sejam T e S os espaços de Parovičenko construídos em 10.26 e 10.27 respectivamente. Como $\chi(p, T) \geq 2^{\aleph_0}$ para todo $p \in T$, mas $\chi(p, S) \geq 2^{\aleph_0}$ para algum $p \in S$ e $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$, temos que T e S não são homeomorfos e portanto Clop$T$ e Clop$S$ não são isomorfos, logo não vale a caracterização de Parovičenko. ■

10.4 Cardinalidade de álgebras com a PSE

Por fim, vamos provar uma propriedade das possíveis cardinalidades dos espaços com a PSE. Começamos enfraquecendo o teorema 8.7 e então provamos o resultado principal.

Lema 10.29. *Seja A uma álgebra de Boole e $\{a_n \mid n \in \omega\}$ uma família disjunta em A. Se A tem a propriedade da separação enumerável, então $|\prod_{n\in\omega} A \upharpoonright a_n| \leq |A|$.*

Demonstração: Seja $f : A \to \prod_{n\in\omega} A \upharpoonright a_n$ dada por $f(x) = (x \cdot a_n)_{n\in\omega}$ como no teorema 8.7. Seja $(x_n)_{n\in\omega} \in \prod_{n\in\omega} A \upharpoonright a_n$ e defina $y_n = a_n \cdot -x_n$ para cada $n \in \omega$. Note que $-y_n = x_n + -a_n$ e como $\{x_n \mid n \in \omega\} \ll \{x_n + -a_n\}$, pela PSE de A existe $x \in A$ tal que $x_n \leq x \leq x_n + -a_n$ e portanto $f(x) = (x_n)_{n\in\omega}$. ■

Corolário 10.30. *Toda álgebra infinita com a PSE tem cardinalidade mínima $2^{\aleph_0}$.*

Teorema 10.31 (Sabine Koppelberg). *Se A é uma álgebra de Boole infinita com a propriedade da separação enumerável, então $|A|^{\aleph_0} = |A|$.*

Demonstração: Suponha com o objetivo de encontrar uma contradição que existem álgebras infinitas com a PSE que não satisfaçam a igualdade de cardinais descrita no teorema. Então, podemos definir o cardinal

$$\kappa = \min\{|B| \mid B \text{ é uma álgebra de Boole com a PSE tal que } |B|^{\aleph_0} = |B|\}$$

e logo existe uma álgebra A com a PSE tal que $\kappa = |A|$ e $\kappa < \kappa^{\aleph_0}$ com a propriedade que toda álgebra B de cardinalidade menor que κ que tem a PSE satisfaz $|B|^{\aleph_0} = |B|$.

Vamos dizer durante esta demonstração que um ideal I de uma álgebra A é σ-limitado se toda subconjunto enumerável de I tem um limitante superior em I.

Afirmação 1: Se J é um ideal σ-limitado e, para cada $a \in J$ tal que $A \upharpoonright a$ é infinito, $|A \upharpoonright a|^{\aleph_0} = |A \upharpoonright a|$, então $|J| < \kappa$.

De fato, caso $|J| = \kappa$, então $\kappa^{\aleph_0} = |{}^{\omega}J|$ e como cada sequência enumerável em J é limitada superiormente em J, segue que

$$\kappa^{\aleph_0} = |{}^{\omega}J| = |\bigcup_{a\in J} {}^{\omega}(A \upharpoonright a)| \leq |J| \cdot 2^{\aleph_0} = \kappa$$

contradizendo a definição de κ como contra-exemplo minimal.

Para o resto da demonstração, seja I o ideal próprio definido por

$$I = \{a \in A \mid |A \upharpoonright a| < \kappa\} .$$

Como cada álgebra relativa de A possui a PSE, por ser uma imagem homomorfa de A, e A é o contra-exemplo minimal temos que

$$\text{Se } a \in I \text{ e } A \upharpoonright a \text{ é infinito, então } |A \upharpoonright a|^{\aleph_0} = |A \upharpoonright a|. \tag{IV.1}$$

Afirmação 2: A/I é uma álgebra finita.

De fato, suponha por absurdo que A/I seja infinito e fixe $\{q_n \mid n \in \omega\}$ uma família disjunta infinita em A/I. Escolha $a_n \in A$ tal que $\pi(a_n) = q_n$ para cada $n \in \omega$, onde $\pi : A \to A/I$ é o epimorfismo canônico. Então definindo $b_n = a_n \cdot -\sum_{m<n} a_m$, temos que b_n é uma família disjunta em A e $\pi(b_n) = q_n > 0$, logo $b_n > 0$ para todo $n \in \omega$. Então $b_n \notin I$ e

$$\kappa^{\aleph_0} = |\prod_{n\in\omega} A \upharpoonright b_n| \leq \kappa$$

contradizendo a definição de κ.

Podemos supor sem perda de generalidade que I é um ideal maximal, pois caso contrário basta substituir A por $A \upharpoonright a$ na demonstração, onde $a \in A$ é tal que $\pi(a)$ é um átomo de A/I. Como A/I é finito, temos também que $|I| = \kappa$. Por IV.1 e a primeira afirmação , temos que I não é um ideal σ-limitado, assim é possível fixar um conjunto $\{b_n \mid n \in \omega\} \subseteq I$ sem limitante superior em I.

Trocando b_n por $b_n \cdot -\sum_{m<n} b_m$ se necessário, podemos supor que $\{b_n \mid n \in \omega\} \subseteq I$ é uma família disjunta ainda sem limitante superior em I pelo teorema 2.45.

Afirmação 3: $|\prod_{n\in\omega} A \upharpoonright b_n| < \kappa$.

Caso contrário, pelo lema anterior temos que $|\prod_{n\in\omega} A \upharpoonright b_n| = \kappa$ e então $|\prod_{n\in\omega} A \upharpoonright b_n|^{\aleph_0} = \kappa^{\aleph_0}$. Seja $F = \{n \in \omega \mid A \upharpoonright b_n \text{ é finita}\}$ e $K = \omega \setminus F$ então

$$\begin{aligned}\kappa^{\aleph_0} &= |\prod_{n\in\omega} A \upharpoonright b_n|^{\aleph_0} \\ &= |\prod_{n\in F} A \upharpoonright b_n|^{\aleph_0} \cdot |\prod_{n\in K} A \upharpoonright b_n|^{\aleph_0} \\ &\leq 2^{\aleph_0} \cdot |\prod_{n\in K} A \upharpoonright b_n| \leq \kappa\end{aligned}$$

contradizendo a definição de κ.

Por fim, defina

$$K = \{x \in A \mid x \cdot b_n = 0 \text{ para todo } n \in \omega\} ,$$

claramente um ideal de A. Seja $g : A \to \prod_{n\in\omega} A \upharpoonright b_n$ dada por $g(x) = (x \cdot b_n)_{n\in\omega}$, que tem núcleo K. Pelo teorema do homomorfismo A/K é isomorfa a imagem de g, ou seja uma subálgebra de $\prod_{n\in\omega} A \upharpoonright b_n$. Assim, pela afirmação 3, segue que $|A/K| < \kappa$ e portanto $|K| = \kappa$.

Agora, se $x \in K$, então $-x$ é um limitante superior de $\{b_n \mid n \in \omega\}$ e então $-x \notin I$. Como I é um ideal maximal, segue que $x \in I$ e portanto $K \subseteq I$.

Finalmente, pela definição de K ele é um ideal σ-limitado pela PSE de A e como $K \subseteq I$, pela primeira afirmação, temos que $|K| < \kappa$, uma contradição. ■

Referências Bibliográficas

Livros

[BS81] Stanley Burris e H. P. Sankappanavar. *A Course in Universal Algebra*, Springer New York, 1981.

[Joh82] Peter Tennant Johnstone. *Stone spaces*, Press Syndicate of the University of Cambridge, 1982.

[Mil84] Jan van Mill. *An introduction to $\beta\omega$*, ed. por Kenneth Kunen e Jerry E. Vaughan. Handbook of Set-theoretic Topology. Elsevier Science Publishers B.V., 1984. Cap. 11.

[Eng89] Ryszard Engelking. *General Topology*, ed. por B. Banaschewski, H. Herrlich e H. Husek. 1989.

[Kop89] Sabine Koppelberg. *Handbook of Boolean Algebras, Volume 1*, ed. por J. Donald Monk e Robert Bonnet. Elsevier Science Publishers B.V., 1989.

Teses e Dissertações

[Bre04] Christina Brech. *Aspectos combinatórios da geometria de espaços de Banach $C(K)$ com a propriedade de Grothendieck*, Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo, 2004.

Artigos

[Hun33] Edward Huntington. *New sets of independent postulates for the algebra of logic, with special reference to Whitehead and Russel's Principia Mathematica*, American Mathematical Society, **35** (1933), 274–304.

[DM78] Eric K. van Douwen e Jan van Mill. *Parovicenko's Characterization of $\beta\omega \setminus \omega$ implies CH*, Proceedings of the American Mathematical Society, **72** (1978), 539–541.

[McC+02] William McCune, Robert Veroff, Branden Fitelson, Kenneth Harris, Andrew Feist e Larry Wos. *Short Single Axioms for Boolean Algebra*, Journal of Automated Reasoning, **29** (2002), 1–16.

[BH20] Nick Bezhanishvili e Wesley H. Holliday. *Choice-Free Stone Duality*, Association for Symbolic Logic, (2020).

Índice Remissivo