

FELIPE ADELINO HONÓRIO

ESTUDO SOBRE MÉTODOS DE PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES SOBRE
TAXAS DE JUROS A TERMO NO MERCADO DE DERIVATIVOS
BRASILEIRO E A ADMINISTRAÇÃO DE SEUS RISCOS

Trabalho de Formatura apresentado à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo para
obtenção do Diploma de Engenheiro de
Produção

São Paulo
(2016)

FELIPE ADELINO HONÓRIO

ESTUDO SOBRE MÉTODOS DE PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES SOBRE
TAXAS DE JUROS A TERMO NO MERCADO DE DERIVATIVOS
BRASILEIRO E A ADMINISTRAÇÃO DE SEUS RISCOS

Trabalho de Formatura apresentado à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo para
obtenção do Diploma de Engenheiro de
Produção

Orientador: Prof. Doutor Antonio Rafael
Namur Muscat

São Paulo
(2016)

Catálogo-na-publicação

Honório, Felipe Adelino

Estudo sobre Métodos de Precificação de Opções Sobre Taxa de Juros a Termo no Mercado de Derivativos Brasileiro e a Administração de seus Riscos / F. A. Honório -- São Paulo, 2016.

191 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Produção.

1.Engenharia econômica 2.Engenharia financeira 3.Teoria financeira 4.Matemática financeira 5.Método de Monte Carlo I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Produção II.t.

Dedico este trabalho à minha família,
cujos sacrifícios me trouxeram até aqui.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, aos meus pais, Regina e Américo, por terem me apoiado durante toda minha vida acadêmica, especialmente neste período de faculdade. Sem o sacrifício, dedicação e amor de ambos, jamais teria concluído este curso.

À minha avó, Ede, cujo amor incondicional pelos netos e dedicação a torna tão importante como qualquer um dos meus pais. Minha segunda mãe.

Ao meu irmão, Rodrigo, por estar sempre presente, me aconselhando e ajudando no que precisei, dividindo a responsabilidade necessária para cuidar do futuro desta família.

Aos professores da Universidade de São Paulo, com destaque aos da Escola Politécnica e do Departamento de Engenharia de Produção, por terem conduzido minha formação acadêmica. Um agradecimento especial ao Prof. Dr. Antonio Muscat, por ter me orientado, cobrado quando necessário e acompanhado durante a elaboração deste trabalho.

Aos meus colegas de trabalho, que sempre mostraram dedicação em ajudar e fornecer conselhos quanto ao assunto aqui tratado, em especial ao meu gestor, Arthur, por ter sugerido o tema escolhido e ter me fornecido toda a base de conhecimento sobre derivativos.

RESUMO

Este trabalho buscou estudar métodos de precificação para opções sobre juros a termo no mercado de derivativos brasileiro, assim como a eficiência na administração de seus riscos (hedge). Sendo T_0 uma data inicial, T_1 uma data intermediária e T_2 uma data final, a opção estudada se inicia em T_0 , vence em T_2 e negocia os juros a termo entre T_1 e T_2 . Esta opção não é negociada amplamente no mercado e, portanto, seu preço não é facilmente obtido. Com o objetivo de se obter o preço mais justo, ou volatilidade implícita, segundo condições de mercado, utilizaram-se preços de opções sobre IDI e Swaptions como referência. Relações matemáticas e teóricas foram definidas entre estas opções e cinco métodos analíticos, com fórmulas fechadas, foram desenvolvidos para precificar as opções estudadas. Como sexto método, utilizado como referência de preço justo para os demais, utilizou-se a simulação de Monte Carlo Correlacionada para fatores de juros longos e curtos cujos comportamentos foram obtidos através de precificação de opções sobre IDI. Os métodos foram simulados para três períodos distintos, de forma que as opções eram precificadas dia a dia, para diferentes níveis de Strike e os seus Delta hedges realizados. Concluiu-se, então, que o método analítico que devolve volatilidade implícita mais próxima da de Monte Carlo é o que aproxima a variância de X/Y por expansão do teorema de Taylor, onde X é o fator de juros longo, cuja volatilidade pode ser obtida por uma opção sobre IDI longa, e Y é o fator de juros curto, cuja volatilidade pode ser obtida por uma opção sobre IDI curta. Além disto, este método também se mostrou mais eficiente quando o objetivo é obter resultado financeiro final zero, assumindo uma posição com Delta hedge atualizada diariamente.

Palavras-Chave: Engenharia financeira. Derivativos. Opções. Juros a termo. IDI. Swaption. Brasil.

ABSTRACT

This paper aimed to study methods to price forward interest rate structure options in the Brazilian derivatives market, and also the efficiency in the hedging process. Being T_0 an initial date, T_1 an intermediate date and T_2 a final date, the studied option initiates on T_0 , expires on T_2 and trades the forward yield structure between T_1 and T_2 . This option isn't broadly traded in the market and, therefore, its price isn't easily obtained. With the objective of obtaining the fairest price, or implied volatility, according to market conditions, IDI's options and Swaptions prices were used as reference. Mathematical and theoretical relationships were defined between these options and five analytical methods, with closed formulas, were developed to price the studied options. As a sixth method, used as reference of fair price to the other methods, Correlated Monte Carlo simulation to long and short term yield rates, whose behavior were obtained through existing pricing of IDI options, were used. The methods were simulated to three different periods, so that the options were priced day after day, to different levels of Strike and their Delta hedges conducted. It was concluded, then, that the analytical method that returns the closest implied volatility to that of Monte Carlo is the one that approaches the variance of X/Y by Taylor expansion, where X is the long term yield rate, which volatility can be obtained from a long term IDI option, and Y is the short term yield rate, which volatility can be obtained from a short term IDI option. Besides, this method also was shown to be the most efficient when the objective is to achieve zero final financial result, by building a Delta hedged position updated daily.

Keywords: Financial engineering. Derivatives. Options. Forward interest rate term structure. IDI. Swaption. Brazil.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Grupo J&F Investimentos	24
Figura 2 - Linha do Tempo do Banco Original	25
Figura 3 - Dados do Conglomerado Financeiro Original de Junho de 2016.....	26
Figura 4 - Resultado de contrato a termo em relação a S_t : (a) ponta comprada; (b) ponta vendida	30
Figura 5 - Payoff de contrato futuro em relação a F_1 : (a) ponta comprada; (b) ponta vendida	32
Figura 6 - Payoff de opções: (a) comprado call; (b) vendido call; (c) comprado put; (d) vendido put	35
Figura 7 - Fluxo de caixa em um Swap	37
Figura 8 - Comportamento de uma Opção sobre IDI	48
Figura 9 - Comportamento de uma Swaption.....	48
Figura 10 - Comportamento de uma Opção sobre Juros a Termo.....	49
Figura 11 - Linha do tempo em operação de Futuro de DI1	53
Figura 12 - Linha do Tempo em Opção sobre IDI	54
Figura 13 - Linha do Tempo de Opção sobre DI1 (Swaption).....	56
Figura 14 - Linha do Tempo de Opção Sobre Juros a Termo	58
Figura 15 - Árvore Binomial - Em cada vértice tem-se: <i>Valor do ativo (payoff) Probabilidade de ocorrência</i>	70
Figura 16 - Superfície de Volatilidade	78
Figura 17 - Delta de Opção.....	81
Figura 18 - O Efeito Gamma da Opção	82
Figura 19- Fator a Termo antes de T_1	99
Figura 20 - Fator a Termo após T_1	100
Figura 21 - Volatilidade de IDI por prazo	104
Figura 22 - CDI e expectativa de juros por prazo.....	105
Figura 23 - Volatilidade em função do Delta para opções sobre IDI de 3 meses	108
Figura 24 - Aplicação dos Métodos por Delta.....	111
Figura 25 - Processo para o encontro da Volatilidade.....	112
Figura 26 - Encontro dos Strikes no primeiro dia de testes.....	113
Figura 27 – Resultado por Strike e por Método para o primeiro período	119
Figura 28 - Diferença de Vol frente ao MC: Strike 13,25%.....	120
Figura 29- Resultado por Strike e por Método para o segundo período.....	122
Figura 30 - Diferença de Vol frente ao MC: Strike 15,63%.....	123
Figura 31- Resultado por Strike e por Método para o terceiro período.....	124
Figura 32 - Diferença de Vol frente ao MC: Strike 10,15%.....	125
Figura 33 - Base de dados - Colunas de B a H.....	139
Figura 34- Base de dados - Colunas de I a R	140
Figura 35 - Base de dados - Colunas de X a AC	141
Figura 36 - Diferença de Vol frente ao MC: Strike 16,09%.....	173
Figura 37 - Diferença de Vol frente ao MC: Strike 10,04%.....	173
Figura 38 - Diferença de Vol frente ao MC: Strike 22,44%.....	175
Figura 39 - Diferença de Vol frente ao MC: Strike 12,81%.....	175
Figura 40 - Diferença de Vol frente ao MC: Strike 19,13%.....	177
Figura 41 - Diferença de Vol frente ao MC: Strike 3,73%.....	177
Figura 42 - Vega médio por Strike para o primeiro período	179
Figura 43 - Gamma médio em contratos de N15.....	179

Figura 44 – Gamma médio em contratos de F16	180
Figura 45 – Vega médio por Strike para o segundo período	181
Figura 46 – Gamma médio em contratos de N16	181
Figura 47 – Gamma médio em contratos de F17	182
Figura 48 – Vega médio por Strike para o terceiro período.....	183
Figura 49 – Gamma médio em contratos de F16	183
Figura 50 – Gamma médio em contratos de F17	184

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Exemplo de Simulação de Monte Carlo	65
Tabela 2 - Strikes Iniciais	110
Tabela 3 - Curva de Volatilidade por Delta.....	110
Tabela 4- Tabela para análise de performance de opções	114
Tabela 5 - Strikes do primeiro período	119
Tabela 6- Resultado por Strike e por método para o primeiro período	120
Tabela 7 - Média e desvios das diferenças de volatilidade frente ao MC: período 1	120
Tabela 8 - Strikes do segundo período	121
Tabela 9- Resultado por Strike e por método para o segundo período	122
Tabela 10 - Média e desvios das diferenças de volatilidade frente ao MC: período 2.....	123
Tabela 11 - Strikes do terceiro período	124
Tabela 12- Resultado por Strike e por método para o terceiro período.....	124
Tabela 13 - Média e desvios das diferenças de volatilidade frente ao MC: período 3.....	125
Tabela 14- CÓDIGO PARA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO.....	143
Tabela 15 - CÓDIGO PARA INTERPOLAÇÃO SPLINE CÚBICA	153
Tabela 16 - MÉTODO DE BISSECÇÃO PARA ENCONTRO DO STRIKE	157
Tabela 17 - CÓDIGO DE INTERPOLAÇÃO EXPONENCIAL	161
Tabela 18 - CÓDIGO PARA ADAPTAÇÃO DE B&S PARA CASO BRASILEIRO.....	163
Tabela 19 - CÓDIGO PARA ENCONTRO DE DELTA.....	165

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CDI	Certificado de Depósito Interbancário
BM&F	Bolsa de Mercadoria e Futuros
Call	Opção de compra
Put	Opção de venda
COPOM	Comitê de Política Monetária
SELIC	Sistema Especial de Liquidação e Custódia
IDI	Índice DI
Swaption	Opção sobre contrato de DI1 futuro
CETIP	Central de Custódia e de Liquidação Financeira de Títulos
PU	Preço Unitário
IJT	Índice de Juros a Termo
VBA	Visual Basic for Applications

LISTA DE SÍMBOLOS

T_0	Data inicial da opção sobre juros a termo
T_1	Data de início de apuração dos juros a termo e vencimento da IDI curta
T_2	Data de vencimento da opção sobre juros a termo e da IDI longa
S_t	Preço corrente, ou Spot, do ativo na data t
DI1	Contrato de DI1 futuro negociado na BM&F
F_t	Preço futuro do ativo observado na data t
K	Strike da opção

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	ESTÁGIO E EMPRESA	24
1.1.1	A Empresa	24
1.1.2	A Atuação do Autor Como Estagiário	26
1.2	O MERCADO DE DERIVATIVOS	27
1.2.1	Ambientes de negociação	27
1.2.1.1	Bolsa de Valores	27
1.2.1.2	Mercado de Balcão	28
1.2.2	Tipos de derivativos	29
1.2.2.1	Contrato a Termo	29
1.2.2.2	Contratos Futuros	31
1.2.2.3	Opções	32
1.2.2.4	Swaps	36
2	MOTIVAÇÃO, RELEVÂNCIA E ESCOLHA DO TEMA	39
3	OBJETIVO E METODOLOGIA	43
3.1	OBJETIVO	43
3.2	METODOLOGIA	43
4	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	45
4.1	O MERCADO DE JUROS NO BRASIL	45
4.2	OPÇÕES SOBRE JUROS NEGOCIADAS EM BOLSA E A DIFERENÇA EM RELAÇÃO À ESTUDADA	46
4.3	APURAÇÃO DE RESULTADOS SOBRE DERIVATIVOS SOBRE TAXA DE JUROS NO BRASIL	50
4.3.1	Convenções e Métodos de Capitalização dos Juros no Brasil	50
4.3.2	Apuração de Resultado em Posição de Contrato Futuro de DI1	51
4.3.3	Apuração de Resultado em Opção sobre IDI	53
4.3.4	Apuração de Resultado em Opção sobre Contrato Futuro de DI1 (Swaption)	55
4.3.5	Apuração de Resultado em Opção sobre Juros a Termo	56
5	REVISÃO DA LITERATURA	59
5.1	ATUANTES DO MERCADO	59
5.1.1	Hedgers	59
5.1.2	Especuladores	60
5.1.3	Arbitradores	60
5.2	PROCESSOS ESTOCÁSTICOS	61
5.2.1	Processo Markoviano	61

5.2.2	Processo de Wiener	62
5.2.3	Processo de Itô.....	63
5.2.4	Processo Seguido Por Uma Ação	63
5.2.5	Simulação de Monte Carlo	65
5.2.6	Processo Correlacionado	66
5.2.7	Lema de Itô.....	66
5.2.7.1	A Propriedade Lognormal	67
5.3	PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES	68
5.3.1	Precificação de Risco Neutro	68
5.3.2	Precificação de opções através de Árvore Binomial	69
5.3.3	Modelo Black&Shcoles de precificação de opções	72
5.3.4	Precificação através de simulação de Monte Carlo	73
5.3.5	O Modelo de Black para Precificar Opções Sobre Futuros	75
5.4	A VOLATILIDADE NOS MODELOS DE PRECIFICAÇÃO	76
5.4.1	A Superfície de Volatilidade.....	77
5.4.2	Estimação da Volatilidade.....	78
5.4.3	Volatilidade a Termo	79
5.5	HEDGE DE OPÇÕES	80
5.5.1	Delta de opções e seu Hedge	80
5.5.2	Gamma de opções.....	82
5.5.3	Vega de opções.....	83
5.5.4	Theta de opções	83
6	ANÁLISE DAS PROPRIEDADES DAS OPÇÕES EXISTENTES NO MERCADO E SUAS RELAÇÕES COM A OPÇÃO SOBRE JUROS A TERMO	85
6.1	PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES SOBRE IDI.....	86
6.2	PRECIFICAÇÃO DE SWAPTIONS.....	87
6.3	PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES SOBRE JUROS A TERMO	88
7	DESENVOLVIMENTO DE MÉTODOS DE PRECIFICAÇÃO	91
7.1	MÉTODO 1: VOLATILIDADE DE IDI A TERMO.....	91
7.2	MÉTODO 2: PONDERAÇÃO ENTRE VOLATILIDADE DE SWAPTION COM VOLATILIDADE DO MÉTODO 1	92
7.3	MÉTODO 3: ENCONTRO DA VARIÂNCIA DE (X/Y).....	93
7.4	MÉTODO 4: UTILIZAÇÃO DE VOLATILIDADE DE SWAPTION PURA	95
7.5	MÉTODO 5: PONDERAÇÃO SIMPLES ENTRE VOLATILIDADE DE SWAPTION E DE IDI A TERMO.....	95
7.6	MÉTODO 6: SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO.....	96
7.7	CONDIÇÃO DE CONTORNO PARA OS MÉTODOS	100
8	PROCEDIMENTO DE ANÁLISE DOS MÉTODOS DE PRECIFICAÇÃO	103

8.1	ESCOLHA DOS PERÍODOS DE TESTE.....	103
8.1.1	Primeiro Período: abril/15 – jul/15 – jan/16	106
8.1.2	Segundo Período: jan/16 – jul/16 – jan/17.....	106
8.1.3	Terceiro Período: set/14 – jul/16 – jan/17.....	107
8.2	CONSIDERAÇÃO DA SUPERFÍCIE DE VOLATILIDADE	107
8.2.1	Interpolação da Superfície de Volatilidade.....	109
8.3	REALIZAÇÃO DOS <i>BACKTESTS</i> PARA ANÁLISE DE RESULTADOS	112
8.3.1	Coluna B&S	114
8.3.2	Coluna DELTA.....	116
8.3.3	Coluna TOTAL.....	116
9	RESULTADOS	119
9.1	RESULTADOS DO PRIMEIRO PERÍODO: 07/04/2015 - 01/07/2015 - 04/01/2016.....	119
9.2	RESULTADOS DO SEGUNDO PERÍODO: 04/01/2016 - 01/07/2016 - 02/01/2017.....	121
9.3	RESULTADOS DO TERCEIRO PERÍODO: 12/09/2014 - 04/01/2016 - 02/01/2017.....	123
10	ANÁLISE DE RESULTADOS E CONCLUSÃO	127
11	REFERÊNCIAS	131
	APÊNDICE A - APLICAÇÃO DO LEMA DE ITÔ SOBRE O COMPORTAMENTO DO FATOR MULTIPLICATIVO DE JUROS DE UMA IDI	135
	APÊNDICE B – APLICAÇÃO DO LEMA DE ITÔ SOBRE O COMPORTAMENTO DO FATOR MULTIPLICATIVO DE JUROS DE UMA SWAPTION.	137
	APÊNDICE C – APRESENTAÇÃO DA BASE DE DADOS DA PLANILHA.....	139
	APÊNDICE D – CÓDIGO PARA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO.....	143
	APÊNDICE E – CÓDIGO PARA INTERPOLAÇÃO SPLINE CÚBICA	152
	APÊNDICE F – MÉTODO DE BISSECÇÃO PARA ENCONTRO DO STRIKE EM FUNÇÃO DO DELTA A SER ATINGIDO E A VOLATILIDADE	157
	APÊNDICE G – CÓDIGO DE INTERPOLAÇÃO EXPONENCIAL PARA O ENCONTRO DAS VOLATILIDADES	161
	APÊNDICE H – CÓDIGO PARA A FÓRMULA DE BLACK DE PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES SOBRE FUTUROS	163
	APÊNDICE I – CÓDIGO PARA ENCONTRO DE DELTA.....	164
	APÊNDICE J - COLUNAS DA TABELA 4	167
	APÊNDICE K – DIFERENÇAS ENTRE VOLS FRENTE AO MONTE CARLO: STRIKES EXTREMOS DO PERÍODO 1	173
	APÊNDICE L – DIFERENÇAS ENTRE VOLS FRENTE AO MONTE CARLO: STRIKES EXTREMOS DO PERÍODO 2	175
	APÊNDICE M – DIFERENÇAS ENTRE VOLS FRENTE AO MONTE CARLO: STRIKES EXTREMOS DO PERÍODO 3	177

APÊNDICE N – VEGAS E GAMMAS POR STRIKE E MÉTODO PARA PERÍODO 1.....	179
APÊNDICE O – VEGAS E GAMMAS POR STRIKE E MÉTODO PARA PERÍODO 2.....	181
APÊNDICE P – VEGAS E GAMMAS POR STRIKE E MÉTODO PARA PERÍODO 3.....	183
ANEXO A - INTERPRETAÇÃO DA FÓRMULA DE BLACK E SCHOLES.....	185
ANEXO B – VARIÂNCIA DE X/Y.....	189

1 INTRODUÇÃO

Derivativos se tornaram instrumentos largamente utilizados e negociados pelos participantes do mercado financeiro, sendo objetos centrais de diversos estudos realizados na área. São usualmente definidos como instrumentos cujos valores variam de acordo com a variação do valor de um ativo subjacente. Em finanças, são contratos que estabelecem relação entre duas partes, que aceitam tomar posições opostas quanto à variação do preço do ativo atrelado ao contrato. Tais ativos podem ser moedas, *commodities*, taxas de juros, entre outros.

Levantamentos como o de Weber¹ apontam a existência e negociação deste tipo de instrumento por séculos, porém o grande crescimento em sua popularidade se deu nos últimos 40 anos, quando diversos estudos foram publicados e a dispersão do conhecimento em conjunto com o avanço tecnológico das plataformas de comunicação permitiu sua negociação em grande escala. A demanda por estes instrumentos se justifica pelo fato de haver grande flexibilidade na maneira com que podem ser estruturados, permitindo que atendam demandas específicas de agentes do mercado. Atualmente, diversos tipos de derivativos, como futuros, swaps e opções são negociados em Bolsas de Valores ao redor do mundo, e:

[...] são adicionados em emissões de títulos, usados em planos de remuneração de executivos, embutidos em oportunidades de investimentos de capital, usados para transferir riscos hipotecários dos credores originais para investidores, e mais. Nós atingimos um estágio agora onde aqueles que trabalham em finanças, e muitos que trabalham fora desta área, precisam entender como derivativos funcionam, como são usados e como são precificados. (HULL, 2012, p.1, tradução nossa).

Quando bem administrados, permitem que grupos de interesse tenham suas demandas específicas por proteção contra movimentos do mercado atendidas, gerando maior estabilidade e capacidade de planejamento para os agentes da economia. Porém, ao fornecerem derivativos a um cliente na forma de produto, as instituições financeiras precisam estar cientes do risco que correm e como gerenciá-lo. A flexibilidade na estruturação destes instrumentos, que leva à sua popularidade, é a mesma que gera desafios quanto ao método de precificação e definição dos riscos envolvidos. Um grande exemplo desta situação é o papel central que derivativos sobre riscos de crédito tiveram na crise financeira global que começou em 2007. Gigantes do mercado financeiro, como Lehman Brothers, quebraram devido à má

¹ WEBER, E. J. **A Short History of Derivative Security Markets**. Crawley: The University of Western Australia, 2008. 49 p.

administração dos riscos envolvidos em suas posições em derivativos, levando a economia mundial a enfrentar sua pior recessão em gerações.

Em meio a este cenário, o presente trabalho visa estudar métodos de precificação de uma opção sobre juros a termo, assim como o gerenciamento e possível mitigação de seus riscos. Tem-se sempre como prisma o mercado de derivativos brasileiros, onde suas peculiaridades foram consideradas.

1.1 ESTÁGIO E EMPRESA

1.1.1 A Empresa

A empresa na qual o autor atua como estagiário é o Banco Original S.A.. O banco pertence ao grupo J&F Investimentos S.A., conglomerado fundado pela família Batista e um dos maiores grupos privados do Brasil. Os principais setores de participação e indicadores do grupo são destacados através do esquema²:

Figura 1 - Grupo J&F Investimentos

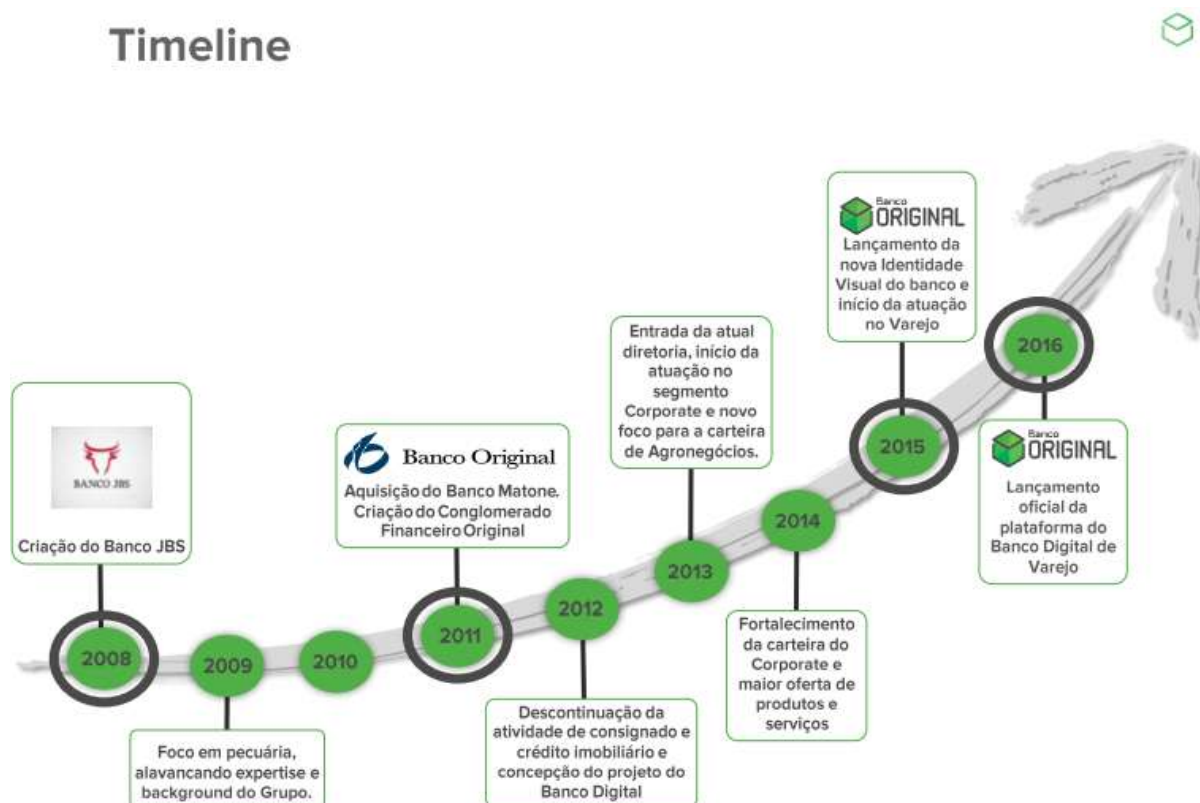


Fonte: Adaptado de Original, Apresentação Institucional – Junho 2016. Disponível em <<https://www.original.com.br/relacoes/apresentacoes/#arquivos-download>>. Acesso em 03 de outubro de 2016

² Receita líquida consolidada considera período de 12 meses findos em 31/06/2016.

Dentro do contexto do grupo, a história do banco começou em 2008, com a criação do Banco JBS. Este banco tinha como objetivo ser o braço financeiro da J&F, fornecendo linhas de crédito e estabelecendo relações com produtores agropecuários parceiros das companhias do grupo. Em 2011, com um aporte de capital da Holding, o Banco JBS realizou a aquisição do Banco Matone, resultando na criação do Conglomerado Financeiro Original. Em 2012, já contando com a participação de Henrique Meirelles³ na presidência do conselho da Holding, houve a concepção do projeto de um banco digital, sendo esta a sua principal fonte de diferenciação. Em 2015 o banco já atuava no setor de varejo e em 2016 se tornou o primeiro banco no mundo a possibilitar a abertura de contas correntes para pessoas físicas de maneira totalmente digital.

Figura 2 - Linha do Tempo do Banco Original



Fonte: Original, Apresentação Institucional – Junho 2016. Disponível em <<https://www.original.com.br/relacoes/apresentacoes/#arquivos-download>>. Acesso em 03 de outubro de 2016

O banco evoluiu durante este período, ampliando sua área de atuação e produtos oferecidos, e hoje oferece produtos como:

- a) empréstimos em moeda local e estrangeira;
- b) desconto de recebíveis;

³ Presidente do Banco Central do Brasil entre 01/01/2003 e 01/01/2011.

- c) derivativos;
- d) fusões e aquisições (M&A);
- e) operações estruturadas.

Por exercer funções por intermédio de carteiras comerciais e de investimento, é categorizado como um Banco Múltiplo, segundo a resolução CMN 2.099, de 1994. Dados do Conglomerado Financeiro Original de junho de 2016 apresentavam os seguintes indicadores:

Figura 3 - Dados do Conglomerado Financeiro Original de Junho de 2016



Fonte: Original, Institucional. Disponível em <<https://www.original.com.br/relacoes/institucional/>>. Acesso em 03 de outubro de 2016

1.1.2 A Atuação do Autor Como Estagiário

O estágio, que teve início em agosto de 2015, é realizado na área de Tesouraria do banco. Dentre as funções da área, pode-se destacar:

- a) exercer o gerenciamento do caixa do Banco, através da aplicação dos saldos disponíveis, zelando pela liquidez da instituição como um todo;
- b) acompanhar e fornecer informações de mercado para outras áreas do banco, funcionando como uma centralizadora de riscos e auxiliando na gerência da exposição do conglomerado a movimentos do mercado;
- c) fornecer a base de preços pela qual o banco poderá acessar o mercado o que, por consequência, gera uma base de custos para todos os produtos do banco;
- d) realizar operações de proteção de carteiras no mercado, através do balanceamento de ativos e passivos;
- e) gerar resultados através da administração de ativos de risco, aplicando o patrimônio do banco e obedecendo as políticas de limite de risco estabelecidas pela governança institucional.

O autor acompanha de perto e auxilia na execução de todas estas funções, lidando diretamente com derivativos em muitas delas, havendo maior contato com derivativos de moedas, em especial o Dólar Americano, e de taxas de juros, em especial o CDI⁴.

1.2 O MERCADO DE DERIVATIVOS

1.2.1 Ambientes de negociação

Existem basicamente dois ambientes onde os derivativos são negociados: Bolsa de Valores e Mercado de Balcão. Suas características são expressas a seguir:

1.2.1.1 Bolsa de Valores

As Bolsas de Valores são constituídas de ambientes de negociação centralizadores para ofertas de compra e venda de diversos ativos e derivativos dos agentes atuantes no mercado. Nestes ambientes, regras institucionais são estabelecidas para padronizar os contratos negociados entre os participantes, de modo a gerar liquidez e confiabilidade quanto às condições estabelecidas. Estes padrões dizem respeito a características como quantidade do ativo negociada por contrato (entendido por *tamanho* do contrato), lotes mínimos de contratos a serem negociados, unidade de cotação, variação mínima de apregoação, data de liquidação, entre outros.

Os participantes possuem a liberdade de fornecer ofertas para preços de compra ou venda dos ativos, seguindo as normas estabelecidas, sendo função da Bolsa centralizar estas ofertas e divulgá-las. Assim, é possível para os atuantes saber a oferta e a demanda do mercado como um todo para cada preço negociado dos ativos, permitindo-lhes realizar julgamentos e assumir posições. Esta é uma característica muito importante das Bolsas, pois os preços registrados em suas negociações são observáveis por todos os agentes do mercado, sendo, muitas vezes, utilizados como referência para precificação de ativos e derivativos.

⁴ Certificado de Depósito Interbancário. Taxa de referência do mercado, com maiores explicações sendo fornecidas na seção 2.1.

As Bolsas de Valores requerem uma garantia prévia de cada participante que decide atuar no mercado de derivativos. Esta garantia, cuja especificação depende das normas de cada instituição, podendo ser constituída de moedas, títulos do tesouro e valores mobiliários, fica sob controle da Bolsa, e visa assegurar que, em caso de resultado negativo na posição assumida pelo participante, este possua capacidade de honrar a negociação com a contraparte. Esta é uma característica importantíssima destes ambientes de negociação. Com os contratos sendo todos padronizados, e a garantia de que a negociação vai ser honrada, os atuantes não precisam saber necessariamente quem é a contraparte.

Neste ambiente de negociação, os resultados das posições em contratos futuros (explicados na seção 1.2.2.2) são apurados e liquidados diariamente. A maneira como os resultados são apurados variam de acordo com as especificações de cada contrato e de cada instituição, mas o fato de haver apuração diária se torna importantíssimo, pois o valor monetário proveniente do lucro obtido com a operação pode ser reinvestido, potencializando os ganhos, enquanto que as perdas fazem com que mais depósitos em margens sejam requeridos, gerando maior perda de oportunidade do dinheiro.

A Bolsa de Valores oficial brasileira é a Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros de São Paulo (BM&F)⁵, sendo esta usada como referência de preços para muitos ativos estudados neste trabalho.

1.2.1.2 Mercado de Balcão

O Mercado de Balcão é constituído por uma rede de negociadores que se comunicam através de ligações telefônicas ou computadores, por onde fecham negócio. É um ambiente descentralizado, onde o atuante que assume uma posição lida diretamente com a contraparte. Neste ambiente, os contratos não são padronizados, assim, um atuante pode realizar propostas para a contraparte de acordo com suas necessidades específicas, ficando a cargo da contraparte aceitar, recusar, ou realizar uma contraproposta. Por não haver uma instituição centralizadora, não há requisito de depósito de margem para se assumir uma posição, existindo assim a possibilidade de que a contraparte não honre com o negócio assinado em contrato, ficando a cargo do atuante realizar a análise deste risco. Neste ambiente, as

⁵ Fonte: BM&FBOVESPA, **A BM&FBOVESPA – Perfil e Histórico**. Disponível em: <<http://ri.bmfbovespa.com.br/static/ptb/perfil-historico.asp?idioma=ptb>>, acesso em 03/10/2016.

instituições costumam atuar como *Market Makers*, ou seja, viabilizam as negociações entre agentes do mercado, possuindo sempre um preço ao qual aceitam comprar e um ao qual aceitam vender determinado ativo ou derivativo, gerando assim liquidez no sistema como um todo.

1.2.2 Tipos de derivativos

Esta seção visa dar uma introdução sobre os principais tipos de derivativos negociados no mercado brasileiro, os quais serão usados como referência ao longo do trabalho.

1.2.2.1 Contrato a Termo

Contrato a termo é, provavelmente, o mais simples tipo de derivativo negociado. Segundo definição utilizada por Hull (2012), é um acordo para comprar ou vender um ativo em certo tempo no futuro por um determinado preço. Difere de um contrato à vista, quando a negociação é efetivada no mesmo dia. O contrato acaba quando é executado e, portanto, a data de vencimento do contrato é a mesma de exercício.

Em um contrato a termo, uma das partes assume posição (ou ponta) “comprada”, enquanto a outra assume posição “vendida”, de modo que ambas possuem direitos e obrigações. No dia do vencimento do contrato, a ponta comprada tem o direito e o dever de comprar o ativo da parte vendida, que possui o direito e o dever de vendê-lo, sendo a negociação liquidada pelo preço estabelecido em contrato.

Um exemplo prático pode ser dado. Suponha que, no dia de hoje, duas partes fechem um contrato a termo entre elas que estabelece que a ponta vendida venda 100 mil dólares americanos para a ponta comprada por R\$ 3,10 por dólar daqui a 170 dias corridos. Se, daqui a 170 dias, a cotação da moeda estiver em R\$ 3,26 por dólar, a ponta comprada terá obtido os dólares a R\$ 0,16 por unidade mais barato que o preço do mercado. Assumindo-se que os dólares obtidos sejam vendidos imediatamente a preço de mercado, a ponta comprada apura lucro (igual em módulo ao prejuízo da ponta vendida) equivalente a:

$$US\$ 100.000 * \left(-\frac{R\$ 3,10}{US\$ 1,00} + \frac{R\$ 3,26}{US\$ 1,00} \right) = R\$ 16.000,00 \quad (1)$$

Agora, assumamos que a cotação da moeda americana na data de vencimento do contrato fosse R\$ 2,82 por dólar. Neste caso, a ponta comprada ainda seria obrigada a comprar os dólares da ponta vendida, acarretando prejuízo igual em módulo ao lucro da ponta vendida de:

$$US\$ 100.000 * \left(-\frac{R\$ 3,10}{US\$ 1,00} + \frac{R\$ 2,82}{US\$ 1,00} \right) = R\$ 28.000,00 \quad (2)$$

Percebe-se, portanto, que quanto mais alta a cotação real do dólar no dia do vencimento do contrato, melhor é para a ponta comprada e pior é para a ponta vendida. Generalizando-se, sendo t a data de vencimento do contrato, S_t o preço real do ativo subjacente ao contrato observado no vencimento, K o preço acordado no contrato e V o volume estabelecido, o resultado apurado da ponta comprada é:

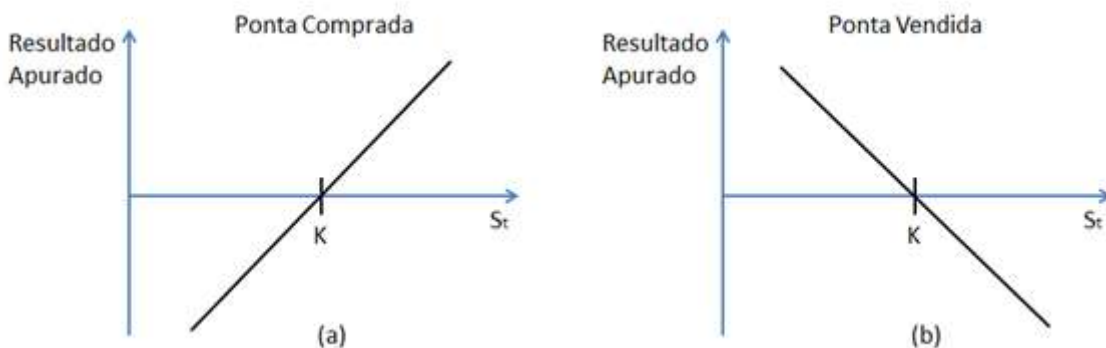
$$V * (S_t - K) \quad (3)$$

E, para a ponta vendida:

$$V * (K - S_t) \quad (4)$$

Assim, um esquema de lucro apurado em t em função de S_t pode ser montado da seguinte maneira:

Figura 4 - Resultado de contrato a termo em relação a S_t : (a) ponta comprada; (b) ponta vendida



Fonte: Elaboração do autor com base em Hull (2012)

Estes instrumentos são negociados no Mercado de Balcão e, portanto, não seguem um padrão quanto ao volume e prazo de contrato. Muitos dos contratos a termo, entretanto, não implicam

em entrega física do ativo subjacente, ou seja, nos exemplos dados, que a parte comprada transfira R\$ 310.000 ou R\$ 282.000 para a parte vendida e receba US\$ 100.000 da mesma. Contratos a termo de juros e dólar no mercado brasileiro costumam ser liquidados financeiramente, ou seja, apenas o lucro apurado da negociação é transferido entre as partes, sendo este o tipo de contrato a termo referenciado ao longo do texto.

1.2.2.2 Contratos Futuros

Contratos futuros são muito similares a contratos a termo. Também estabelecem uma relação entre duas partes, onde a ponta comprada se compromete a comprar um ativo subjacente a certo preço na data de vencimento da ponta vendida, que se compromete a vendê-lo. A diferença é que contratos futuros costumam ser negociados no ambiente das Bolsas de Valores, carregando assim suas peculiaridades, como contratos padronizados, garantia de honra da contraparte e resultado das posições apurado e liquidado diariamente.

Por ser negociado em Bolsa, é possível aos atuantes verificar quais foram os últimos negócios fechados, e a variação na oferta e demanda na negociação do ativo, assim como seu preço. Este preço é denominado *preço futuro*, exatamente por representar o preço do ativo em uma data futura.

Para que seja possível realizar a apuração de resultados diariamente para um contrato que negocia o preço de um ativo numa data futura, utiliza-se a variação do *preço futuro* para aquele ativo. Portanto, diferentemente do contrato a termo, que tem seu resultado apurado na data de vencimento t através da comparação entre o preço acordado no início do contrato K e o preço real observado no vencimento S_t , o contrato futuro tem seu resultado apurado entre a diferença do preço futuro no início do intervalo de apuração, F_0 , e no final, F_1 .

Assim, o cálculo para apuração de resultado diário para a ponta comprada é:

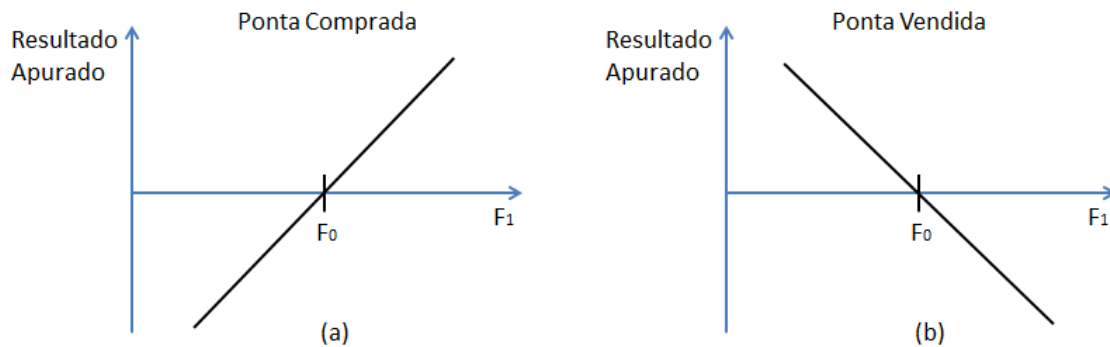
$$V * (F_1 - F_0) \quad (5)$$

E, para a ponta vendida:

$$V * (F_0 - F_1) \quad (6)$$

Montando-se um esquema gráfico para apuração de resultado diário, temos:

Figura 5 - Payoff de contrato futuro em relação a F_1 : (a) ponta comprada; (b) ponta vendida



Fonte: Elaboração do autor com base em Hull (2012)

Um participante do mercado pode encerrar sua posição em um contrato futuro, bastando, para isto, que assuma uma posição contrária à inicial com o mesmo volume e no mesmo ativo.

Assim como os contratos a termo, os contratos futuros considerados ao longo deste texto possuem caráter de liquidação financeira. Aqui vale a definição de um novo termo, o *preço de ajuste*. O preço de ajuste é o preço pelo qual a BM&F apura resultados de operações que se mantiveram em aberto entre dias. A sua definição segue critério pré-estabelecido pela instituição e varia entre os tipos de contrato, costumando ser uma ponderação entre os negócios fechados próximos ao final do dia.

Existem regras estabelecidas pela BM&F para a determinação de F_0 e F_1 . Caso a operação tenha surgido no mesmo dia de apuração de resultado, F_0 é o preço de início do contrato, caso contrário, F_0 é o preço de ajuste do dia anterior. Caso a operação seja encerrada no mesmo dia de apuração de resultado, F_1 é o preço pelo qual a operação foi encerrada, caso contrário, F_1 é o preço de ajuste deste dia.

1.2.2.3 Opções

Opções se constituem em um grupo de derivativos que dá a seu detentor um direito e a seu vendedor uma obrigação. Para assumir tal posição, o vendedor de uma opção cobra um prêmio, ou preço, do comprador. Pode-se separá-las em dois grandes grupos: opções de venda

(*puts*) e opções de compra (*calls*). Uma opção de compra (venda) dá a seu detentor o direito de comprar (vender) determinado ativo a certo preço no futuro. O preço de compra ou venda do ativo no futuro é denominado preço de Strike, enquanto a data final do contrato é conhecida como data de vencimento, de exercício, ou maturidade. Uma opção é dita europeia quando seu detentor só pode exercer seu direito na data de expiração da opção, e dita americana quando seu detentor pode exercer seu direito em qualquer momento entre sua data de aquisição e expiração.

Estes instrumentos se tornaram extremamente populares entre os agentes do mercado, pois, ao comprarem uma opção, eles limitam seus possíveis prejuízos, enquanto não limitam seus possíveis ganhos.

Um exemplo prático pode ser dado considerando-se uma call do tipo europeia sobre dólares americanos a preço de Strike de R\$ 4,12 por dólar. Caso, na data de vencimento, a cotação do dólar esteja em R\$ 4,30 por dólar, o detentor da opção exerce seu direito, comprando dólares da contraparte por R\$ 4,12 por dólar. Assumindo-se que venda instantaneamente os dólares comprados no mercado de câmbio, ele obtém lucro de R\$ 0,18 por unidade de dólar do contrato. Supondo-se que a opção desse o direito a seu detentor de comprar uma quantia de até US\$ 100.000, também chamada de volume do contrato, e o prêmio pago inicialmente pela opção fosse P , cotado em R\$/US\$, o lucro líquido realizado é de⁶:

$$US\$ 100.000 * \left(-\frac{R\$ 4,12}{US\$ 1,00} + \frac{R\$ 4,30}{US\$ 1,00} - \frac{R\$ P}{US\$ 1,00} \right) \quad (7)$$

O primeiro termo entre parênteses se refere à quantia desembolsada pelo detentor da opção para exercer seu direito de comprar US\$ 100.000 por R\$ 4,12 por dólar; o segundo termo se refere ao resultado obtido ao se vender instantaneamente os dólares obtidos ao preço de mercado no momento, que é R\$ 4,30 por dólar; e o terceiro termo se refere ao desconto do desembolso do prêmio, pago inicialmente pela opção.

Isto equivale a:

⁶ Por simplicidade didática, omitiu-se o custo do dinheiro no tempo neste exemplo. O procedimento correto para obtenção do lucro líquido seria aplicar um custo de oportunidade em forma de juros ao prêmio pago inicialmente, procedimento adotado no decorrer deste trabalho.

$$US\$ 100.000 * \frac{R\$ 0,18 - R\$ P}{US\$ 1,00} \quad (8)$$

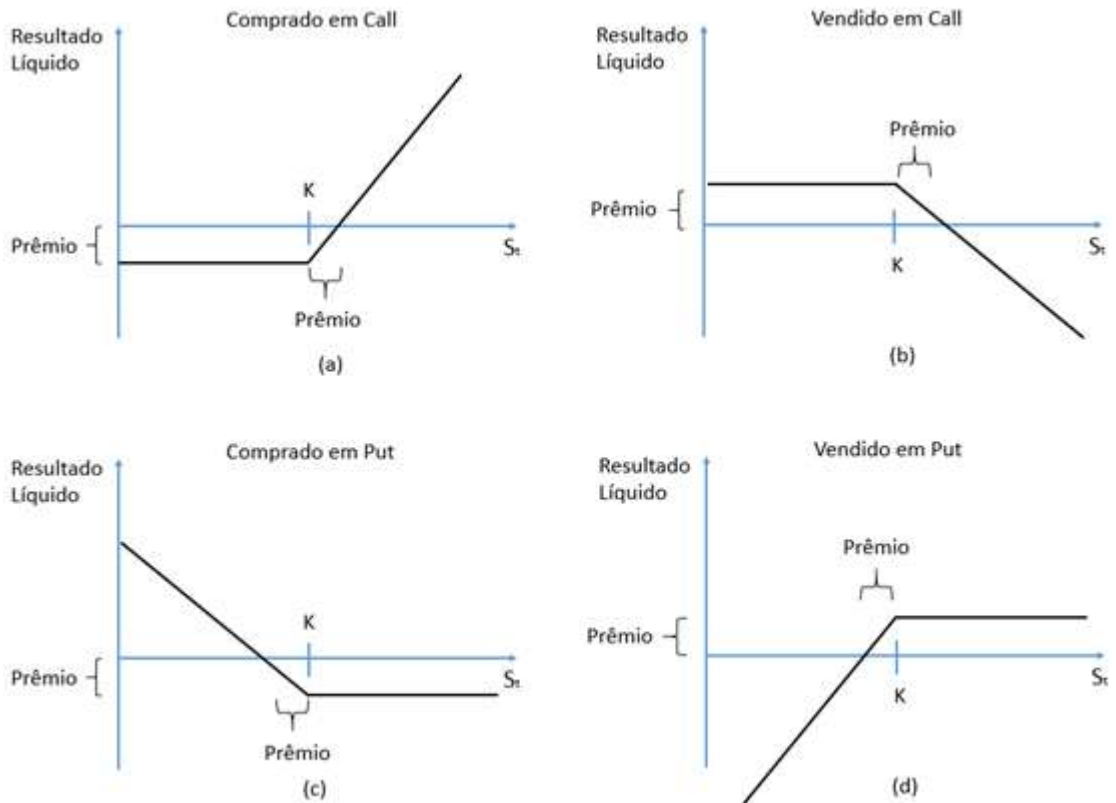
O preço de Strike e prêmio são definidos na data de início da opção, e a incerteza quanto ao resultado final reside apenas em qual será o valor da cotação de mercado para o dólar na data de vencimento do contrato. Percebe-se, portanto, que quanto maior a cotação do dólar no dia de exercício da opção, maior o resultado apurado pelo detentor da mesma.

Agora, assumindo-se que a cotação na data de vencimento esteja em R\$ 3,90, o detentor simplesmente não exerce seu direito, deixando a opção expirar sem exercício. Neste caso, seu prejuízo está limitado ao prêmio pago inicialmente.

Assim, contanto que a cotação do dólar no dia de vencimento da opção, em R\$/US\$, seja superior ao preço de Strike em valor maior que P, o detentor obtém resultado líquido positivo.

Generalizando-se, se t é a data de vencimento do contrato, S_t é o preço do ativo subjacente ao contrato de opção observado no momento t (preço *spot*) e K é o preço de Strike, pode-se esquematizar os possíveis resultados líquidos (*payoffs*) que a opção traz a seu detentor e vendedor em função de S_t :

Figura 6 - Payoff de opções: (a) comprado call; (b) vendido call; (c) comprado put; (d) vendido put



Fonte: Elaboração do autor com base em Hull (2012)

Assim, as fórmulas que determinam o resultado líquido para um atuante comprado em opção de compra são:

$$\text{Máximo}(0; S_t - K) - P \quad (9)$$

Enquanto que para uma opção de venda:

$$\text{Máximo}(0; K - S_t) - P \quad (10)$$

O exemplo anterior diz respeito a uma opção chamada de *plain vanilla*, nome atribuído aos tipos mais comuns, bem difundidos e negociados de opções. As opções aqui consideradas possuem liquidação financeira (não há entrega física do ativo negociado).

1.2.2.4 Swaps

Swaps são contratos negociados no Mercado de Balcão entre duas partes que aceitam trocar rendimentos através da variação de indexadores por um período de tempo. Todo swap possui um *Principal*, que é o valor ao qual os rendimentos dos indexadores serão aplicados. O tipo mais comum de swap é o que uma das pontas da negociação recebe uma taxa de juros fixa e paga uma taxa de juros flutuante.

Por exemplo, suponha que uma empresa brasileira (empresa A), possua uma dívida cujo principal vale R\$ 5.000.000 e a taxa de juros aplicada é equivalente ao CDI acumulado no período da dívida⁷. A empresa corre um risco de que o CDI apurado no período seja maior do que o esperado, aumentando o custo de sua dívida. Nesta situação, dizemos que a empresa está exposta a juros flutuante. Assim, a empresa possui interesse de trocar a sua dívida em juros flutuantes por uma dívida em juros pré-fixados.

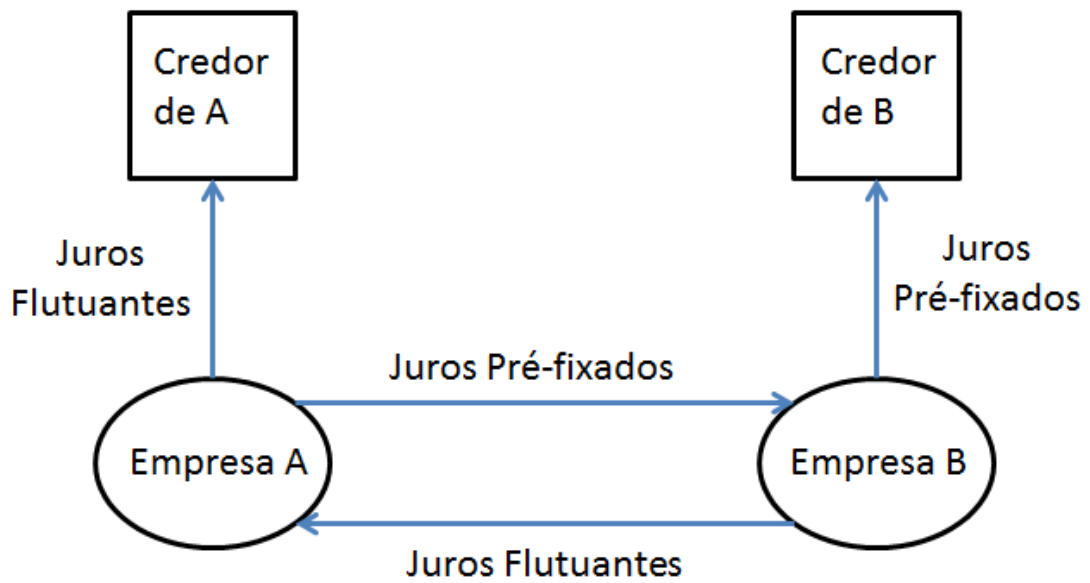
Ao mesmo tempo, uma segunda empresa, B, pode estar em situação oposta, na qual ela paga juros pré-fixados, mas gostaria de trocá-los por flutuantes, na esperança de queda uma no CDI barateie sua dívida.

As empresas podem realizar um acordo em forma de swap, de modo que a empresa A aceite pagar juros pré-fixados aplicados ao principal de R\$ 5.000.000 a B, enquanto recebe juros flutuantes da mesma.

Desta maneira, é possível montar um esquema do fluxo de caixa das empresas:

⁷ CDI acumulado em um período é a capitalização composta das taxas médias de CDI diárias apuradas pela Cetip em todos os dias úteis do período, com exceção do último.

Figura 7 - Fluxo de caixa em um Swap



Fonte: Elaborado pelo autor baseado em Hull (2012)

Percebe-se que, na prática, a empresa A passa a ter uma dívida em juros pré-fixados, enquanto a B passa a ter dívida em juros flutuantes.

2 MOTIVAÇÃO, RELEVÂNCIA E ESCOLHA DO TEMA

Uma das funções das instituições financeiras é atuar como *Market Makers* (ver seção 1.2.1.2). Esta atuação depende diretamente da Tesouraria, que, como mencionado na seção 1.1.2, é a área responsável por fornecer uma base de preços para os produtos do banco.

Dentre a demanda dos clientes, surgiu o interesse no banco em que o autor trabalha por compra de opções sobre juros a termo. Esta opção visa fornecer proteção ao seu comprador em relação à variação da taxa de juros futura. Um exemplo prático de que tipo de situação real se configuraria em uma opção sobre juros a termo é a de um cliente que possui uma dívida com pagamentos de juros e amortizações sobre o principal mensais, com taxa de juros flutuantes equivalente ao CDI apurado no período, e recorre ao banco com o desejo de limitar a taxa de juros aferida sobre o principal em certas parcelas da dívida, estabelecendo um limite (teto).

Suponha que no dia 02/01/2015 o CDI diário encontra-se em 12% a.a.⁸, e o cliente deseja estabelecer um teto de 14% a.a. para o pagamento de juros da parcela entre os dias 01/07/2015 e 01/08/2015. O banco cobra um prêmio para aceitar estabelecer este limite no contrato. Assim, caso os juros reais apurados no período sejam equivalentes a uma taxa abaixo de 14% a.a., o cliente não ganha nada com a opção comprada, e tem um prejuízo líquido igual ao valor do prêmio. Caso os juros reais apurados equivalham a uma taxa de 15% a.a., o cliente “exerce a opção” e limita os juros pagos na dívida em 14% a.a., fazendo com que a operação gere resultado equivalente à diferença da aplicação das taxas sobre o principal, descontando-se o prêmio pago inicialmente para obtenção do resultado líquido. Assim, caso os juros reais apurados do período sejam abaixo de 14% a.a., o cliente perde apenas o valor do prêmio, e caso seja acima, ganha proporcionalmente à diferença de taxas. Esta estrutura de resultado no vencimento é idêntica à ilustrada na figura 6, de opções, onde S_t , neste caso, se refere ao fator dos juros apurados no período.

Este tipo de opção é principalmente útil para empresas com dívidas de alto porte e longo prazo, quando não há desejo de se contratar uma proteção contra a variação na taxa de juros de curto prazo, mais previsível, mas deseja-se contratar proteção contra movimentos adversos

⁸ 12% ao ano. Os métodos de capitalização de juros e as convenções adotadas são explicados na seção 2.1.2.

na taxa de juros em um prazo longo, menos previsível. Assim, as empresas podem dispender de um valor em prêmio hoje para diminuir a necessidade de preocupação com a taxa de juros no longo prazo, permitindo-as que se foquem e se especializem em seu negócio principal (*core business*), aumentando sua produtividade e diminuindo gastos com processos de gerenciamento de riscos.

Para garantir que o preço cobrado das empresas que buscam este produto pelas instituições financeiras não seja abusivo, é fundamental que se desenvolva concorrência no mercado. Este objetivo só é alcançado quando estudos relevantes na área são realizados, fornecendo confiança a um número grande de instituições para que aprovelem a integração do produto em seu portfólio, ofereçam-no a seus clientes e aceitem tomar os riscos relacionados.

Para o fornecimento do preço de um produto, a Tesouraria utiliza como referência os preços de ofertas de compra e de venda de agentes do mercado para o mesmo tipo de ativo registrados nas plataformas da Bolsa de Valores. Esta opção, entretanto, não é negociável em Bolsa, fazendo com que o método usual de utilizar os preços de mercado para o mesmo ativo não funcione. Desta maneira, surge uma dificuldade de se encontrar qual seria o seu preço justo⁹. Há, todavia, alguns ativos com características similares (descritos na seção 3.2), que podem ser usados como base para se estimar o preço da opção sobre juros a termo. Entretanto, não se encontrou qualquer estudo sobre o relacionamento dos preços destes ativos similares com o da opção desejada¹⁰, gerando maior grau de incerteza na precificação.

A Tesouraria, ao precificar a opção com valor acima de seu preço justo, arrisca perder o interesse do cliente no produto, que pode desistir da compra ou recorrer a um concorrente, diminuindo a capacidade competitiva do banco, e ao precificar a opção com valor abaixo de seu preço justo, aumenta o risco de mercado do banco, recebendo uma quantia em prêmio que não compensa os riscos envolvidos na operação. Verificou-se que é, assim, fundamental que se saiba qual o preço justo de mercado para o ativo e como realizar a proteção dos riscos utilizando-se de ativos negociados no mercado.

⁹ Preço justo é o preço que o mercado atribui para determinado ativo, refletindo as expectativas de todos os atuantes. É normalmente tomado como o último preço em que houve registro de negócio fechado.

¹⁰ Foram encontrados estudos sobre precificação de opções sobre IDI no Brasil, como os de Barbachan e Ornelas (2003) e Senger (2008), assim como outras opções similares negociadas no exterior, como o de Gupta e Subrahmanyam (2004), mas nenhum deles se aplica diretamente à opção aqui estudada.

Assim, decidiu-se estudar, neste Trabalho de Formatura, métodos de precificação desta opção e a eficiência na realização de proteção aos riscos envolvidos em cada método, tendo como prisma o mercado de derivativos brasileiros e a realidade prática das operações, com o objetivo final de aplicar os métodos desenvolvidos na empresa, desenvolver o conhecimento do autor na área e obter o diploma de graduação.

3 OBJETIVO E METODOLOGIA

3.1 OBJETIVO

O objetivo deste trabalho é estudar alternativas de métodos de precificação para uma opção sobre juros a termo no mercado de derivativos brasileiro e realizar testes e análises para se definir qual apresenta um resultado mais compatível com os preços de mercado. Mais do que uma análise teórica, busca-se qual método é mais viável de aplicação prática, de modo a aplicar os resultados obtidos no ambiente de trabalho do autor. Para isto, são simuladas operações de proteção ao risco (hedge), prática comum na atuação do autor como *Market Maker*, e verifica-se a eficiência dos métodos neste quesito para diferentes cenários.

Os preços atribuídos a certos ativos pelo mercado são tomados como justos, de modo que não se pretende especular contra eles, mas, ao contrário, usá-los como base para a definição do preço da opção estudada.

Por fim, o trabalho objetiva evidenciar a capacidade abrangente de atuação do Engenheiro de Produção no mercado de trabalho, que possui capacidade de adaptar os conhecimentos obtidos no curso a diferentes cenários, diferenciando-se por uma visão holística e crítica na elaboração de modelos e análise dos resultados.

3.2 METODOLOGIA

Para que fosse possível o alcance do objetivo proposto neste trabalho, foi definida uma metodologia de trabalho que visa integrar as características peculiares do mercado de derivativos brasileiro, a prática do autor em seu ambiente de trabalho e os conceitos teóricos utilizados como base. Esta metodologia se resume em algumas etapas que não foram, necessariamente, realizadas de maneira separada e definitiva, mas concomitantemente, e sendo revisadas ao longo do ano pelo autor, que podem ser definidas como:

- a) pesquisa de conceitos teóricos sobre o funcionamento de derivativos, em especial opções;
- b) considerações práticas do mercado de derivativos brasileiro e verificação da aplicabilidade dos conceitos teóricos levantados;

- c) formulação de hipóteses para resolução do problema;
- d) desenvolvimento de modelos para precificação e proteção ao risco das opções estudadas;
- e) simulação em situação real de mercado e análise de eficiência, assim como validação dos modelos e hipóteses adotadas;
- f) análise de resultado, com encontro de possíveis erros e possível refinamento do modelo.

4 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

4.1 O MERCADO DE JUROS NO BRASIL

Para se falar de opções sobre juros no Brasil, primeiramente é preciso ressaltar como é formada a expectativa do mercado em relação à taxa de juros de determinado período no país.

Oito vezes ao ano, diretores do Banco Central do Brasil se reúnem no Comitê de Política Monetária (Copom) para decidir a chamada meta da taxa Selic. Esta é a taxa de financiamento para operações de um dia (*overnight*), registradas no Sistema Especial de Liquidação e Custódia (Selic). Estas operações são realizadas utilizando-se de lastro títulos públicos do Governo, o que faz com que o risco final desta operação acabe sendo efetivamente o do Governo não honrar sua dívida, de modo que essa taxa sirva de referência para as demais taxas na economia.

Entre estas taxas, se destaca a taxa de Certificados de Depósito Interbancário (CDI) *overnight*. Estes são títulos emitidos entre instituições financeiras com o objetivo de gerar captação ou aplicar recursos excedentes e registrados nos terminais da Central de Custódia e de Liquidação Financeira de Títulos (Cetip). A própria Central calcula e divulga a taxa média destes certificados negociados em cada dia, e, como costumeiro no mercado, o termo CDI será empregado como menção à taxa média diária dos CDIs registrados no terminal, calculada pela Cetip. Esta taxa também serve como referência no Brasil e é muitas vezes adotada pelos bancos como custo de oportunidade das aplicações, acompanhando sempre de maneira próxima a taxa Selic.

As expectativas quanto às taxas futuras de juros adotadas pelo mercado dependem, portanto, diretamente da visão dos tomadores de preço em relação às decisões futuras dos integrantes do Copom. Essas expectativas são refletidas nas negociações diárias e em tempo real realizadas na Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F), onde agentes tomam posições compradas ou vendidas em contratos de Futuro de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia (DI1)¹¹ para datas de vencimento padronizadas (primeiro dia útil de cada mês).

¹¹ Características técnicas retiradas do site da BM&F, disponível em <http://www.bmfbovespa.com.br/pt_br/produtos/listados-a-vista-e-derivativos/juros/futuro-de-taxa-media-de-depositos-interfinanceiros-de-um-dia.htm>, acesso em 07/09/2016.

Estes contratos negociam qual será a média geométrica, devido à capitalização composta dos juros, das taxas de CDIs diárias calculadas e divulgadas pela Cetip, compreendidas entre a data de negociação, inclusive, e a data de vencimento, exclusive. Ou seja, negociam qual a expectativa dos agentes quanto ao acúmulo de juros das operações de CDI *overnight* entre hoje e a data de vencimento do contrato, e são usados como referência quando se pretende estimar a taxa de juros efetiva em um período futuro. O Método de apuração de resultado de uma posição em contrato futuro de DI1, com exemplo numérico, é descrito em detalhes na seção 3.3.3.2.

4.2 OPÇÕES SOBRE JUROS NEGOCIADAS EM BOLSA E A DIFERENÇA EM RELAÇÃO À ESTUDADA

A opção estudada tem como ativo subjacente do contrato uma taxa de juros a termo. Sendo T_0 a data de hoje, são considerados juros a termo os juros acumulados observados no período entre T_1 e T_2 , onde $T_0 < T_1 < T_2$. As características gerais e aplicações práticas desta opção já foram definidas na seção 2.

Na seção 5 (revisão de literatura) são levantados quais os métodos mais usados pelos agentes do mercado para precificar opções. Convencionou-se, tanto no mercado interno quanto no externo, negociar os preços das opções em função do método de Black & Scholes. Neste método, cujos detalhes são expressos na seção 5.3.3, todas as variáveis são observáveis e de fácil definição, com exceção da **Volatilidade**, que representa o **desvio padrão** do ativo subjacente. Consequentemente, com todas as outras variáveis em mãos, basta apenas que se defina a Volatilidade Implícita que será utilizada no cálculo para que o método devolva um preço para a opção, de modo que, muitas vezes, em vez de os agentes negociarem diretamente o preço da opção, negociam sua volatilidade. Assim, mesmo que um agente decida utilizar outro método para encontrar seu preço justo para a opção, deverá negociá-la no mercado em termos de volatilidade do método de Black & Scholes.

Nas plataformas da BM&F, são negociadas as Opções de Compra (ou Venda) sobre Índice de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia (IDI)¹². Este índice possui valor de 100.000 pontos na data de sua criação, e é corrigido diariamente pela taxa CDI corrente. Estas opções negociam o valor final do índice, na data de vencimento da opção, partindo-se da data de hoje (detalhes quanto à apuração de resultado para uma opção sobre IDI são descritos na seção 3.3.3). Por ser uma opção altamente negociada, é fácil para o atuante determinar o seu preço justo, bastando-se observar a volatilidade que o mercado aplica em sua precificação.

Retirar a volatilidade implícita dos preços dados atualmente pelo mercado é um método que não se aplica às Opções sobre Juros a Termo, foco deste estudo, pois, por ser um instrumento novo, seu preço não pode ser observado no mercado da Bolsa.

Outro instrumento existente no mercado que pode ser usado para comparação, negociado na Bolsa, é a Opção de Compra (ou Venda) sobre Futuro de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia (conhecido como *Swaption*)¹³. A *Swaption* nada mais é do que uma opção cujo ativo subjacente é o Contrato Futuro de DI1, descrito na seção 2.1.1. Os contratos de DI1 que podem ser objeto subjacente das *Swaptions* são os com vencimentos de 3 meses, 6 meses ou 12 meses à frente do vencimento da opção (ou com prazo variável em função do vencimento mais líquido). Portanto, os juros de interesse na negociação da opção dizem respeito à taxa média de CDI compreendida entre a data de vencimento da opção e o vencimento do Contrato Futuro de DI1 (maiores detalhes quanto à apuração de resultado para uma *Swaption* são descritos na seção 3.3.4).

A grande diferença entre as *Swaptions* e Opções sobre Juros a Termo, é que para a precificação de uma *Swaption*, considera-se apenas a volatilidade da estrutura de juros a termo até a data de vencimento do contrato, enquanto a Opção sobre Juros a Termo considera a volatilidade durante todo o prazo normal de uma *Swaption* mais o prazo ao qual os juros estão sendo efetivamente aplicados.

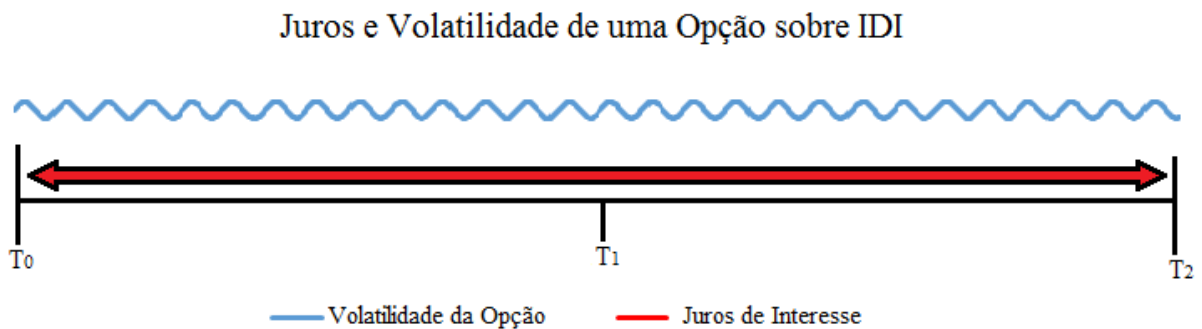
Para esclarecer as diferenças entre Opções sobre IDI, *Swaptions* e Opções sobre Juros a Termo, é apresentado o seguinte cenário: Sendo T_0 a data de hoje, T_1 uma data intermediária e

¹² Características técnicas retiradas do site da BM&F, disponível em <http://www.bmfbovespa.com.br/pt_br/produtos/listados-a-vista-e-derivativos/juros/opcoes-sobre-idi.htm>, acesso em 07/09/2016.

¹³ Características técnicas retiradas do site da BM&F, disponível em <http://www.bmfbovespa.com.br/pt_br/produtos/listados-a-vista-e-derivativos/juros/opcoes-sobre-futuro-de-di.htm>, acesso em 07/09/2016.

T_2 uma data final, as peculiaridades destes três instrumentos podem ser expressas através de uma linha do tempo. A figura 8 mostra o período de apuração da volatilidade sobre o ativo objeto da opção (taxa de juros de interesse) para uma opção sobre IDI que inicia em T_0 e vence em T_2 , ou seja, negocia em T_0 qual vai ser o valor final do Índice em T_2 .

Figura 8 - Comportamento de uma Opção sobre IDI

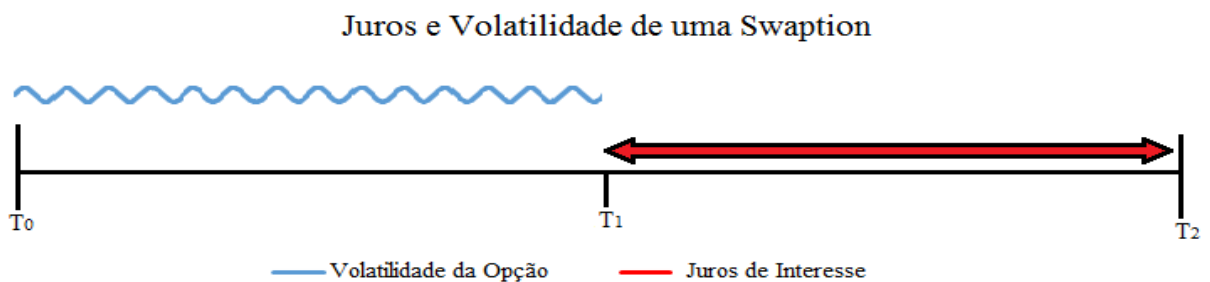


Fonte: Elaboração do autor

Percebe-se que o período de apuração da volatilidade é o mesmo período de vida da opção. Isto é verdade para todas as opções europeias. A taxa de juros média negociada pela opção (ativo objeto) é a taxa acumulada durante todo o período entre T_0 e T_2 . Ou seja, todos os dias, ao mesmo tempo em que a opção vai perdendo período de apuração de volatilidade, ela também perde parte da taxa de juros de apuração, fixando parte do resultado no índice. O resultado é apurado então em T_2 , pela taxa **real observada** no período de interesse.

Na figura 9, exemplifica-se o comportamento de um Swaption que se inicia em T_0 , vence em T_1 , e negocia a taxa de juros a termo entre T_1 e T_2 .

Figura 9 - Comportamento de uma Swaption



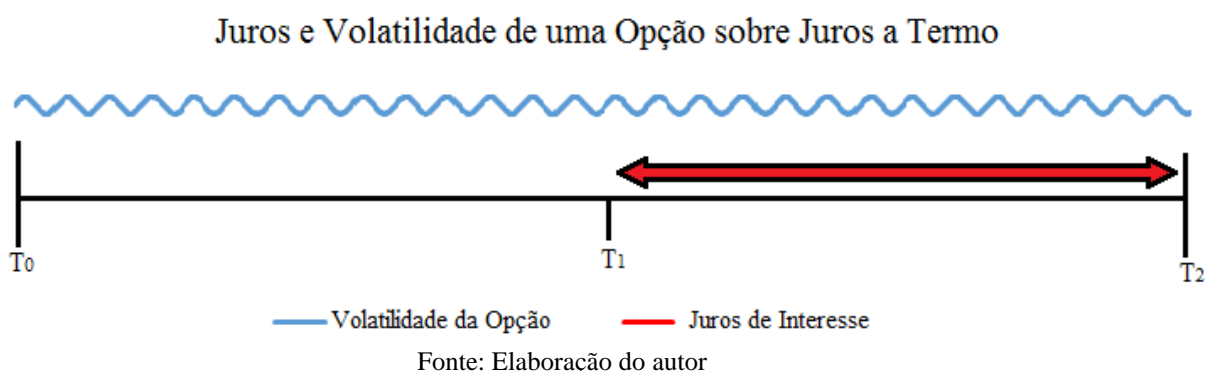
Fonte: Elaboração do autor

A Swaption nada mais é do que uma opção europeia, assim o período de apuração da volatilidade é o mesmo que sua vida útil, entre T_0 e T_1 . Já a taxa de juros negociada pela

opção é a taxa a termo entre T_1 e T_2 . Ou seja, partindo-se de T_0 , todos os dias há apuração em relação à variação da volatilidade sobre o ativo objeto, porém, ao se atingir T_1 , a Swaption vence. Seu exercício (ou não) é determinado em T_1 , e é baseado na taxa a termo determinada pelo mercado neste momento, através dos preços correntes das negociações de contratos de DII, entre T_1 e T_2 . Ou seja, seu resultado é apurado em T_1 baseado na **expectativa** que o mercado está atribuindo para os juros entre T_1 e T_2 .

A figura 10 mostra como o comportamento de uma Opção sobre Juros a Termo difere das duas anteriores. Considera-se uma Opção sobre Juros a Termo com início em T_0 , vencimento em T_2 , e ativo objeto sendo a taxa de juros a termo entre T_1 e T_2 .

Figura 10 - Comportamento de uma Opção sobre Juros a Termo



Uma Opção sobre Juros a Termo tem o mesmo período de vida que uma IDI, e, portanto, o mesmo prazo de apuração para a volatilidade. Porém, ela negocia uma taxa a termo, como na Swaption. Isso gera complicações em sua precificação. Não se pode cotá-la como uma Swaption, pois se perde período de apuração de volatilidade – subestimar-se-ia¹⁴ o preço da opção. Também não se pode cotá-la como uma Opção sobre IDI, pois o ativo objeto é outro (e, portanto, sua volatilidade) e não há apuração de variação do índice, com fixação de parte do resultado, até que chegue em T_1 .

Apesar de as volatilidades implícitas para precificação de Opções sobre IDI e Swaptions poderem ser observadas no mercado, as diferenças mencionadas acima levam à hipótese inicial de que não se pode utilizar a mesma volatilidade de uma delas para precificar uma

¹⁴ Hipótese adotada inicialmente pelo autor, tendo em vista as características do método Black-Scholes de precificação de opções, que tende a aumentar o preço de uma opção quanto maior a sua volatilidade implícita e prazo para apuração da mesma.

Opção sobre Juros a Termo, sendo plausível supor que uma ponderação entre estas duas seja necessária, já que a opção estudada possui características de ambas.

4.3 APURAÇÃO DE RESULTADOS SOBRE DERIVATIVOS SOBRE TAXA DE JUROS NO BRASIL

Partindo-se do entendimento sobre os derivativos básicos (contratos a termo, contratos futuros, opções e swaps), cujas definições são fornecidas na seção 1.2.1, e da descrição dos derivativos sobre taxa de juros negociados em Bolsa no Brasil (contrato futuro de DI1, opção sobre IDI e opção sobre contrato futuro de DI1), esta seção visa descrever, com exemplos numéricos, como os resultados de posições são calculados para os agentes do mercado.

4.3.1 Convenções e Métodos de Capitalização dos Juros no Brasil

Por convenção, o prazo para aplicação de juros no Brasil é contado em **dias úteis**, considerando-se 21 dias úteis para o período de um mês e 252 para o de um ano. Além disto, os juros são contabilizados de maneira composta, ou seja, há a incidência de juros sobre juros. Assim, a fórmula geral para obtenção do fator multiplicativo dos juros aplicados a um principal é:

$$Fator = (1 + i)^T \quad (11)$$

Onde:

T = Prazo, contado a partir de determinada base

i = Taxa de juros na mesma base de T

Também por convenção, costuma-se usar os juros em sua forma anualizada, assim, para saber o fator multiplicativo para certo número de dias úteis, utiliza-se a fórmula:

$$Fator = (1 + i_{aa})^{\frac{du}{252}} \quad (12)$$

Onde:

du = Quantidade de dias úteis

i_{aa} = Taxa de juros anualizada

Portanto, o Fator Diário, por exemplo, pode ser obtido substituindo-se du por 1. Ao longo deste texto, a não ser que expresso o contrário, assume-se que todas as taxas de juros são em formato anualizado e capitalizadas de maneira composta. Um principal rentabilizado a uma taxa de 13% ao ano por 63 dias úteis (ou três meses) possui um fator multiplicativo de:

$$Fator = (1 + 13\%_{aa})^{0,25ano} = (1 + 13\%)^{\frac{63}{252}} = 1,03103 \quad (13)$$

O que equivale a dizer que a aplicação rendeu 3,103% no período.

4.3.2 Apuração de Resultado em Posição de Contrato Futuro de DI1

A apuração de resultado de uma posição em contrato futuro de DI1 negociado em Bolsa segue as regras estabelecidas pela BM&F¹⁵. Como descrito na seção 3.1, estes contratos negociam qual será a média geométrica (devido à capitalização composta dos juros no Brasil) das taxas de CDIs diárias calculadas e divulgadas pela CETIP, compreendidas entre a data de negociação, inclusive, e a data de vencimento, exclusive. Ou seja, negociam qual a expectativa dos agentes quanto ao acúmulo de juros das operações de CDI *overnight* entre hoje e a data de vencimento do contrato, e são usados como referência quando se pretende estimar a taxa de juros efetiva em um período futuro.

Os vencimentos são os primeiros dias úteis de cada mês negociado. Para se apurar o resultado, considera-se que o contrato vale 100.000 “pontos” em seu vencimento. O seu valor hoje é encontrado dividindo-se esta quantia de 100.000 pelo fator multiplicativo da taxa de juros negociada no contrato. O valor do contrato hoje é denominado PU (abreviatura para Preço Unitário).

Por exemplo, suponha que em 01/04/2015 o contrato futuro de DI1 para 04/01/2016 esteja sendo negociado a uma taxa de 13,80%. Como entre estas datas há 189 dias úteis, o valor do PU do contrato pode ser encontrado através da fórmula:

¹⁵ Disponíveis em <http://www.bmfbovespa.com.br/pt_br/produtos/listados-a-vista-e-derivativos/juros/futuro-de-taxa-media-de-depositos-interfinanceiros-de-um-dia.htm>, acesso em 10/10/2016.

$$PU = \frac{100.000}{(1+13,80\%)^{\frac{189}{252}}} = 90.759,75 \quad (14)$$

Percebe-se que o valor do PU é inversamente proporcional ao valor da taxa de juros. Como explicado na seção 1.2.2.2, em um contrato futuro, um atuante que esteja comprado em um contrato futuro deve apurar resultado positivo quando o valor do ativo subjacente sobe. Neste caso, o ativo subjacente é a taxa de juros. Assim, pode-se dizer que ao assumir uma posição comprada em taxa de juros (onde se espera que a taxa suba), o atuante assume uma posição vendida em PU (esperando que o PU caia).

Suponha que um atuante tenha realizado a compra do contrato estabelecido no exemplo anterior. Isto equivale a comprar a taxa a 13,80%, ou vender o PU a 90.759,75. Caso a taxa negociada suba para 13,85% no mesmo dia, o PU assume novo valor, PU' , de:

$$PU' = \frac{100.000}{(1+13,85\%)^{\frac{189}{252}}} = 90.729,86 \quad (15)$$

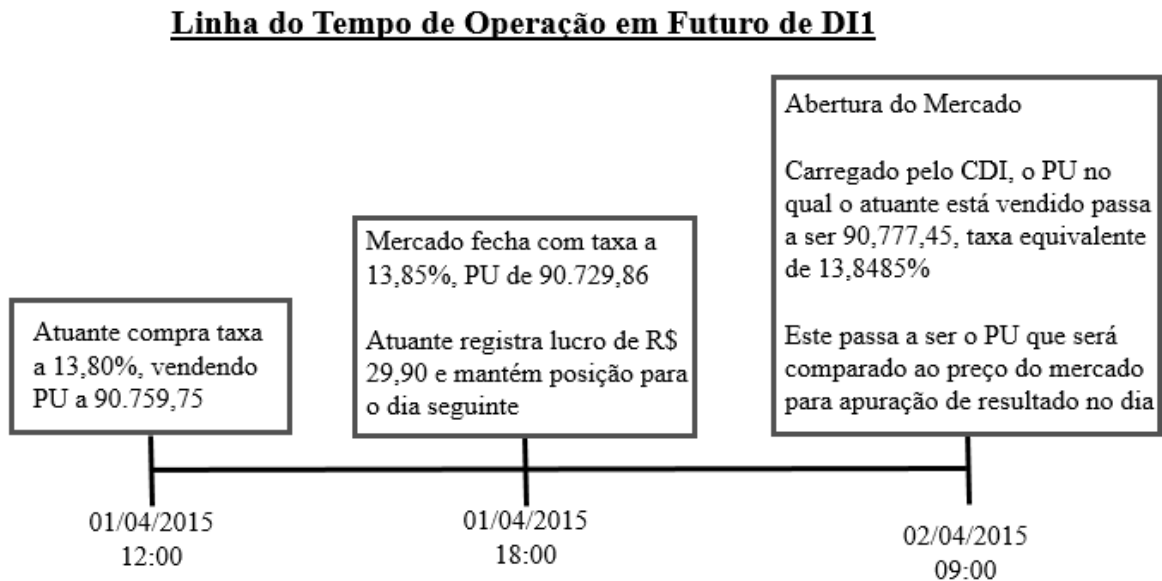
E o atuante apura resultado de 29,90 pontos. Como cada ponto deste contrato, como estabelecido pela BM&F, equivale a R\$1,00, o atuante apura resultado de R\$ 29,90.

Contratos carregados de um dia para o outro sofrem o ajuste do CDI diário. Ou seja, com CDI em 14,13%, se no exemplo dado o atuante mantiver sua posição de um dia para o outro, ele recebe o resultado da operação naquele dia, R\$29,90, e inicia o dia seguinte com uma posição vendida em PU, cujo valor pode ser calculado como PU_{D+1} :

$$PU_{D+1} = 90.729,86 * (1 + 14,13\%)^{\frac{1}{252}} = 90.777,45 \quad (16)$$

Este PU, em 02/04/2015, equivale a uma taxa de 13,8485%. Assumindo-se que as operações para contrato futuro de DI1 na BM&F tenham início às 09:00 e se encerrem às 18:00 de cada dia, é possível montar uma linha do tempo para a operação acima descrita:

Figura 11 - Linha do tempo em operação de Futuro de DI1



Fonte: Elaborado pelo autor

Percebe-se, portanto, que neste tipo de contrato a apuração de resultado (fluxo de caixa) para o atuante é realizada dia a dia, onde o PU de uma posição assumida hoje é utilizado para o cálculo do resultado hoje, e um novo PU é calculado para a apuração de resultados no dia seguinte.

4.3.3 Apuração de Resultado em Opção sobre IDI

Esta opção tem como ativo subjacente o índice de taxa média de depósitos interfinanceiros de um dia – IDI. Este índice possui valor de 100.000 pontos em sua data base e cresce todos os dias, multiplicado pelo fator diário do CDI.

Utilizando-se do exemplo da seção anterior, imagine que a data atual é 01/04/2015 e deseja-se especular a taxa de juros (CDI) acumulada entre hoje e 04/01/2016, cuja expectativa do mercado, refletida pelos contratos de DI1, se encontra em 13,80%. Ao comprar o contrato de DI1, o atuante fica exposto a um grande prejuízo caso a taxa caia muito. Uma alternativa é comprar uma opção de compra (*call*) sobre IDI para 04/01/2016, onde o prejuízo se limita ao prêmio pago inicialmente. Se o índice se encontra em 160.000 pontos na data de hoje, uma taxa média de 13,80% no período levaria o índice em 04/01/2016 a:

$$IDI_{jan/16} = 160.000 * (1 + 13,80\%)^{\frac{189}{252}} = 176.289,59 \quad (17)$$

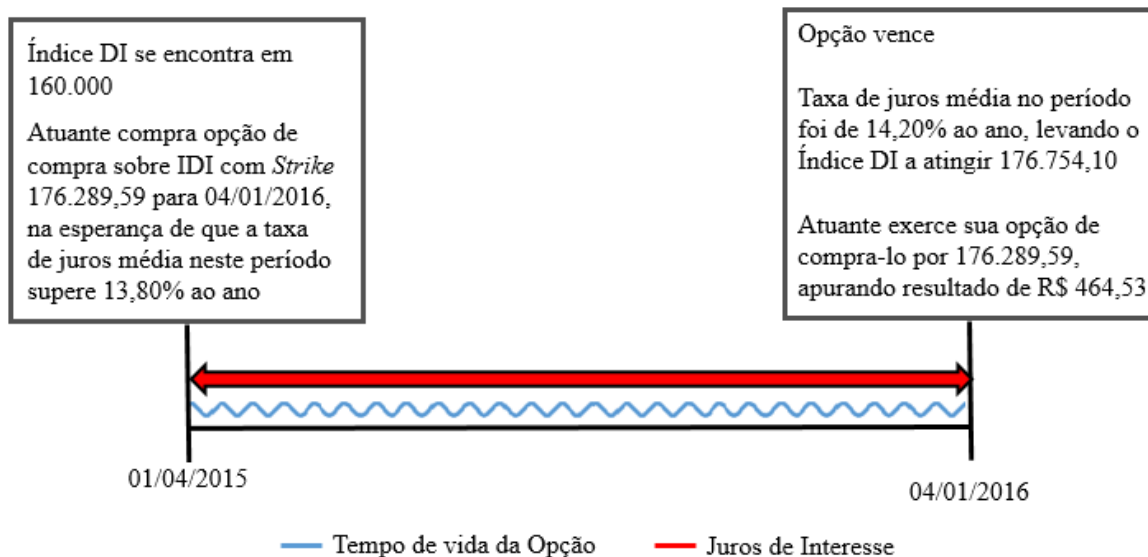
Pode-se comprar uma opção de compra sobre IDI com vencimento em 04/01/2016 com Strike de 176.289,59. Desta maneira, caso a taxa de juros média apurada no período seja superior a 13,80%, o índice obterá valor no vencimento superior ao Strike, e a opção poderá ser exercida. Supondo-se que a taxa de juros média real no período tenha sido de 14,20%, a IDI em 04/01/2016 terá valor de:

$$IDI_{jan/16} = 160.000 * (1 + 14,20\%)^{\frac{189}{252}} = 176.754,10 \quad (18)$$

O atuante exerce a opção, e apura lucro bruto de 464,53 pontos. Como cada ponto equivale a R\$1,00, segundo regras estabelecidas pela BM&F¹⁶, o atuante recebe R\$464,53 ao exercer a opção. O lucro líquido é obtido descontando-se deste valor o prêmio pago inicialmente pela posição. É possível montar uma linha do tempo para a operação acima descrita:

Figura 12 - Linha do Tempo em Opção sobre IDI

Linha do Tempo de Opção de Compra sobre IDI



Fonte: Elaborado pelo autor

Nesta, assim como nas outras opções abordadas neste trabalho, o fluxo de caixa acontece apenas em dois momentos: na data inicial, com pagamento do prêmio, e na data final, com o

¹⁶ Disponíveis em <http://www.bmfbovespa.com.br/pt_br/produtos/listados-a-vista-e-derivativos/juros/opcoes-sobre-idi.htm>, acesso em 10/10/2016.

possível exercício da opção. Esta é uma característica importante quando se considera o custo do dinheiro no tempo.

4.3.4 Apuração de Resultado em Opção sobre Contrato Futuro de DI1 (Swaption)

A opção sobre contrato futuro de DI1¹⁷, ou Swaption, nada mais é do que uma opção cujo ativo subjacente é um contrato futuro de DI1 como definido na seção 3.3.2. Os contratos de DI1 que podem ser objeto subjacente das Swaptions são os com vencimentos de 3 meses (tipo I), 6 meses (tipo II) ou 12 meses à frente do vencimento da opção (tipo III).

Suponha que um atuante em 01/04/2015 compra uma Swaption de compra do tipo I que vence em 01/10/2015. Esta opção negocia o contrato futuro de DI1 para 3 meses à frente do vencimento da opção, ou seja, o contrato futuro de DI1 com vencimento em 04/01/2016. Suponha ainda que o Strike definido em contrato é uma taxa de juros de 12,70%.

Assim, caso em 01/10/2015 o contrato futuro de DI1 esteja sendo negociado e uma taxa acima do Strike de 12,70%, o atuante exerce a opção, obtendo o direito de comprar o contrato futuro de DI1 (o que equivale a vender o PU) no preço de Strike. Supondo-se uma taxa no dia do vencimento em 13,30%, calcula-se o lucro bruto (sem descontar o pagamento do prêmio) do atuante que exerce a opção pela diferença dos valores de PU entre as duas taxas, como definido na seção 3.2.2:

$$Lucro_{Bruto} = PU_{Strike} - PU_{Mercado} = \frac{100.000}{(1+12,70\%)^{\frac{63}{252}}} - \frac{100.000}{(1+13,30\%)^{\frac{63}{252}}} = R\$ 128,75 \quad (19)$$

O termo Swaption surge por esta opção poder ser entendida como uma opção sobre um Swap. No caso de uma opção de compra, a opção dá o direito ao seu detentor de, no vencimento da mesma, assumir uma posição em um Swap, onde ele paga a taxa de juros definida pelo Strike e recebe a taxa de mercado para o contrato DI1 que a opção diz respeito, aplicadas sobre os respectivos PUs.

Uma linha do tempo pode ser montada para representar a operação acima descrita:

¹⁷ Especificações disponíveis em <http://www.bmfbovespa.com.br/pt_br/produtos/listados-a-vista-e-derivativos/juros/opcoes-sobre-futuro-de-di.htm>, acesso em 10/10/2016.

A opção sobre juros a termo pode ser entendida como uma mescla destas duas opções. Ela negocia os mesmos juros que a Swaption (neste caso, juros a termo entre 01/10/2015 e 04/01/2016), mas tem o mesmo período de vida da opção sobre IDI, ou seja, nasce em 01/04/2015 e vence em 04/01/2016. Isto faz com que sua liquidação dependa do valor dos juros reais apurados, e não uma expectativa. Esta característica gera impactos em sua precificação (definição do prêmio), não sendo possível utilizar o mesmo preço atribuído à Swaption ou à opção sobre IDI, sendo necessário o estudo de métodos para precifica-la.

Para a apuração de resultado da opção, se considera um índice semelhante ao IDI. Este índice, elaborado pelo autor na concepção da opção, vale 100.000 até o início de apuração dos juros de interesse, e acumula o CDI até a data de vencimento.

Imagine que, assim como no exemplo da seção anterior, um atuante, em 01/04/2015, queira se proteger de variações na taxa de juros no futuro, entre 01/10/2015 e 04/01/2016, mas, diferentemente da Swaption, ele não quer que seu resultado seja apurado baseado em uma expectativa de mercado, mas sim nos juros reais apurados durante o período de interesse. Ele pode comprar uma opção de compra de juros a termo. Com desejo de apurar resultado para uma taxa média efetiva maior que 12,80% neste período, que possui 63 dias úteis, ele compra a opção com Strike de:

$$Strike_{estabelecido} = 100.000 * (1 + 12,80\%)^{\frac{63}{252}} = 103.056,95 \quad (20)$$

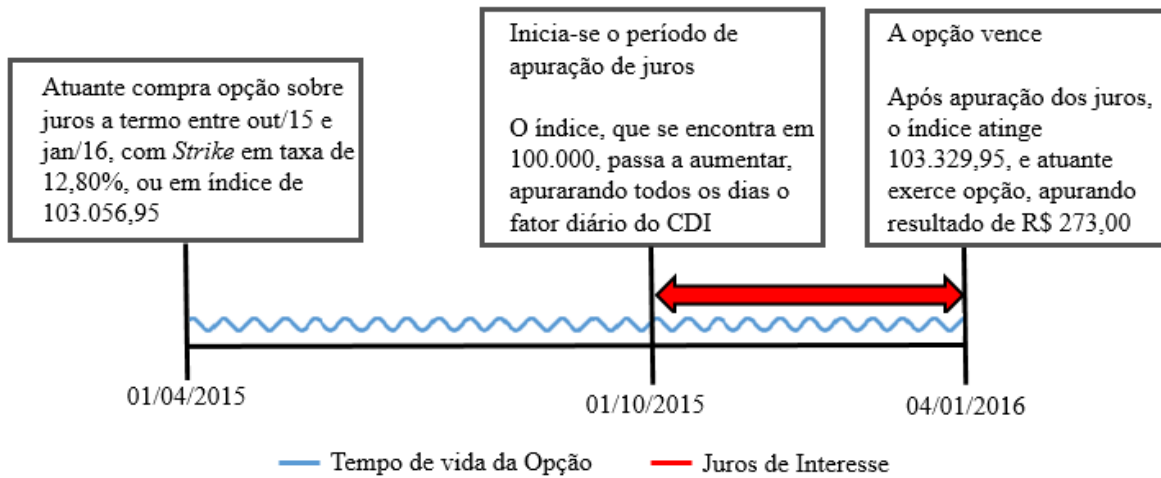
Neste caso, em 01/04/2015 ele paga ao vendedor da opção um prêmio pela mesma, e a carrega até outubro. De abril até outubro, não se atingiu o período de juros de interesse, de modo que o índice não apura juros, permanecendo em 100.000. Atingindo-se outubro, em vez de exercer a opção baseando-se no futuro de DI1 para janeiro, como na Swaption, o atuante continua carregando-a, e o índice passa a crescer, apurando o fator multiplicativo do CDI diário. Caso, no vencimento da opção, a taxa efetiva observada entre os períodos de outubro e janeiro seja equivalente a 14% ao ano, o índice se encontrará em 103.329,95. Assim o atuante exerce a opção de comprá-lo pelo preço de Strike, apurando lucro bruto (sem considerar o prêmio) de:

$$Lucro_{Bruto} = 103.329,95 - 103.056,95 = R\$ 273,00 \quad (21)$$

Uma linha do tempo pode ser montada para resumir a operação:

Figura 14 - Linha do Tempo de Opção Sobre Juros a Termo

Linha do Tempo de Opção Sobre Juros a Termo



Fonte: Elaborado pelo autor

Assim como nas outras opções, os fluxos de caixa ocorrem na data de início e vencimento da opção, e a existência do índice permite que ela seja liquidada pela verificação dos juros reais observados no período de interesse.

5 REVISÃO DA LITERATURA

Esta seção visa apresentar o referencial teórico utilizado pelo autor no estudo do problema proposto e no desenvolvimento dos métodos de precificação da opção.

5.1 ATUANTES DO MERCADO

Hull (2012, p.10) cita três categorias de atuantes no mercado: *hedgers*, especuladores e arbitadores.

5.1.1 Hedgers

Hedgers são atuantes que visam realização de uma operação conhecida como hedge, que se caracteriza por uma operação financeira visando eliminar ou reduzir o risco de prejuízos advindos de movimentações imprevistas em preços de ativos do mercado.

Por exemplo, um atuante no Brasil que possui uma dívida dolarizada, no valor de US\$ 500.000 para ser paga em um prazo de 60 dias corridos, está exposto à variação cambial. Com a cotação da moeda americana estando em R\$ 3,00 por unidade, sua dívida equivale a R\$ 1.500.000; com a cotação em R\$ 3,10 por unidade, sua dívida equivale a R\$ 1.550.000. Percebe-se que, para cada centavo de variação para cima na cotação do dólar, sua dívida equivalente em reais sobe R\$ 50.000. Visando eliminar este risco, o atuante pode realizar uma compra de dólar a termo, com um volume em contrato de US\$ 500.000 e prazo para 60 dias.

Assim, pela fórmula de resultado para uma posição comprada em um contrato a termo, apresentada na seção 1.2.2.1, verifica-se que, para cada centavo de variação para cima na cotação, o atuante passa a ganhar os mesmos R\$ 50.000 que perdeu com o aumento de sua dívida, neutralizando totalmente o seu risco cambial. A operação de hedge não visa, portanto, a apuração de lucros ou prejuízos, mas a eliminação de riscos envolvidos em operações de mercado, assumindo posições opostas.

5.1.2 Especuladores

Enquanto hedgers procuram diminuir sua exposição ao risco de mercado, especuladores estão dispostos a tomar este risco, com expectativa de lucro com a movimentação dos preços negociados. Um especulador que acredita que o preço de um ativo subirá, pode comprar este ativo, para vendê-lo no futuro e lucrar a diferença. Ressalta-se, claro, que há um risco implícito do preço do ativo não seguir o rumo esperado pelo especulador, gerando prejuízo na operação. Estes atuantes são especialmente importantes para garantir uma liquidez de mercado, gerar marcações de expectativas de preços e assumir riscos indesejáveis por outros.

5.1.3 Arbitradores

Arbitradores representam um grupo de operadores que visam a realização de lucros sem exposição ao risco de variação do mercado. Uma adaptação do exemplo dado por Hull (2012, p.15) pode ser dada. Suponha que exista uma ação sendo negociada tanto na BM&F e na New York Stock Exchange (NYSE). Na BM&F, esta ação é cotada a R\$ 100,00, enquanto na NYSE a ação é cotada a US\$ 25,00, em um momento onde a taxa de câmbio se encontra em R\$ 3,90 por dólar. O arbitrador pode simultaneamente comprar a ação na NYSE e vender a ação na BM&F, realizando um lucro instantâneo de (desconsiderando-se os custos de transação):

$$R\$ 100 - US\$ 25 \times \frac{R\$ 3,90}{US\$ 1,00} = R\$ 2,50 \quad (22)$$

Hull (2012, p.15) defende que oportunidades como esta não podem existir por muito tempo, já que o aumento da demanda por ações na NYSE e da oferta por ações na BM&F devem equilibrar o preço. Levando-se em consideração a quantidade de operadores no mercado e atratividade deste tipo de operação, encontrar oportunidades como esta se tornam tão difíceis que é razoável se assumir que tais oportunidades de arbitragem não existem para a elaboração de métodos de precificação de derivativos (princípio da não arbitragem).

5.2 PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Esta seção visa descrever o que são processos estocásticos e suas características. Com o objetivo de dar enfoque a processos estocásticos que são atribuídos ao comportamento de preços de ativos do mercado financeiro, utilizou-se Hull (2012)¹⁸ como literatura básica.

É dito que uma variável que sofre mudanças de maneira incerta no tempo segue um processo estocástico. Este processo pode ser discreto ou contínuo tanto em sua variação de valor da variável como no tempo. Apesar de este trabalho lidar com derivativos de juros, os conceitos de processos estocásticos são mais facilmente compreendidos tomando ações como exemplos, e os resultados obtidos podem ser expandidos para outros tipos de ativos.

5.2.1 Processo Markoviano

O processo Markoviano é um tipo específico de processo estocástico onde os estados futuros de uma variável dependem apenas do estado atual. Muitas vezes, assume-se que preços de ativos no mercado financeiro sofrem este tipo de processo, que pode ser contínuo ou discreto.

Um exemplo, adaptado de Hull (2012, p. 281), pode ser dado para ilustrar a aplicação da premissa de movimento Markoviano. Considere que uma variável siga um processo Markoviano. Suponha ainda que o valor atual dela é 10 e que a mudança em seu valor durante um ano é $\phi(0,1)$, onde $\phi(m,v)$ representa uma distribuição de probabilidade normalmente distribuída com média m e variância v^2 . Já que o processo é Markoviano, a mudança do valor em dois anos é a soma de duas distribuições normais, ambas com média zero e variância um, independentes. Quando adicionamos duas distribuições normais independentes, o resultado é uma distribuição normal cuja média é a soma das médias e a variância é a soma das variâncias. Portanto, para dois anos, a mudança no valor é $\phi(0,2)$, e o desvio padrão é $\sqrt{2}$.

De modo geral, a mudança no valor da variável que segue um processo Markoviano com distribuição de probabilidades normal em um período de tempo T vale $\phi(m,vT)$, onde v e T se encontram na mesma base de tempo.

¹⁸ HULL, J. C. **Options, Futures, And Other Derivatives**: Global Edition. Harlow: Pearson Education Limited, 2012. 8. ed. 847 p.

5.2.2 Processo de Wiener

O processo de Wiener é um tipo específico de movimento Markoviano, quando a mudança de valor na variável tem média zero e taxa de variância 1,0 por ano. Algumas vezes este tipo de movimento é chamado de Movimento Browniano.

Hull (2012) explica que, expressando formalmente, uma variável z segue um processo de Wiener se possui estas duas propriedades:

- a) A mudança em z durante um intervalo de tempo pequeno é:

$$\Delta z = \epsilon \sqrt{\Delta t} \quad (23)$$

Onde ϵ tem uma distribuição normal padronizada $\phi(0,1)$;

- b) Os valores de Δz para dois intervalos de tempo pequenos são independentes.

Assim, um exemplo adaptado de Hull (2012) mostra que, considerando a mudança na variável z durante um longo período T , com N intervalos de tempo pequenos onde:

$$N = \frac{T}{\Delta t} \quad (24)$$

A variação em z vale:

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^N \epsilon_i \sqrt{\Delta t} \quad (25)$$

E, seguindo as propriedades de soma de distribuições normais independentes, $z(T)-z(0)$ possui média 0, variância T e desvio padrão \sqrt{T} .

A média da variação para um processo estocástico é conhecida como *taxa de tendência* (ou *drift*), e a variância por unidade de tempo é conhecida como *taxa de variância*. O processo de Wiener básico, descrito até agora possui taxa de tendência zero e taxa de variância 1. A taxa de tendência valendo zero significa que o valor esperado de z em qualquer momento futuro é

o seu valor atual. Um *Processo de Wiener Generalizado* para a mudança no valor de uma variável x pode ser escrito como:

$$dx = a dt + b dz \quad (26)$$

Onde a e b são constantes. Como explicado por Hull (2012, p.284), o termo $a dt$ indica que o valor da variável x tem uma tendência de movimento a por unidade de tempo, e o termo $b dz$ pode ser interpretado como o componente de incerteza na variação do valor da variável, que adiciona um ruído ao movimento, e a quantidade de ruído é b vezes o processo de *Wiener*. Assim, para um movimento em intervalo grande T , tem-se que a mudança no valor de x possui uma média aT , variância b^2T e desvio padrão $b\sqrt{T}$.

5.2.3 Processo de Itô

Um processo de Itô pode ser definido como um processo generalizado de Wiener onde as variáveis a e b podem depender tanto de x como de t . Ou seja, a mudança na variável x segue um processo da forma:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz \quad (27)$$

Ou, de maneira discreta no tempo:

$$\Delta x = a(x, t)\Delta t + b(x, t)\epsilon\sqrt{\Delta t} \quad (28)$$

Este ainda é um processo Markoviano, pois apesar de Δx depender dos valores atuais de x e t , ele não depende dos valores históricos.

5.2.4 Processo Seguido Por Uma Ação

Não é válido assumir que uma ação segue um processo de Wiener, pois:

[...] o retorno percentual esperado demandado por investidores vindo uma ação é independente do preço da ação. Se investidores requerem 14% por ano de retorno esperado quando o preço da ação é \$10, então, *ceteris paribus*, eles também irão requerer 14% por ano de retorno esperado quando ele é \$50. (HULL, 2012, p.286, tradução nossa).

Assim, em vez de se assumir que a expectativa da tendência é constante, assume-se que o retorno percentual é constante. Ou seja, a taxa de tendência, como descrita nas seções anteriores, para S (preço atual da ação), vale μS . Isto indica que, em um intervalo pequeno de tempo Δt o aumento no valor de S esperado é $\mu S * \Delta t$. Ou seja:

$$\Delta S = \mu S \Delta t \quad (29)$$

E, no limite de $\Delta t \rightarrow 0$, temos:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt \quad (30)$$

O processo acima descrito não traz incerteza para o movimento do preço da ação. Ele tende a crescer μS por unidade de tempo. Por exemplo, assumamos que μ vale 10% ao ano e o preço de S vale \$100. Neste caso, o processo acima descrito indica que, em um ano, o preço da ação estará em \$110 e, em dois anos, em \$121. No mundo real, claro, há incertezas, então:

Uma suposição razoável é que a variabilidade do retorno percentual em um período curto de tempo, t , é o mesmo, independentemente do preço da ação. Em outras palavras, um investidor está tão incerto do retorno percentual quando o preço da ação é \$50 quanto quando é \$10. Isso sugere que o desvio padrão da mudança em um período curto de tempo, t , deve ser proporcional ao preço da ação. (HULL, 2012, p.287, tradução nossa).

Assim, o modelo para o processo de movimento no preço de uma ação pode ser escrito como:

$$dS = S\mu dt + S\sigma dz \quad (31)$$

Onde σ representa o desvio padrão, em porcentagem, do retorno da ação em um período com a mesma base utilizada para μ . Este desvio padrão é normalmente referenciado como **Volatilidade** do ativo, termo muito importante para este trabalho. Em um tempo discreto, pode-se adaptar a equação acima para:

$$\Delta S = S\mu \Delta t + S\sigma \Delta z \quad (32)$$

Ou

$$\Delta S = S\mu \Delta t + S\sigma \varepsilon\sqrt{\Delta t} \quad (33)$$

Esta equação mostra que $\Delta S/S$ é normalmente distribuído com média $\mu \Delta t$ e variância $\sigma^2 \Delta t$, o que implica que:

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t) \quad (34)$$

5.2.5 Simulação de Monte Carlo

Uma simulação de Monte Carlo para um processo estocástico como o descrito anteriormente pode ser obtido através de amostragens aleatórias de diversos resultados para o processo. Basicamente, simula-se um resultado aleatório para ε e verifica-se a respectiva mudança no preço do ativo. Por exemplo, imagine uma ação cujo preço inicial é \$100 e cujo retorno possui taxa de tendência de 15% ao ano e volatilidade (desvio padrão) de 30% ao ano. Considerando-se que um ano possui 252 dias úteis, a mudança no preço para cada dia útil pode ser encontrada por:

$$\Delta S = \left[0,15 * \left(\frac{1}{252} \right) \right] * S + \left[0,30 * \sqrt{\frac{1}{252}} \right] * S * \varepsilon \quad (35)$$

E uma tabela pode sumarizar uma simulação para movimentos em cinco dias úteis seguidos:

Tabela 1 – Exemplo de Simulação de Monte Carlo

Indicador	Taxa Anual	Taxa Diária
μ	15%	0,06%
σ	30%	1,89%

Dia Útil	Preço inicial do dia (\$)	Amostra aleatória de ε	Mudança do preço no dia (\$)
0	100	-0,23642167	-0,38727115
1	99,61272885	-0,657426614	-1,178314695
2	98,43441415	0,932024784	1,792377572
3	100,2267917	0,93987065	1,839875628
4	102,0666674	0,32956188	0,696438861
5	102,7631062		

Fonte: Elaborado pelo autor com base em Hull (2012)

Percebe-se que, nesta simulação, a ação atinge o dia útil 5 com o preço de \$102,76 . Por ser um processo de Markov, as amostras de ϵ são independentes entre si.

5.2.6 Processo Correlacionado

Seguindo as mesmas notações das seções anteriores, estuda-se o processo de movimento para duas variáveis, x_1 e x_2 que seguem processos estocásticos correlacionados. Suponha que os processos são de forma:

$$dx_1 = a_1 dt + b_1 dz_1 \quad \text{e} \quad dx_2 = a_2 dt + b_2 dz_2 \quad (36)$$

Onde dz_1 e dz_2 são processos de Wiener. Temos que suas versões discretas são:

$$\Delta x_1 = a_1 \Delta t + b_1 \epsilon_1 \sqrt{\Delta t} \quad \text{e} \quad \Delta x_2 = a_2 \Delta t + b_2 \epsilon_2 \sqrt{\Delta t} \quad (37)$$

Como indica Hull (2012, p. 290), se x_1 e x_2 possuem um coeficiente de correlação ρ não nulo, então ϵ_1 e ϵ_2 devem ser retirados de uma distribuição normal bivariada. Assim, obtém-se:

$$\epsilon_1 = u \quad \text{e} \quad \epsilon_2 = \rho u + \sqrt{1 - \rho^2} v \quad (38)$$

5.2.7 Lema de Itô

Este lema, apresentado primeiramente pelo matemático japonês Kiyosi Itô¹⁹ estabelece qual seria o comportamento de uma variável G que depende apenas do tempo t e de uma variável x que segue um processo de Itô, definido na seção 4.2.3. Assim, suponha que a variável x siga o seguinte processo de Itô:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz \quad (39)$$

O lema mostra que dG segue o processo:

¹⁹ Itô, K. On Stochastic Differential Equations. **Memoirs of the American Mathematical Society**, n. 4, p. 1–51, 1951.

$$dG = \left(\frac{\delta G}{\delta x} a + \frac{\delta G}{\delta t} + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 G}{\delta x^2} b^2 \right) dt + \frac{\delta G}{\delta x} b dz \quad (40)$$

Ou seja, $G(x, t)$ também segue um processo de Itô com taxa de tendência de $\left(\frac{\delta G}{\delta x} a + \frac{\delta G}{\delta t} + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 G}{\delta x^2} b^2 \right)$ e taxa de variância de $\frac{\delta G}{\delta x} b$. Este resultado se mostra extremamente importante no desenvolvimento deste trabalho.

5.2.7.1 A Propriedade Lognormal

Considere uma ação cuja mudança no preço segue o processo descrito pela equação 31. Definindo-se $G = \ln S$, temos:

$$\frac{\delta G}{\delta S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\delta^2 G}{\delta S^2} = -\frac{1}{S^2}, \quad \frac{\delta G}{\delta t} = 0 \quad (41)$$

E segue, pelo lema de Itô, que:

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz \quad (42)$$

Assim, pode-se assumir que $\ln S$ segue um processo de Wiener generalizado, e tem-se:

$$\ln S_t - \ln S_0 \sim \Phi \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right] \quad (43)$$

Ou

$$\ln \frac{S_t}{S_0} \sim \Phi \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right] \quad (44)$$

5.3 PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES

5.3.1 Precificação de Risco Neutro

Segundo Hull (2012, p.257), o princípio de precificação de risco neutro define que, quando precificando um derivativo, é válida a suposição de que os investidores são neutros em relação ao risco. Isto significa assumir que não exigem um retorno maior para ativos de maior risco. Claro, esta suposição não condiz com o mundo real, mas ainda assim não importa no momento de precificar um derivativo. Hull explica:

Precificação de risco neutro parece um resultado surpreendente quando é encontrado pela primeira vez. Opções são investimentos de risco. As preferências de risco de uma pessoa não deveriam afetar como elas são precificadas? A resposta a isto é que, quando nós estamos precificando uma opção em termos do preço da ação subjacente, as preferências de risco são indiferentes. Ao passo que investidores se tornam mais avessos ao risco, o preço das ações caem, mas as fórmulas que relacionam os preços das opções com os das ações continuam os mesmos. (HULL, 2012, p.257, tradução nossa).

Hull ainda cita duas características simplificadoras que este princípio gera na precificação de derivativos:

- a) o retorno esperado em qualquer investimento é o retorno livre de risco;
- b) a taxa de desconto utilizada para a expectativa de resultado de qualquer instrumento é a taxa livre de risco.

Em um mundo neutro ao risco, a precificação de qualquer derivativo no mercado financeiro, ou o encontro de seu valor justo, consiste em definir todos os possíveis resultados (pagamentos) que este instrumento pode gerar, durante toda a sua vida, ponderados por suas probabilidades de ocorrência e trazidos a valor presente por uma taxa de desconto (custo de oportunidade). Esta taxa, é a taxa de juros livre de risco, que funciona como taxa base de comparação para todas as outras taxas da economia.

Suponha que um derivativo seja definido de modo que existam n possíveis resultados R que ele pode gerar, dependendo de condições de mercado, cada um com sua probabilidade p . Neste caso, o preço justo deste derivativo, na data de hoje, será dado por:

$$Preço = \sum_{i=1}^n \frac{R_i * p_i}{(1+r_i)} \quad (45)$$

Onde r_i é a taxa de juros livre de risco para o respectivo prazo do possível resultado R_i .

Partindo-se do princípio da neutralidade ao risco, métodos de precificação de opções foram desenvolvidos e estudados ao longo das últimas décadas, e alguns deles são discutidos a seguir.

5.3.2 Precificação de opções através de Árvore Binomial

O modelo de precificação de opções através de árvore binomial foi primeiramente proposto por Cox, Ross e Rubinstein em 1979²⁰ e a literatura usada como referência para se retirar as premissas básicas do modelo é a fornecida por Hull (2012). Este modelo, apesar de simples (em seu formato básico aqui apresentado) e não ser aplicado no presente trabalho, é de fundamental importância para o entendimento dos demais, que podem ser considerados extensões deste.

O método da árvore binomial procura estudar os possíveis preços finais do ativo objeto no vencimento da opção, considerando dois movimentos básicos no valor do ativo – subida (*up*), com probabilidade de ocorrência p , e descida (*down*), com probabilidade $1-p$ – a cada intervalo de tempo ΔT . Basicamente, supõe-se que o ativo segue uma caminhada aleatória (*random walk*).

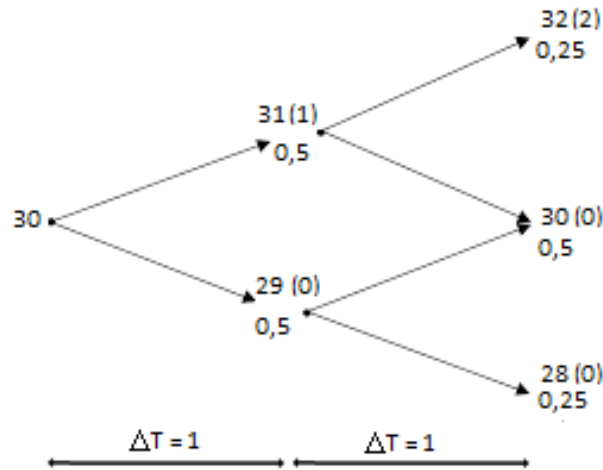
Para cada preço final, é, então, calculada a probabilidade total de ocorrência e atribuído um *payoff*. Somando-se os *payoffs* ponderados pela probabilidade de cada preço final do ativo, encontra-se o *payoff* esperado da opção no vencimento, bastando-se, apenas, trazê-lo a valor presente pela taxa de desconto para que se encontre o valor justo da opção na data de hoje.

Considere uma opção de compra com prazo $T=2$ e preço de Strike de 31 (ignora-se a unidade por enquanto). Se o preço inicial do ativo objeto vale 30, e ele sofre movimentos de *ups* e *downs* em 1 unidade para cada intervalo de tempo ΔT , ambos com probabilidade de 50% de

²⁰ COX, J. C.; ROSS, S. A.; RUBENSTEIN, M.. **Option Pricing: A Simplified Approach**. [S.I.]: Journal of Financial Economics, 1979, 7 v. 229 p.

ocorrência, uma árvore binomial pode ser montada para se calcular o valor justo da opção na data de hoje. A Figura 15 exemplifica este caso.

Figura 15 - Árvore Binomial – Em cada vértice tem-se: *Valor do ativo (payoff)*
Probabilidade de ocorrência



Fonte: Elaborado pelo autor com base em Hull (2012)

Desse modo, pode-se somar os *payoffs* esperados na data $T=2$ ponderados por sua probabilidade, resultando em:

$$E[\text{Payoff}_{T=2}] = 2 * 0,25 + 0 * 0,5 + 0 * 0,25 = 0,5 \quad (46)$$

Considerando-se, por exemplo, uma taxa de desconto de 12% por período, e uma capitalização composta de juros, obtêm-se o preço, ou valor justo, da opção na data de hoje:

$$\text{Preço}_{T=0} = \frac{0,5}{(1+12\%)^2} = 0,399 \quad (47)$$

O conceito pode ser estendido para n movimentos, através da fórmula:

$$\text{Preço}_{T=0} = (1+i)^{\frac{-K}{T_i}} * \sum_{i=0}^n \left(\frac{n!}{i!(n-i)!} * p^i * (1-p)^{n-i} \times \text{payoff}_{\text{tipo}} \right) \quad (48)$$

Onde:

$i = \text{Taxa de desconto}$

T_i = Período base da taxa de desconto

K = Período de vida da opção, na mesma base de T_i

p = Probabilidade de subida

$1 - p$ = Probabilidade de descida

$payoff_{call} = \text{Máximo}(S_T - K; 0) = \text{Máximo}(S_0 + u * i - d * (n - i) - K; 0)$

$payoff_{put} = \text{Máximo}(K - S_T; 0) = \text{Máximo}(K - S_0 + u * i - d * (n - i); 0)$

u = Tamanho do movimento de subida

d = Tamanho do movimento de descida

S_0 = Preço inicial do ativo objeto

K = Preço de strike da opção

A relação entre o modelo de árvore binomial com os apresentados nas próximas seções (simulação de Monte Carlo e Black e Scholes) é:

- a) o modelo de árvore binomial considera a possibilidade de movimentos discretos no preço (*up* e *down*) e no tempo (ΔT). Atribui as probabilidades e grandezas de cada movimento e devolve uma fórmula fechada;
- b) o modelo de simulação de Monte Carlo pode ser entendido como uma extensão que também assume movimento discreto no tempo (ΔT), porém contínuo no preço, ou seja, assume que, a cada intervalo de tempo ΔT , o preço se move de maneira normal com certa média (taxa de tendência) e variância (taxa de variância). Uma simulação gera um “caminho aleatório” para o preço do ativo até a data de vencimento da opção, devolvendo um resultado final. Com N simulações realizadas, o preço da opção por este modelo passa a ser a média dos resultados finais para as N simulações, chamado de resultado esperado, trazido a valor presente. Não devolve fórmula fechada e exige alta capacidade de processamento da máquina, pois N costuma ser da ordem de milhares;
- c) o modelo de Black e Scholes, por sua vez, pode ser entendido como uma extensão do modelo de simulação por Monte Carlo, quando N tende ao infinito. Assume continuidade no tempo e no preço e devolve uma fórmula fechada para a precificação.

5.3.3 Modelo Black&Shcoles de precificação de opções

O modelo desenvolvido por Black e Scholes, divulgado em um papel de 1973²¹, talvez seja o mais difundido e aplicado no mercado financeiro para precificação de opções. Nesta revisão bibliográfica, pretende-se apresentar uma explicação intuitiva do modelo. Ele assume que o comportamento do preço de uma ação²² segue o processo descrito pela equação 31 em tempo contínuo, que pode ser lida como mostra a equação 34 para tempo discreto, ou seja, sendo S o preço da ação, μ a taxa de tendência e σ^2 a taxa de variância:

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t) \quad (49)$$

E, como mostrado na seção 4.2.7.4, isto implica em:

$$\ln \frac{S_t}{S_0} \sim \phi \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right] \quad (50)$$

Além disto, assume-se as seguintes premissas²³:

- a) A taxa de juros de curto prazo é conhecida e constante no tempo;
- b) O preço da ação segue um caminho aleatório continuamente no tempo com uma taxa de variância proporcional ao quadrado do preço da ação. Assim, a distribuição de possíveis preços da ação no final de qualquer intervalo finito é log-normal. A taxa de variância do retorno da ação é constante;
- c) A ação não paga dividendos ou distribuições;
- d) A opção é “europeia”, ou seja, só pode ser exercida no vencimento;
- e) Não há custos de transação ao comprar ou vender a opção ou a ação;
- f) É possível tomar emprestado qualquer fração do preço de um ativo para comprá-lo ou mantê-lo, à taxa de juros de curto prazo;
- g) Não há penalidades para vendas a descoberto. Um vendedor que não possui o ativo simplesmente aceitará o preço do ativo de um comprador, e concordará em liquidar

²¹ BLACK, F., SCHOLES, M. **The Pricing of Options and Corporate**. [S.I.]: The Journal of Political Economy. 1973, 81 v. 637-654 p.

²² Apesar de assumir a precificação para uma opção sobre ação, a maior parte de seus argumentos podem ser estendidos para qualquer tipo de ativo objeto. Uma discussão mais aprofundada é apresentada por Hull (2012, cap14).

²³ Citados diretamente do papel de 1973, com tradução nossa. Apesar de assumir a precificação para uma opção sobre ação, a maior parte de seus argumentos pode ser estendida para qualquer tipo de ativo objeto. Uma discussão mais aprofundada foi apresentada por Hull (2012, cap14).

com o comprador em uma data futura, pagando a ele um montante igual ao preço do ativo nesta data.

Sob essas condições, o modelo devolve fórmulas fechadas para a precificação de *calls* e *puts*:

$$c = S_0N(d1) - Ke^{-rT}N(d2) \quad (51)$$

$$p = Ke^{-rT}N(-d2) - S_0N(-d1) \quad (52)$$

Onde:

c = preço da opção de compra;

p = preço da opção de venda;

S_0 = preço atual da ação;

K = preço de *Strike* da opção;

r = taxa de juros livre de risco com capitalização contínua;

T = período de vida da opção, na mesma base de r ;

σ = volatilidade implícita para precificação;

N = função densidade acumulada normal;

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}; \quad (53)$$

$$d2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}. \quad (54)$$

Uma interpretação intuitiva da fórmula de Black e Scholes é fornecida no Anexo A, adaptada de Nielsen²⁴.

5.3.4 Precificação através de simulação de Monte Carlo

Um estudo sobre a aplicação de simulação de Monte Carlo para precificação de opções foi primeiro elaborado por Boyle²⁵. Assume-se que o preço de uma ação sofre o processo descrito na seção 4.2.4, discreto no tempo com intervalos constantes Δt :

²⁴ NIELSEN, L. T. **Understanding N(d1) and N(d2): Risk-Adjusted Probabilities in the Black-Scholes Model.** Fontainebleau: INSEAD, 1992, 16p.

²⁵ BOYLE, P. P. Options: A Monte Carlo Approach. **Journal of Financial Economics**, Vancouver, v. 4, p. 323-338, 1977.

$$\Delta S = S\mu \Delta t + S\sigma \Delta z \quad (55)$$

Partindo-se de S_0 , uma série de n simulações em computador é realizada para cada intervalo de tempo Δt , até se atingir o prazo final T , se obtendo S_t ($t=1, 2, \dots, n-1, n$), como descrito na seção 4.2.5, obtendo-se diversos valores para o **resultado** da opção na data T :

$Resultado_T = Máx(S_T - K; 0)$, se opção de compra;

$Resultado_T = Máx(K - S_T; 0)$, se opção de venda.

O valor esperado para o Resultado é, então:

$$E(Resultado_T) = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n (Resultado_T)_i \quad (56)$$

Onde:

$n =$ Número de simulações realizadas

$(Resultado_T)_i =$ Resultado da opção para a data T observado na simulação i

Bastando-se, agora, para encontrar o preço da opção na data de hoje, trazer este valor para a data presente pela taxa de desconto:

$$Preço_{opção} = e^{-rT} E(Resultado_T) \quad (57)$$

Além de se obter o preço da opção pelo método, também é possível se obter a volatilidade realmente observada nas simulações, chamada de volatilidade realizada²⁶. Para simulações com intervalos Δt equivalentes a um dia útil, a volatilidade realizada é obtida por:

$$VolReal_{simulação} = \sqrt{\frac{252}{n} \sum_{t=1}^n R_t^2} \quad (58)$$

Onde:

²⁶ McAleer, M.; Medeiros, M. C. REALIZED VOLATILITY: A REVIEW. *Econometric Reviews*, v.27, p. 10–45, 2008.

$$R_t = \text{Ln} \frac{S_t}{S_{t-1}} \quad (59)$$

E a Vol Real da opção é definida como a média das volatilidades realizadas obtidas em cada simulação.

5.3.5 O Modelo de Black para Precificar Opções Sobre Futuros

Nas seções anteriores, foram apresentados métodos para precificar opções sobre ações, assumindo-se que estas possuem uma taxa de tendência e uma taxa de variância. O modelo de Black fornece uma fórmula fechada para precificar opções sobre **preços futuros**. Precificar sobre preços futuros, em vez de preços *spots* (correntes) possui a vantagem de se poder desconsiderar a taxa de tendência, pois, como demonstrado por Hull (2012, p.369), esta taxa vale zero para preços futuros em um mundo neutro ao risco. Ou seja, o preço futuro de uma ação já, teoricamente, reflete toda a tendência de movimento do preço corrente pelo mercado, de hoje até o vencimento, de modo que o preço futuro em si não possua tendência alguma. O processo seguido por um preço futuro pode, então, ser definido como:

$$dF = \sigma F dz \quad (60)$$

Onde σ é o desvio padrão do preço futuro para o período considerado. Aplicando-se o lema de Itô, da mesma maneira que na seção 5.2.7.1, obtém-se:

$$d \ln F \sim \phi \left[\frac{\sigma^2}{2} T, \sigma^2 T \right] \quad (61)$$

Ou seja, o fato de assumir que o preço futuro F se move de maneira normal sem tendência, implica em assumir que seu logaritmo natural se move de maneira normal com taxa de tendência $\frac{\sigma^2}{2}$. Assim, Black²⁷ apresenta uma extensão da fórmula de Black e Scholes para precificar opções sobre futuros:

$$c = e^{-rT} [F_0 N(d1) - KN(d2)] \quad (62)$$

²⁷ BLACK, F. **The Pricing of Commodity Contracts**. Cambridge: Journal of Financial Economics 3, 1976. 167-79 p.

$$p = e^{-rT} [KN(-d2) - F_0N(-d1)] \quad (63)$$

Onde:

F_0 = preço futuro para o ativo subjacente observado hoje;

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{F_0}{K}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}};$$

$$d2 = \frac{\ln\left(\frac{F_0}{K}\right) - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Percebe-se como as diferenças entre as equações de Black com as de B&S fazem com que as funções $d1$ e $d2$ para a fórmula de Black sejam diferentes das da fórmula de Black e Scholes.

5.4 A VOLATILIDADE NOS MODELOS DE PRECIFICAÇÃO

Todos os modelos apresentados partem de certas premissas quanto ao movimento do preço do ativo subjacente ao contrato de opção. Tomando-se especificamente o modelo de Black e Scholes, tem-se que o preço da opção é dado em função das seguintes variáveis:

- a) preço atual do ativo subjacente;
- b) preço de *Strike* da opção;
- c) desvio padrão, ou volatilidade do preço do ativo subjacente;
- d) prazo para o vencimento;
- e) taxa de tendência do preço do ativo subjacente;
- f) taxa de juros livre de risco.

É costumeiro no mercado se precificar opções sobre futuros, de modo que a taxa de tendência some, segundo o modelo de Black. Quanto às variáveis restantes, todas são observáveis de fácil definição pelos agentes do mercado, com exceção da volatilidade. Esta é, sem dúvida, a principal variável na determinação do preço de uma opção, de forma que, muitas vezes, o preço de uma opção é negociado através unicamente da volatilidade.

Assim, um agente pode negociar o preço de uma opção em valores monetários, como R\$ 1.000,00 por opção, ou por nível de volatilidade, como 20%. Neste exemplo, 20% seria o

nível de volatilidade que, inserido no modelo de Black e Scholes, devolveria o preço de R\$ 1.000,00 à opção. A volatilidade que, inserida no modelo, devolve o preço correto da opção é chamada volatilidade implícita. Como descrito na seção 4.5.3, quanto maior a volatilidade atribuída ao ativo subjacente da opção, mais cara esta se torna. Esta característica faz com que determinar o preço de uma opção se resume basicamente em determinar sua volatilidade Implícita.

5.4.1 A Superfície de Volatilidade

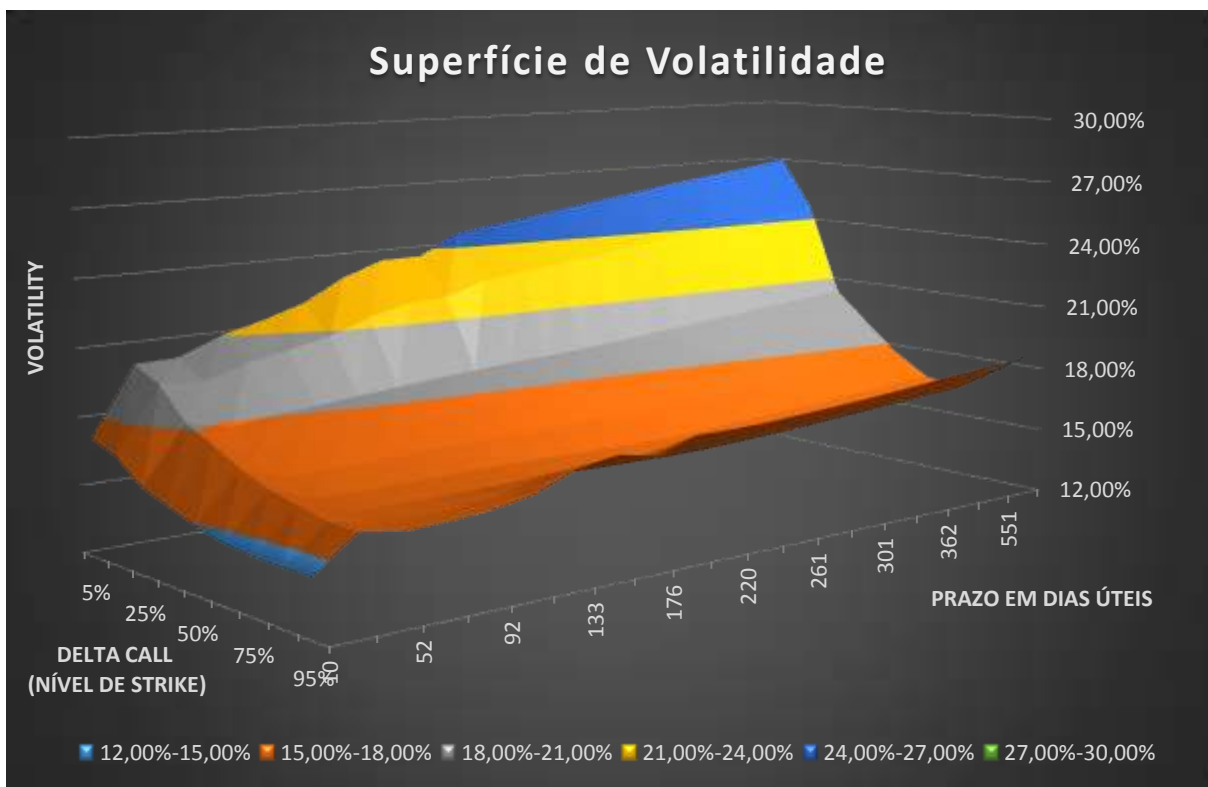
Ajustando-se os parâmetros, todos os modelos de precificação mencionados apresentam resultados muito similares. Ainda assim, o modelo de Black e Scholes é o mais amplamente utilizado pelos participantes do mercado, devido à facilidade de uso, consistência, baixa exigência computacional e a não dependência de atribuições arbitrárias pelo usuário do método, como o número de passos requeridos da árvore binomial ou Monte Carlo. Apesar de ser amplamente utilizado, o modelo, em sua forma básica, não reflete com precisão a realidade de movimentos de preços no mercado. O principal motivo de falha é que ele considera que o preço do ativo sofre um movimento Browniano, ou seja, segue um caminho aleatório continuamente no tempo, definindo a distribuição de probabilidades do preço final como sendo lognormal.

Caso os participantes do mercado acreditassem fielmente que os preços dos ativos financeiros se movimentam de maneira normal, a volatilidade utilizada no modelo seria indiferente quanto ao preço de Strike da opção, afinal, este, que é simplesmente uma constante qualquer estipulada, não deveria exercer influência no comportamento do ativo. Entretanto, o comportamento histórico de preços de ativos leva os participantes do mercado a acreditarem que isto não se verifica em prática. Como exemplo, o choque no mercado de ações dos Estados Unidos no dia 19 de outubro de 1987 representou um evento de 25 desvios padrões medidos pela variação nos preços histórico das ações, o que é praticamente impossível nas condições de uma distribuição lognormal. Assim de modo a refletir suas expectativas quanto à real distribuição de probabilidade e riscos dos preços, os agentes variam a volatilidade Implícita usada no modelo de Black e Scholes de acordo com os Strikes de cada contrato. Podem considerar, por exemplo, que uma opção com probabilidade relativamente baixa de ser

executada mereça receber uma volatilidade implícita alta, aumentando seu preço, pois, na prática, consideram que a probabilidade de ela ser executada não é tão baixa assim.

A variação da volatilidade usada no modelo ocorre não só em função do *Strike*, mas em função do prazo para vencimento, possibilitando o desenho de uma **Superfície de volatilidade**, que nada mais é do que uma correção dada pelo mercado para as falhas de previsão de probabilidades do modelo Black e Scholes para a ocorrência de determinados eventos. Abaixo vemos uma superfície típica:

Figura 16 - Superfície de Volatilidade



Fonte: Adaptado de dados de fechamento fornecidos por corretoras para opções sobre dólar em 17/10/2016.

5.4.2 Estimação da Volatilidade

Vários métodos foram desenvolvidos para se estimar a volatilidade, que representa o desvio padrão dos retornos do ativo. Muitos deles consideram a evolução dos preços históricos. Entre eles, talvez o mais simples e difundido é o método Close-to-Close. Nele, verificam-se os retornos diários que um ativo teve, levando-se em consideração os preços de fechamento (ou ajuste) de cada dia de negociação. Define-se o retorno x_i de um ativo na data i como:

$$x_i = \ln\left(\frac{P_i}{P_{i-1}}\right) \quad (64)$$

Onde:

P_i = Preço de fechamento do ativo na data i

P_{i-1} = Preço de fechamento do ativo na data $i-1$

Assim, a volatilidade diária estimada será o desvio padrão dos retornos das últimas N observações, onde N é arbitrário, definindo a extensão pretendida do estimador. Temos que:

$$Vol_{close-to-close} = \sigma = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (65)$$

Outros métodos, mais robustos, que também utilizam volatilidade passada para prever volatilidade futura foram desenvolvidos, como os de Parkinson²⁸, Garman e Klass²⁹, Rogers e Satchell³⁰ e Yang e Zhang³¹. Todos eles, entretanto, possuem o problema de não levarem em consideração o preço atual do mercado. É muito importante que a volatilidade usada como referência para precificar uma opção por um *Market Maker* seja a mesma adotada pelo mercado como um todo, a fim de evitar oportunidades de arbitragem (definida na seção 5.1.3).

5.4.3 Volatilidade a Termo

Da mesma maneira que se definiu juros a termo, pode-se definir a volatilidade a termo. Sendo T_0 a data de hoje, T_1 uma data intermediária e T_2 uma data final, volatilidade a termo é a volatilidade apresentada por um ativo entre as datas T_1 e T_2 . Pelas propriedades da variância, temos que:

$$\sigma_1^2 T_1 + \sigma_{12}^2 T_{12} = \sigma_2^2 T_2 \quad (66)$$

²⁸ PARKINSON, M. **The Extreme Value Method for Estimating the Variance of the Rate of Return**. [S.I.]: Journal of Business, 1980. v.53, p.61–68.

²⁹ GARMAN, M. B., KLASS M. J. **On the Estimation of Security Price Volatilities from Historical Data**. Berkeley: Journal of Business, 1980. v.53, p.67–78.

³⁰ ROGERS, L., SATCHELL S. **Estimating Variance from High, Low and Closing Prices**. Cambridge: Annals of Applied Probability, 1991. v.1, p.504–512.

³¹ YANG, D., ZHANG Q. **Drift-Independent Volatility Estimation Based on High, Low, Open, and Close Prices**. Chicago: Journal of Business, 2000. v.73, p.477–491.

O que leva a:

$$\sigma_{12} = \sqrt{\frac{\sigma_2^2 T_2 - \sigma_1^2 T_1}{T_{12}}} \quad (67)$$

Onde:

σ_{12} = desvio padrão médio do ativo entre as datas T_1 e T_2 ;

σ_1 = desvio padrão médio do ativo entre as datas T_0 e T_1 ;

σ_2 = desvio padrão médio do ativo entre as datas T_0 e T_2 ;

Assim, encontra-se qual a expectativa para a volatilidade a termo através de duas volatilidades “bullets” (termo usado para variáveis que partem de hoje até um vencimento).

5.5 HEDGE DE OPÇÕES

O *hedge*, como explicado na seção 4.1.1, consiste de operação com objetivo de diminuir a exposição do atuante à uma alteração de variáveis do mercado. Se tratando de opções, pode-se destacar quatro variáveis que influenciam diretamente o seu preço:

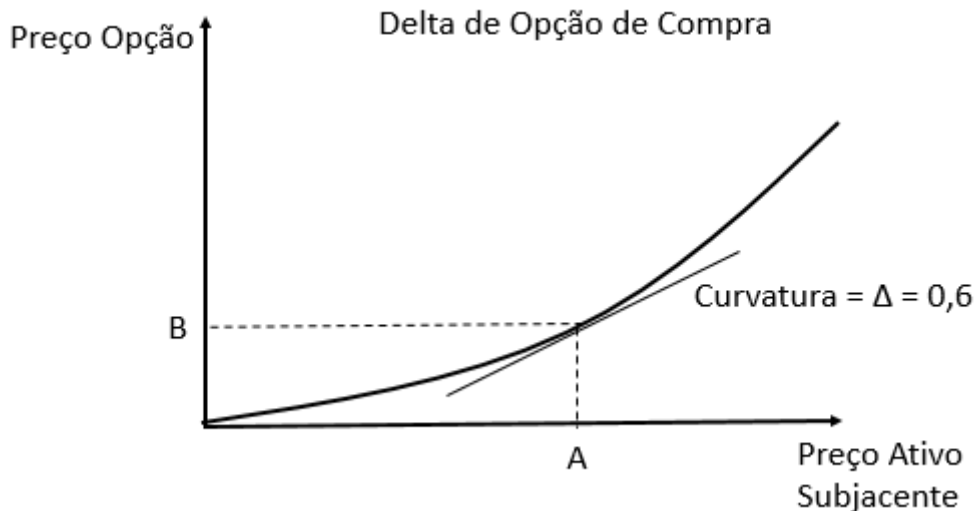
- a) preço do ativo subjacente da opção;
- b) variação na taxa de juros da economia;
- c) variação da volatilidade do ativo subjacente;
- d) tempo.

Isto é verdade para qualquer dos métodos de precificação descritos previamente. A **sensibilidade** do preço da opção em relação ao ativo ou variável analisada é simplesmente a derivada em relação ao mesmo. Uma vez calculada a sensibilidade do preço da opção a uma variável, seu hedge pode ser realizado assumindo alguma posição no mercado, em ativos diferentes, cuja sensibilidade à mesma variável seja oposta. Os tipos de hedges para opções costumam ser descritos por letras gregas, explicadas na próxima seção.

5.5.1 Delta de opções e seu Hedge

O Delta (Δ) de uma opção mede a sensibilidade do preço da opção em relação a uma variação no preço do ativo subjacente do contrato. A figura 16 ilustra este conceito para uma opção de compra. Neste caso, quando o preço do ativo subjacente vale A, a opção vale B, e a derivada do preço da opção em relação ao ativo subjacente vale 0,6:

Figura 17 - Delta de Opção



Fonte: Elaboração do autor, com base em Hull (2012)

Um operador que queira diminuir ou anular o seu risco em relação à variação de preço no ativo objeto pode assumir uma posição direta no próprio ativo de tamanho $-\Delta$, assim, caso o preço do ativo subjacente mude, o resultado que ele terá no preço da opção é totalmente anulado pela sua posição no ativo.

Suponha uma situação onde um operador está comprado em uma opção de compra sobre uma ação cujo preço atual é R\$ 100. O preço de cada opção vale R\$ 10 e o delta está em 0,6. Nesta situação, para cada R\$ 1,00 que o preço da ação variar, a opção varia R\$ 0,60. Para se hedgear, basta apenas que se assuma posição vendida em 0,6 ações³². Caso o preço da ação caia R\$ 1,00, obtém-se os resultados:

$$\text{Resultado opções} = 1 * (99 - 100) * 0,6 = -R\$0,60 \quad (68)$$

$$\text{Resultado ações} = 0,6 * (100 - 99) = R\$0,60 \quad (69)$$

³² No mundo real, não costuma ser possível vender ações em quantidades não inteiras. Porém, dificilmente o atuante estará posicionado em apenas uma opção. Caso tivesse comprado em 100 opções, ele deveria vender 60 ações para se hedgear. A quantidade não inteira é usada apenas por questões didáticas.

De forma que os ganhos nas ações neutralizaram as perdas nas opções. Duas propriedades são relevantes para se destacar:

- os valores em módulo dos deltas sempre se encontram entre 0 e 1, sendo mais próximos de 1 quanto maior a possibilidade de a opção ser executada;
- deltas de puts são sempre negativos e deltas de calls são sempre positivos.

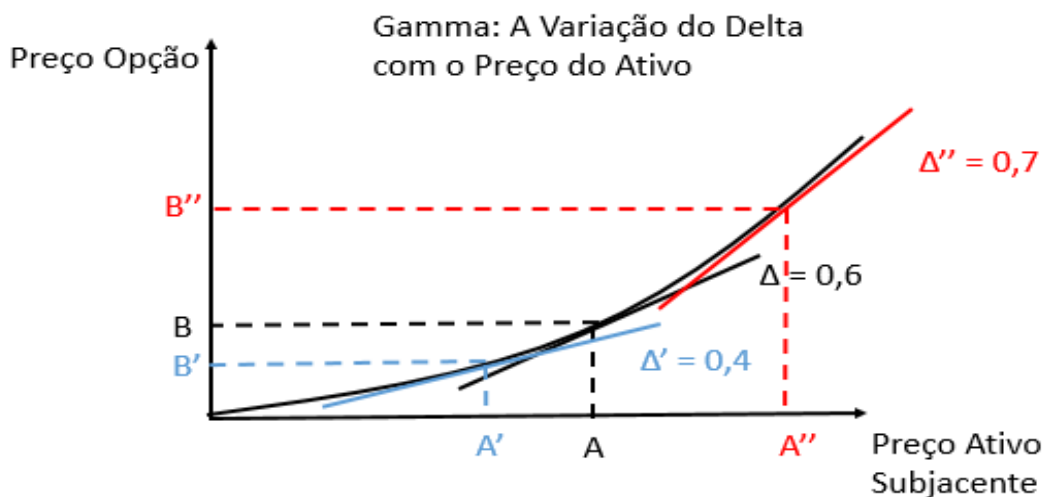
É muito importante que se tenha em mente que o delta de opções não é constante, pois, como pode ser visto na figura 17, existe uma convexidade na curva do preço da opção. O efeito da convexidade faz com que a posição de hedge em delta de uma opção precise ser frequentemente atualizada, e é refletido pela letra Gamma, descrita na próxima seção.

5.5.2 Gamma de opções

O Gamma (Γ), por sua vez, mede a sensibilidade do Delta em relação ao preço do ativo subjacente. Se o delta é a derivada do preço da opção em relação ao preço do ativo, o Gamma nada mais é que esta mesma derivada, mas de segunda ordem.

Como o Delta do próprio ativo objeto é constante e igual a 1 (gráfico de “Preço do Ativo x Preço do Ativo” é uma reta, sem convexidade), ele não possui Gamma, sendo necessário, para a realização deste hedge, se assumir posições em outras opções. O efeito do Gamma no valor do Delta da opção pode ser ilustrado como na figura 17:

Figura 18 - O Efeito Gamma da Opção



Fonte: Elaboração do autor

O efeito Gamma, entendido como a **convexidade** da curva acima, faz com que um operador que pretenda estar Delta Neutro (ou Delta Hedgeado) tenha que atualizar suas posições com certa frequência, de acordo com o movimento do ativo. O Gamma, tanto para opções de compra quanto para opções de venda, é sempre positivo para o detentor da opção.

Assim, utilizando-se o exemplo da seção anterior, o atuante que possuía uma opção com Delta 0,6 ficou Delta neutro quando vendeu 0,6 ações. Caso o preço do ativo objeto, no caso as ações, variar, levando a opção a apresentar Delta de 0,8, o atuante deve vender mais 0,2 ações para voltar a ficar Delta neutro.

5.5.3 Vega de opções

O Vega (v) mede a sensibilidade do preço da opção em relação a uma mudança na volatilidade Implícita da opção e pode ser calculada como a derivada do preço da opção em relação à mesma. Assim como o Gamma, o Vega precisa ser hedgeado através de posições em outras opções. Quanto maior a volatilidade do ativo, mais cara se torna a opção (tanto puts, quanto calls). Isto ocorre porque uma opção nada mais é do que um *seguro*, onde a volatilidade é a variável que aumenta a probabilidade de sinistros. Assim, o Vega sempre é positivo para o detentor da opção, e negativo para o vendedor.

5.5.4 Theta de opções

O Theta (Θ) de uma opção mede a sensibilidade do preço da opção em relação à passagem do tempo, com todo o resto se mantendo constante. O tempo, tanto para opções de compra quanto de venda, tem dois efeitos no preço da opção:

- a) traz a expectativa de resultado no vencimento da opção a valores presentes. Assim, é fator que aumenta o desconto realizado, de modo que, quanto menor o prazo, menos se tem a descontar, e o preço da opção varia positivamente em relação à passagem do tempo, obtendo-se Theta positivo;
- b) multiplica a volatilidade, fazendo que com mais tempo equivalha a mais volatilidade a ser apurada. Assim, a passagem do tempo passa a significar perda de volatilidade, e a opção perde valor com o tempo, obtendo-se Theta negativo.

O segundo fator costuma dominar o primeiro, de modo que o Theta de uma opção se torna negativo para o detentor da opção na maioria dos casos.

6 ANÁLISE DAS PROPRIEDADES DAS OPÇÕES EXISTENTES NO MERCADO E SUAS RELAÇÕES COM A OPÇÃO SOBRE JUROS A TERMO

Efetuada a revisão bibliográfica, analisando-se as características de derivativos semelhantes ao estudado neste trabalho (descritos na seção 4) e considerando-se o objetivo de encontrar o preço justo que o mercado fornece para estas opções, partiu-se da **hipótese inicial** de que é possível estabelecer uma relação entre os preços atribuídos a contratos de DI futuro, opções sobre IDI e Swaptions com as opções sobre juros a termo aqui estudadas. Assim, é necessário que se entenda como os atuantes do mercado precificam estas opções.

Tanto a opção sobre IDI quanto a Swaption são precificadas sobre seus preços futuros, ou seja, convencionou-se utilizar o método de Black, que considera o preço do ativo subjacente sem taxa de tendência e um desvio padrão constante. Neste modelo, descrito na seção 5.4, assume-se que o preço futuro e seu logaritmo natural se movem na forma:

$$dF = \sigma F dz \quad (70)$$

$$d \ln F \sim \phi \left[\frac{\sigma^2}{2} T, \sigma^2 T \right] \quad (71)$$

Algo muito importante de se notar é que as taxas de tendência e de variância no caso do logaritmo natural são dadas em porcentagem, enquanto no caso do preço futuro é dado em valor numérico, com unidade própria. Por exemplo, assuma um preço futuro que vale R\$ 100 hoje e possui volatilidade de 10% ao ano. Sua tendência de crescimento vale zero, e seu desvio padrão em um ano vale:

$$\sigma F = 0,1 * 100 = R\$ 10,00 \quad (72)$$

Neste caso, o valor atual de $\ln F = \ln 100$ é 4,60, e seu desvio padrão em um ano, que não possui unidade específica em um ano é:

$$\sigma = 10\% = 0,1 \quad (73)$$

A seguir é estudado qual o impacto deste tipo de precificação sobre as variáveis que afetam opções sobre IDI, *Swaptions*, e opções sobre juros a termo.

6.1 PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES SOBRE IDI

No caso de opção sobre IDI, o preço futuro é a expectativa do valor do índice no vencimento, que nada mais é do que seu valor hoje multiplicado pela expectativa de juros de hoje até o vencimento, retirada dos contratos de DI1 futuro. Ou seja:

$$IDI_{F_0} = IDI_{Spot} * (1 + DI_T)^{\frac{du}{252}} = IDI_{Spot} * Fator \quad (74)$$

Onde:

IDI_{F_0} = valor futuro de IDI observado em T_0 ;

IDI_{Spot} = valor corrente do IDI, considerado como uma constante definida;

DI_T = expectativa de juros médios anualizados retirados dos contratos negociados de DI1 futuros.

É muito importante notar que o termo $(1 + DI_T)^{\frac{du}{252}}$ é a esperança do mercado para o fator multiplicativo dos juros acumulados em todo o período, refletida nos contratos de DI1 futuro. Assim, quando a expressão Fator for usada, é a este termo multiplicativo que se está referindo.

E a equação 70 se transforma em:

$$dIDI_{F_0} = \sigma_{IDI_F} IDI_{F_0} dz \quad (75)$$

Pela equação 74, temos que:

$$Fator = \frac{IDI_{F_0}}{IDI_{Spot}} = \frac{IDI_{F_0}}{constante} = \frac{IDI_{F_0}}{K} \quad (76)$$

E, pela aplicação do lema de Itô³³, sobre as equações 75 e 76 temos que:

$$dFator = \sigma_{IDI_F} Fator dz \quad (77)$$

³³ Realizada pelo autor e disponível no apêndice A.

Ou seja, o desvio padrão, ou volatilidade atribuída ao futuro de IDI é a mesma atribuída ao fator multiplicativo dos juros. Este resultado se torna muito importante, pois indica que os preços observados no mercado para a volatilidade representam a volatilidade do fator. Caso se consiga estabelecer uma relação entre os fatores das IDIs e o fator a termo da opção estudada, define-se um modelo aceitável.

6.2 PRECIFICAÇÃO DE SWAPTIONS

As Swaptions nada mais são do que opções que negociam o preço futuro de um PU de contrato de DI1. Assim, o PU futuro é o ativo subjacente e, aplicando-se a equação 70 para este caso, tem-se:

$$dPU_{F_0} = \sigma_{PU_F} PU_{F_0} dz \quad (78)$$

Onde:

PU_{F_0} = valor futuro do PU para o contrato de DI1 futuro a termo negociado.

O fator acumulado dos juros entre T_0 e T_2 é equivalente ao fator acumulado dos juros entre T_0 e T_1 e o fator a termo entre T_1 e T_2 (característica de juros compostos), de forma:

$$Fator_{T_0T_1} * Fator_{T_1T_2} = Fator_{T_0T_2} \quad (79)$$

Assim, obtendo-se $Fator_{T_0T_1}$ e $Fator_{T_0T_2}$ dos contratos de DI1F, é possível obter $Fator_{T_1T_2}$, que é o fator de juros a termo negociado tanto na Swaption quando na opção sobre juros a termo estudada neste trabalho. Seja PU o preço unitário como definido na equação 14, temos que:

$$PU_{F_0} = \frac{100.000}{(1+DI_{termo})^{\frac{du_{termo}}{252}}} = \frac{100.000}{Fator_{T_1T_2}} = \frac{100.000}{Fator_{termo}} \quad (80)$$

Ou

$$Fator_{termo} = \frac{100.000}{PU_{F_0}} \quad (81)$$

Onde $du_{termo} = T_2 - T_1$ se estes são contados em dias úteis. Assim, aplicando-se o lema de Itô³⁴ às equações 78 e 81, obtém-se:

$$dFator_{termo} = Fator_{termo} \frac{\sigma_{PU_F}^2}{2} dt - Fator_{termo} \sigma_{PU_F} dz \quad (82)$$

Ou seja, o fato de se considerar o PU a termo futuro como sem taxa de tendência, como na equação 78, leva o $Fator_{termo}$ a apresentar taxa de tendência de ordem $Fator_{termo} \frac{\sigma_{PU_F}^2}{2}$.

Independentemente, verifica-se que o desvio padrão atribuído para o $Fator_{termo}$, em porcentagem, é o mesmo do atribuído ao PU_F , só que com sinal contrário (ver σ nas eqs. 78 e 82), e equivale a σ_{PU_F} , de modo que se movem de maneira inversamente proporcional, o que faz sentido observando-se a relação entre o Fator e o PU pela equação 81. Este resultado é muito importante, pois indica que o desvio padrão atribuído pelo mercado ao PU_F da Swaption pode ser entendido como o mesmo que deve ser atribuído ao $Fator_{termo}$, mas com sinal contrário (como os métodos assumem normalidade de distribuição de preços, o sinal atribuído ao desvio padrão é irrelevante no desenvolvimento dos modelos).

6.3 PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES SOBRE JUROS A TERMO

As opções sobre juros a termo não são observáveis no mercado, de forma que não existe um método de precificação definido que o mercado costuma utilizar. Pode-se, então, estabelecer métodos para tal, sendo este um dos objetivos deste trabalho. O autor decidiu considerar e analisar, inicialmente, quatro modelos básicos para precificação desta opção:

- a) precificação pelo modelo de Black e Scholes de opções sobre um ativo *spot*;
- b) precificação pelo modelo de Black de opções sobre ativo futuro;
- c) precificação por simulação de Monte Carlo considerando movimentos de um preço *spot*;
- d) precificação por simulação de Monte Carlo considerando movimentos de um preço futuro.

³⁴ Aplicação realizada pelo autor e disponível no apêndice B.

As precificações sobre preços futuros se tornam mais simples e aceitáveis por dois motivos: consideram taxa de tendência do ativo como zero, eliminando uma variável; é o modelo utilizado pelo mercado para precificar opções sobre IDI e Swaptions e que, portanto, possuem maior taxa de aceitação e facilitam o encontro de relações entre os preços destas opções e o preço da opção estudada. Assim, análises de precificação por preço Spot não são consideradas neste estudo.

Semelhantemente à opção sobre IDI, a opção sobre juros a termo negocia o valor final de seu índice na data de vencimento. Seja IJT o Índice sobre Juros a Termo, definido pelo autor, que começa em 100.000 em T_0 , passa a apurar o CDI diário a partir de T_1 e atinge seu valor final em T_2 . Temos que:

$$IJT_{T_2} = 100.000 * (1 + CDI_m)^{\frac{du}{252}} = 100.000 * Fator_{termo} \quad (83)$$

Onde:

IJT_t = Índice sobre Juros a Termo na data t;

CDI_m = taxa anualizada da média geométrica dos CDIs diários no período

du = dias úteis do período;

$Fator_{termo}$ = fator multiplicativo dos juros a termo sobre o índice.

Tomando-se as premissas de Black para precificação de opções sobre futuros, que é aceita pelo mercado, assume-se que (ver eqs. 70 e 75):

$$dIJT_{T_2} = \sigma_{IJT_{T_2}} IJT_{T_2} dz \quad (84)$$

A aplicação do lema de Itô para as equações 83 e 84 é idêntica á aplicada a opção IDI, obtendo-se:

$$dFator_{termo} = \sigma_{IJT_{T_2}} Fator_{termo} dz \quad (85)$$

Assim, a aplicação do lema de Itô para os três tipos de opções fornece resultado importantíssimo: os desvios padrões dos ativos subjacentes das opções, ou seja, dos futuros IDI_F , IJT_F e PU_F , são os mesmos dos respectivos fatores de juros negociados. Assim, **para se**

encontrar a volatilidade utilizada no modelo de Black de precificação, basta que se encontre a volatilidade dos fatores multiplicativos de juros.

Vale ressaltar que, apesar de tanto a Swaption quanto a opção sobre juros a termo usarem o desvio padrão do mesmo ativo ($Fator_{termo}$) em suas precificações, a volatilidade utilizada nos modelos não deve ser a mesma. Isto ocorre porque é usada uma volatilidade média. Como a Swaption tem prazo T_1-T_0 e a opção sobre juros a termo tem prazo T_2-T_0 , a volatilidade média para os dois períodos dificilmente seria a mesma.

7 DESENVOLVIMENTO DE MÉTODOS DE PRECIFICAÇÃO

Baseando-se no resultado obtido da análise da seção anterior, de que para precificar a opção basta se definir qual seria a volatilidade do fator multiplicativo dos juros a termo, métodos foram desenvolvidos pelo autor para o encontro desta, com base nos preços observados no mercado para opções sobre IDIs e Swaptions.

7.1 MÉTODO 1: VOLATILIDADE DE IDI A TERMO

O primeiro método desenvolvido consiste na aplicação da fórmula de volatilidade a termo a opções sobre IDI com prazo curto e longo, como descrito na seção 4.4.3. Fazendo uso das mesmas notações para o tempo das seções anteriores, tem-se:

- a) opção sobre IDI com prazo T_1 , cuja volatilidade pode ser observada através dos preços de mercado e representa a volatilidade do fator multiplicativo dos juros entre hoje e T_1 , $Fator_{T_1}$. Será chamada de opção sobre IDI curta;
- b) opção sobre IDI com prazo T_2 , cuja volatilidade pode ser observada através dos preços de mercado e representa a volatilidade do fator multiplicativo dos juros entre hoje e T_2 , $Fator_{T_2}$. Será chamada de opção sobre IDI longa.
- c) opção sobre juros a termo, cuja volatilidade de interesse é a que representa a volatilidade do fator multiplicativo dos juros entre T_1 e T_2 , $Fator_{termo}$.

A fórmula da volatilidade a termo é dada por (ver seção 5.4.3):

$$\sigma_{12} = \sqrt{\frac{\sigma_2^2 T_2 - \sigma_1^2 T_1}{T_{12}}} \quad (86)$$

Porém, para ela ser válida, todos os desvios padrões devem dizer respeito a um mesmo ativo, variando-se apenas os prazos. A IDI curta negocia $Fator_{T_1}$, enquanto a IDI longa negocia $Fator_{T_2}$. Assim, a princípio, não parece válido o uso da fórmula acima. Entretanto, tanto o IDI curto quanto o longo dependem do valor do IDI atual. Seja IDI_{spot} o valor corrente do IDI e IDI_F um valor futuro, o autor chegou à seguinte conclusão:

$$\Delta \ln IDI = \ln IDI_F - \ln IDI_{spot} = \ln \frac{IDI_F}{IDI_{spot}} = \ln Fator_F \quad (87)$$

Ou seja, o processo seguido por $\ln Fator_F$ é o mesmo seguido por $\Delta \ln IDI_{spot}$. A opção sobre IDI curta fornece o comportamento de $\ln Fator_{T_1}$, que por sua vez fornece o comportamento de $\Delta \ln IDI$ para o prazo T_1 . A opção sobre IDI longa fornece o comportamento de $\ln Fator_{T_2}$, que por sua vez fornece o comportamento de $\Delta \ln IDI$ para o prazo T_2 . Assim, obtém-se o comportamento para o mesmo ativo, $\Delta \ln IDI$, para dois diferentes prazos, fazendo com que a aplicação da fórmula descrita pela equação 86 seja válida.

Portanto, o primeiro método consiste na aplicação da fórmula de volatilidade a termo para opções sobre IDI curta e longa. Esta deve devolver a esperança da volatilidade do termo entre os períodos T_1 e T_2 . Com a volatilidade em mãos, obtém-se o preço da opção aplicando-se o método de Black para preços futuros (detalhado na seção 5.3.5).

7.2 MÉTODO 2: PONDERAÇÃO ENTRE VOLATILIDADE DE SWAPTION COM VOLATILIDADE DO MÉTODO 1

Este método visa ponderar as variâncias atribuídas para o fator a termo pelo método 1 e pelo preço observado de Swaptions. O método 1 define, a partir das volatilidades de opções sobre IDI, qual deve ser a volatilidade do fator a termo entre T_1 e T_2 . A volatilidade da Swaption define qual deve ser a volatilidade do fator a termo entre T_0 e T_1 . Assim, pode-se dizer que a volatilidade média do fator entre os períodos T_0 e T_2 (que é o que realmente se procura, já que este é o período de vida da opção) pode ser encontrada realizando uma ponderação do tipo:

$$\sigma_{12}^2 = \frac{\sigma_{Mét1}^2 * (T_2 - T_1) + \sigma_{Swaption}^2 * (T_1 - T_0)}{T_2 - T_0} \quad (88)$$

Ou

$$\sigma_{12} = \sqrt{\frac{\sigma_{Mét1}^2 * (T_2 - T_1) + \sigma_{Swaption}^2 * (T_1 - T_0)}{T_2 - T_0}} \quad (89)$$

E esta é a volatilidade definida pelo método 2.

7.3 MÉTODO 3: ENCONTRO DA VARIÂNCIA DE (X/Y)

Os preços atribuídos a opções sobre IDI longa e curta utilizam volatilidades implícitas para seus respectivos fatores de juros. O terceiro método desenvolvido pelo autor leva em consideração que o fator a termo, por definição (equação 79), nada mais é do que o fator da IDI longa dividido pelo fator da IDI curta. Sendo o fator longo igual a X e o fator curto igual a Y, encontrar a volatilidade do fator a termo se resume a encontrar a variância de X/Y, e, então, tirar sua raiz quadrada para obter o desvio padrão. O anexo B apresenta um desenvolvimento matemático³⁵ para se chegar à seguinte fórmula de variância:

$$\text{Var} \left(\frac{X}{Y} \right) \cong \frac{\mu_X^2}{\mu_Y^2} \left[\frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2} + \frac{\sigma_Y^2}{\mu_Y^2} - 2 \frac{\rho \sigma_X \sigma_Y}{\mu_X \mu_Y} \right] \quad (90)$$

Onde:

μ_X = esperança de X;

μ_Y = esperança de Y;

σ_X = desvio padrão de X;

σ_Y = desvio padrão de Y;

ρ = correlação entre X e Y.

No caso aqui estudado, $X = \text{Fator}_{\text{longo}}$ e $Y = \text{Fator}_{\text{curto}}$ e a esperança de cada fator é obtida diretamente dos preços negociados em contratos de DI1 futuro. Vale ressaltar que, apesar de o desenvolvimento matemático para o encontro da equação 90 não ter sido realizado pelo autor, sua aplicação para este caso foi, não tendo sido encontrado registro de aplicação semelhante desta fórmula para precificar o ativo estudado. A definição de σ_X e σ_Y merecem maior atenção, pois, como descrito na seção 6, a volatilidade usada na precificação de opções é o desvio padrão do logaritmo natural do ativo. Para se encontrar o desvio padrão do ativo em si, deve-se multiplicar a volatilidade dada em porcentagem na opção pelo valor do ativo atual, como mostra a equação 72. Além disto, a volatilidade usada em opções se dá em termos anualizados. Para se encontrar o desvio padrão no período pretendido, deve-se realizar o ajuste, de forma:

³⁵ SELTAN, H. **Approximations for Mean and Variance of a Ratio**. disponível em <<http://www.stat.cmu.edu/~hselman/files/ratio.pdf>>, acesso em 03/10/2016..

$$Vol_T = Vol_{anualizada} * \sqrt{\frac{T}{252}} \quad (91)$$

Como mostra a seção 5.2.2, onde T é contado em dias úteis de apuração da volatilidade. Assim, sendo Vol a volatilidade implícita observada nos preços de opções, os desvios padrões dos fatores valem:

$$\sigma_{FatorLongo} = \sigma_L = Vol_{OpçãoIDI Longa} * \sqrt{\frac{T_2}{252}} * Fator_{Longo} \quad (92)$$

$$\sigma_{FatorCurto} = \sigma_C = Vol_{OpçãoIDI Curta} * \sqrt{\frac{T_1}{252}} * Fator_{Curto} \quad (93)$$

A taxa de correlação foi obtida através de amostra de fechamentos dos últimos 100 dias úteis para os fatores curto e longo, considerando seus prazos. Por exemplo, se o prazo curto equivale a 20 dias úteis e o prazo longo equivale a 90 dias úteis, calculou-se a correlação histórica entre fatores com estes prazos através de dados dos últimos 100 dias de negociação. Feitas as transformações, a equação 90 pode ser aplicada como:

$$Var(Fator_{termo}) = Var\left(\frac{Fator_{longo}}{Fator_{curto}}\right) = Var\left(\frac{Fat_L}{Fat_C}\right) \quad (94)$$

$$Var\left(\frac{Fat_L}{Fat_C}\right) \cong \frac{Fat_L^2}{Fat_C^2} \left[\frac{\sigma_L^2}{Fat_L^2} + \frac{\sigma_C^2}{Fat_C^2} - 2 \frac{\rho \sigma_L \sigma_C}{Fat_C Fat_L} \right] \quad (95)$$

Esta representa a variância do fator a termo para o prazo T_2 . O desvio padrão é encontrado tirando-se a raiz deste resultado. Para se chegar ao desvio padrão do logaritmo natural do fator, que é o que efetivamente é usado na fórmula de Black, como mostra a seção 6, deve-se dividir o desvio padrão pelo valor do fator a termo, para que retorne um desvio em porcentagem. Em seguida, multiplica-se por $\sqrt{\frac{252}{T}}$ para anualizar a volatilidade. Temos, então:

$$Vol_{Mét3} = \left[\frac{\sqrt{Var\left(\frac{Fat_L}{Fat_C}\right)}}{Fator_{termo}} \right] * \sqrt{\frac{252}{T}} \quad (96)$$

7.4 MÉTODO 4: UTILIZAÇÃO DE VOLATILIDADE DE SWAPTION PURA

A volatilidade aplicada para precificação de opções do tipo Swaption, como mostra a seção 6.2, representa exatamente o desvio padrão, em termos percentuais, do fator a termo de juros, que é exatamente o que se busca neste trabalho. O problema teórico de aplicar puramente a volatilidade observada em Swaptions reside no fato de que estas têm um período de vida menor que as opções sobre juros a termo. Como mostram as figuras 9 e 10, a Swaption busca uma volatilidade média do ativo entre os períodos T_0 e T_1 , enquanto a opção sobre juros a termo busca entre T_0 e T_2 . A média e, mais importante, a esperança das médias nestes períodos não devem ser iguais. Porém, utilizar a mesma volatilidade atribuída a Swaptions na precificação das opções sobre juros a termo possui a grande vantagem de não se utilizar qualquer outro ativo. Retira-se exatamente a volatilidade que o mercado atribui para o ativo pretendido, apenas em prazo diferente. Assim, o método 4 define:

$$Vol_{Mét 4} = Vol_{Swaption} \quad (97)$$

7.5 MÉTODO 5: PONDERAÇÃO SIMPLES ENTRE VOLATILIDADE DE SWAPTION E DE IDI A TERMO

No método 2, ponderou-se a volatilidade de uma Swaption com a volatilidade de uma opção sobre IDI a termo, que é dada pelo método 1. O método 5 também pretende realizar uma ponderação entre estas duas volatilidades, porém de uma maneira simplificada, na forma:

$$Vol_{Mét 5} = \frac{Vol_{Swaption}*(T_1-T_0)+Vol_{Mét 1}*(T_2-T_1)}{T_2-T_0} \quad (98)$$

A justificativa deste método é que quanto mais longe se encontra de T_1 , mais a opção se parece com uma Swaption, e mais peso se dá à sua volatilidade. Além disto, é possível que alguns agentes do mercado precifiquem desta maneira, assim, é interessante testar este método para encontrar possíveis falhas na precificação de outros agentes.

7.6 MÉTODO 6: SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

Até agora, os outros métodos buscaram definir a volatilidade ideal a ser aplicada para o fator de juros a termo na fórmula de Black para opções sobre futuros, baseados nos dados de mercado para opções sobre IDIs e Swaptions. Estes métodos devolvem, assim, uma nova variável, ainda desconhecida pelo mercado. O problema é que, mesmo que um método matematicamente perfeito seja desenvolvido, nada garante que o mercado, em situações reais de negociação da opção sobre juros a termo, atribua a volatilidade devolvida pelo modelo. A prova disto é a existência da superfície de volatilidade, apresentada na seção 5.4.1. Caso todas as premissas da fórmula de Black e Scholes fossem aceitas, a volatilidade não deveria depender do Strike da opção. Isto ocorre porque, por mais que o modelo de Black e Scholes seja amplamente usado e matematicamente perfeito, os preços das opções e, portanto, suas volatilidades implícitas, são definidas por oferta e demanda de mercado. Se existe demanda muito alta por opções com determinado Strike, seus preços sobem, elevando a volatilidade implícita do modelo.

Assim, é necessário que se crie um modelo de controle, que sirva como referência e que use apenas medidas de risco, oferta e demanda observáveis no mercado. A simulação de Monte Carlo torna isto possível, pois devolve o preço da opção sobre juros a termo sem atribuir uma volatilidade a este. O método consiste em simular caminhos, como descrito na seção 5.2.5, para o fator curto, cujo desvio padrão é obtido pelos preços de opções sobre IDI curta, e para o fator longo, cujo desvio padrão é obtido pelos preços de opções sobre IDI longa. Assim, partindo-se de T_0 até T_2 , os fatores sofrem um passeio aleatório (*random walk*), e o fator a termo é obtido no final do processo através da sua relação com o curto e o longo, pela fórmula:

$$Fator_{Termo\ Final} = \frac{Fator_{Longo\ Final}}{Fator_{Curto\ Final}} \quad (99)$$

Ou seja, a simulação de Monte Carlo, ao contrário dos outros métodos, não tenta “descobrir” qual processo segue o fator de juros a termo, mas realiza um caminho aleatório para o fator curto e longo, cujos processos já são definidos pelas opções de IDIs curtas e longas negociadas e observáveis, e o fator a termo resultante é encontrado pela relação acima exposta. Por utilizar apenas os processos definidos pelas IDIs curtas e longas, está totalmente

de acordo com o que o mercado aceita. A simulação, portanto, devolve um fator a termo encontrado na data de vencimento da opção. Isto, por consequência, devolve um valor final para o índice sobre juros a termo (IJT), cujo valor é $100.000 * Fator_{T_{Termo\ Final}}$, e o preço da opção sobre juros a termo pode ser encontrado pelas aplicações das fórmulas descritas na seção X. Tem-se que, para cada simulação, o resultado obtido no vencimento T_2 para uma opção de compra, onde K é o Strike, vale:

$$Resultado_{T_2} = Máx(100.000 * Fator_{T_{Termo\ Final}} - K; 0) = Máx(IJT - K; 0) \quad (100)$$

E o preço da opção pode ser encontrado pela média dos resultados de todas as n simulações, trazida a valor presente:

$$E(Resultado_{T_2}) = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n (Resultado_{T_2})_i \quad (101)$$

$$Preço_{opção} = e^{-rT} E(Resultado_{T_2}) \quad (102)$$

Uma adaptação se torna necessária. O termo de desconto para se trazer o preço a valor presente, e^{-rT} , é capitalizado de maneira contínua. Com o objetivo de adaptar o modelo às características práticas do mercado brasileiro, este termo é substituído na equação por um desconto através da expectativa da taxa CDI para aquele prazo, refletida nos contratos de DII futuro, de forma:

$$Preço_{opção} = \frac{E(Resultado_{T_2})}{(1+DI)^{\frac{du}{252}}} \quad (103)$$

Dois processos de *random walk* são, então, realizados em paralelo: um para o fator curto e um para o fator longo. Estes ativos não são independentes, de modo que a correlação entre eles deve ser considerada, como descreve a seção 5.2.6, pela equação:

$$\epsilon_1 = u \quad \text{e} \quad \epsilon_2 = \rho u + \sqrt{1 - \rho^2} v \quad (104)$$

O número de passos para cada fator é igual ao número de dias úteis para o respectivo prazo. Ou seja, segue-se a seguinte iteração:

- a) através dos preços de mercado para opções sobre IDI longa e curta, é coletada as volatilidades atribuída para cada fator;
- b) a volatilidade da opção, em termos anualizados, é transformada para sua forma diária, utilizando-se da transformação $\sigma_{diário} = \sigma_{anualizado} * \sqrt{\frac{1}{252}}$;
- c) registra-se o número de dias úteis para o prazo curto e para o prazo longo;
- d) partindo-se de T_0 , até que se atinja o prazo curto, uma simulação é realizada nos moldes da descrita na seção 5.2.6 para cada dia útil, recalculando-se a respectiva correlação entre fatores;
- e) ao se atingir o final do prazo curto, o fator curto está totalmente definido e para de se mover, de forma que a simulação passa a ocorrer apenas para o fator longo, de forma agora independente e sem necessidade de se considerar a correlação;
- f) ao se atingir o prazo longo, a simulação acaba, fornecendo um valor final para o fator curto e fator longo, o que devolve um fator a termo através da equação 79 e um resultado para a simulação;
- g) repete-se estes processos 10 mil vezes³⁶ e o preço da opção é definido pela média de todas as simulações trazida a valor presente como descreve a equação 56;
- h) além do preço da opção, a simulação de Monte Carlo também devolve uma volatilidade realizada para o fator a termo, como a raiz da média das variâncias diárias do fator a termo, como descrito pelas equações 58 e 59.

Foi desenvolvido um código em linguagem de Visual Basic for Applications (VBA) no software MS Excel® 2013 para a aplicação das simulações, e este é fornecido no apêndice D para o leitor que desejar analisar a iteração em detalhes.

Um detalhe se torna importante: a equação $Fator_{Termo\ Final} = \frac{Fator_{Longo\ Final}}{Fator_{Curto\ Final}}$ só se verifica entre os prazos T_0 e T_1 . Caso queiramos precificar a opção sobre juros a termo pela simulação de Monte Carlo após T_1 , temos que considerar que, sendo T_i um prazo intermediário entre T_1 e T_2 , o fator a termo vale:

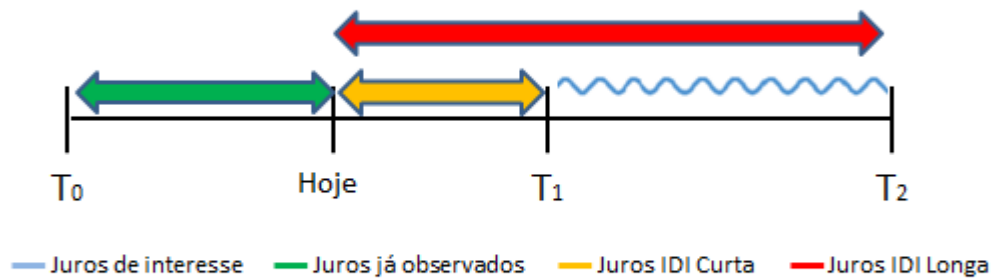
$$Fator_{Termo} = Fator_{Longo} * Fator_{i\ apurado} \quad (105)$$

Onde $Fator_{i\text{apurado}}$ representa os dias em que o CDI para a opção a termo já foram apurados (se encontram no passado) e $Fator_{Longo}$ representa a expectativa do fator de juros que ainda falta apurar para a opção.

Ou seja, se ainda não se atingiu T_1 , o fator termo pode ser ilustrado pela figura:

Figura 19- Fator a Termo antes de T_1

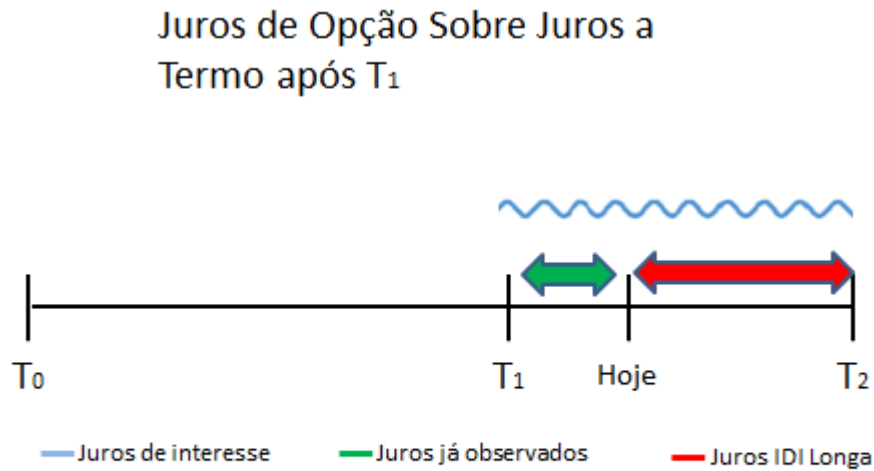
Juros de Opção Sobre Juros a Termo antes de T_1



$$Fator_{termo} = \frac{Fator_{IDI\ Longa}}{Fator_{IDI\ Curta}}$$

Fonte: Elaboração do autor

E, após T_1 :

Figura 20 - Fator a Termo após T_1 

$$Fator_{termo} = Fator_{observado} * Fator_{IDI Longa}$$

Fonte: Elaboração do autor

7.7 CONDIÇÃO DE CONTORNO PARA OS MÉTODOS

Vale ressaltar uma condição de contorno que todos os métodos devem seguir, e seguem: a partir de T_1 , o preço de uma opção sobre juros a termo pode ser totalmente definida apenas pelo preço de uma IDI longa negociada em mercado. Tome a figura 20 como exemplo. Os juros entre T_1 e hoje foram totalmente definidos, podendo-se especular apenas sobre os juros entre hoje e T_2 . Ou seja, a partir de hoje, as incertezas sobre o ativo subjacente da opção sobre juros a termo, ou seja, do valor final do Índice que se inicia em 100.000 em T_1 , residem totalmente nos juros da IDI longa, que, na data de hoje, negocia exatamente os juros vermelhos do gráfico. Isto fica claro se for observado que, nesta data, a Swaption já venceu e a IDI curta também, logo, como os métodos desenvolvidos retiram o comportamento das incertezas por preços de mercado, o único ativo que sobrou é a IDI longa.

Assim, como existe apenas uma fonte de incerteza, não se devendo ponderar com qualquer outra, todos os métodos, a partir de T_1 , devem apresentar mesmo preço e volatilidade implícita para a opção sobre juros a termo. Isto é importante por dois motivos:

- a) mostra que a real contribuição deste trabalho é desenvolver métodos de precificação para a opção sobre juros a termo entre T_0 e T_1 ;

- b) sabe-se, de antemão, qual o resultado justo para os preços e volatilidades entre T_1 e T_2 . Os cinco primeiros métodos vão apresentar, com certeza matemática nas suas definições³⁷, a mesma volatilidade que a IDI longa. O método 7 (Monte Carlo), por mais que também use um dado de entrada de volatilidade igual à IDI longa, pode retornar volatilidade realizada (ver equação 58) e preços diferentes, pois não existe fórmula fechada e ambos dependem de médias de amostras aleatórias. Porém, isto é desejável, pois permite se averiguar a eficiência do método. Se o método funciona bem, ele deve devolver uma volatilidade realizada igual à volatilidade da IDI, e um preço igual ao dos outros métodos (já que, no limite de $n \rightarrow \infty$, o método Monte Carlo para uma única variável se iguala ao de Black e Scholes). Ou seja, se for verificado que estas duas condições são atendidas, e o método funciona bem entre T_1 e T_2 , pode-se assumir que o número de simulações se mostrou satisfatório, e deve funcionar bem em T_0 e T_1 também. Assim, é possível utilizar o método de simulação como referência de preço justo a ser atingido pelos métodos analíticos durante este primeiro período.

³⁷ Com exceção do método 4, onde foi imposta condição na forma “Se hoje $> T_1$, então $Vol_{m\acute{e}t4} = Vol_{IDI\ Longa}$ ”.

8 PROCEDIMENTO DE ANÁLISE DOS MÉTODOS DE PRECIFICAÇÃO

A análise da eficácia dos métodos foi feita da seguinte forma:

- a) uma análise gráfica do comportamento dos juros e suas volatilidades atribuídas através de IDIs e Swaptions no passado recente do mercado brasileiro foi realizada, e períodos com características distintas foram escolhidos, com o objetivo de testar os métodos para diferentes cenários;
- b) considerou-se a existência da superfície de volatilidade na escolha das volatilidades utilizadas.
- c) com prazos definidos para a realização dos testes, *backtests* (testes para períodos passados) foram realizados supondo-se que esta opção existia no passado, analisando qual teria sido sua performance para cada método;
- d) será analisada a eficácia em devolver a volatilidade realizada pelo método de Monte Carlo após T_1 . Como descrito na seção anterior, a volatilidade ideal a ser usada após T_1 é conhecida e igual à *IDI Longa*, e a dúvida paira na determinação da volatilidade antes disto. Caso Monte Carlo se mostre adequada após T_1 , ela será usada como *benchmark* (referência) para a análise dos métodos no período entre T_0 e T_1 ;
- e) além da análise de aproximação de Monte Carlo, os métodos serão testados quando ao Delta hedge. Um dos objetivos do trabalho é desenvolver um método para ser aplicado no ambiente de trabalho. Neste ambiente, o autor atua como *Market Maker*, vendendo produtos e realizando a proteção em outros ativos. O método que apresentar um resultado com Delta hedge mais próximo de zero, será considerado o melhor para aplicação no trabalho do autor.

As próximas subseções explicam os procedimentos acima com maiores detalhes. Após a explicação inicial, é apresentada uma demonstração de aplicação na seção 9, deixando mais claro o procedimento de testes.

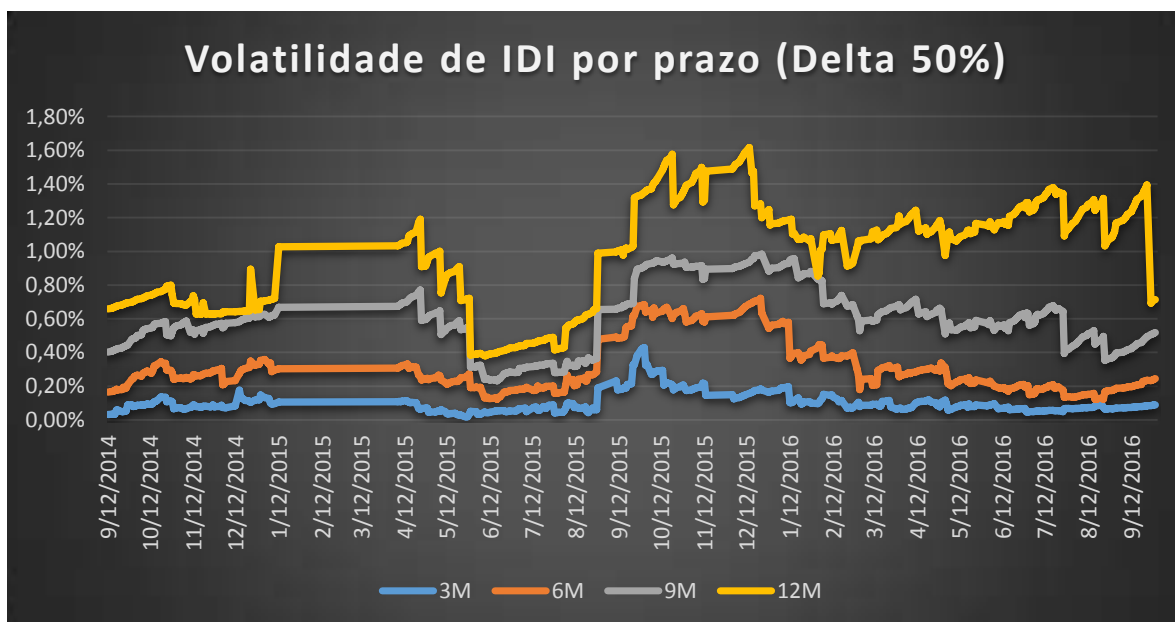
8.1 ESCOLHA DOS PERÍODOS DE TESTE

Como esta opção não existe de forma largamente negociada no mercado de derivativos brasileiro, se tornou necessária a escolha de períodos passados onde se pudesse simular sua existência e analisar a eficácia dos métodos. Para a escolha do período de testes, foi feita uma

análise gráfica da evolução de dados de fechamento de mercado desde setembro de 2014 até setembro de 2016, tanto para preços e volatilidades de opções, como suas expectativas e nível de juros.

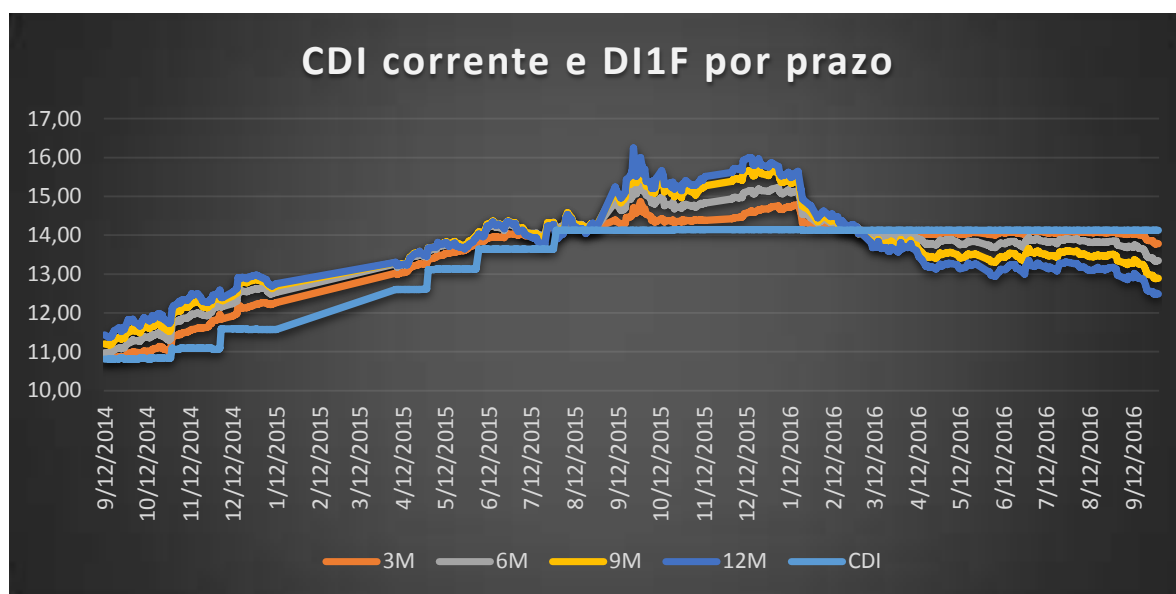
Os dados de volatilidade e preços de opções são disponibilizados por corretoras aos atuantes do mercado. Já os dados de fechamento de DI1 futuro foram obtidos através da plataforma de negociações BLOOMBERG, que compila dados de fechamento disponibilizados pela BM&F. Assim, foi possível a montagem dos gráficos:

Figura 21 - Volatilidade de IDI por prazo



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 22 - CDI e expectativa de juros por prazo



Fonte: Elaborado pelo autor

As volatilidades são fornecidas pela corretora para IDIs por prazos padronizados de 3, 6, 9 e 12 meses para cada nível de Strike. Para melhor capacidade analítica, foram consideradas apenas as volatilidades para opções com Delta 50%, ou seja, que não possuem Strikes nem muito alto, nem muito baixo frente às expectativas. O CDI corrente é calculado e divulgado diariamente pela Cetip, e os DI's futuros, como já explicado, possuem vencimentos padronizados (primeiro dia útil de cada mês). Não foi possível se obter dados de volatilidade para as opções de IDI e Swaption no período entre 13/01/2015 e 06/04/2015, desconsiderando-se este período das análises. Para se obter os DI's para prazos móveis de 3, 6, 9 e 12 meses, o autor realizou interpolação spline cúbica por número de dias úteis entre os vencimentos de DI1F da BM&F. O Apêndice E fornece um código desenvolvido em VBA para MS Excel® 2013 para realização das splines cúbicas aplicadas aos prazos de vencimentos dos DI's. Este código foi desenvolvido pelo autor em conjunto com colegas de trabalho.

Assim, quanto ao nível do CDI corrente, dois períodos são claramente identificáveis: do começo da série, 12/09/2014, até 30/07/2015, onde ocorreu ciclo de aperto monetário realizado pelo Banco Central do Brasil em sua meta para a taxa Selic, elevando o nível de CDI, e a partir de 30/07/2015 até o resto da série, terminando em 30/09/2016, onde a taxa CDI se manteve constante. Isto impacta as expectativas, que até agosto de 2015 apresentam

clara alta, para todos os prazos, se estabiliza até o começo do ano de 2016 e, então, passa a cair, também para todos os prazos.

Já os níveis de volatilidade por prazo de IDI apresentam tendência menos clara, de modo que a partir de, 07/04/2015 passa a cair e, entre 29/05/2015 e 30/08/2015 sobe rapidamente. Após setembro de 2015, passa a cair para todos os prazos com velocidade moderada.

Assim, escolheu-se três períodos para a análise dos métodos, apresentados a seguir.

8.1.1 Primeiro Período: abril/15 – jul/15 – jan/16

Os períodos serão apresentados como o título desta subseção, com três datas. Utilizando-se das notações das seções anteriores, a primeira data corresponde a T_0 , a segunda a T_1 (quando vence a opção sobre IDI Curta e a Swaption) e a terceira a T_2 (quando vence a opção sobre IDI Longa). Ou seja, neste caso: $T_0 = 07/04/2015$, $T_1 = 01/07/2015$, $T_2 = 04/01/2016$.

Assim:

- a) Início da análise se dá em $T_0 = 07/04/2015$;
- b) IDI Curta: opção que negocia o valor do IDI com vencimento em $T_1 = 01/07/2015$;
- c) IDI Longa: opção que negocia o valor do IDI com vencimento em $T_2 = 04/01/2016$;
- d) Swaption: opção que vence em $T_1 = 01/07/2015$ e negocia o contrato de DI1 futuro com vencimento em $T_2 = 04/01/2016$.

A escolha deste período foi feita na esperança de que capture o período de grande instabilidade das volatilidades a partir de abril de 2015. Caracteriza-se, portanto, em um período de alta “volatilidade da volatilidade”, assim como subida dos juros e suas expectativas. As simulações se encerram na data de 13/12/2015, por não existir liquidez da IDI curta após este período.

8.1.2 Segundo Período: jan/16 – jul/16 – jan/17

A partir de janeiro de 2016 é evidenciada uma diminuição das expectativas da taxa de juros para todos os prazos, assim como o nível de sua volatilidade. Assim:

- a) Início da análise se dá em $T_0 = 04/01/2016$;
- b) IDI Curta: opção que negocia o valor do IDI com vencimento em $T_1 = 01/07/2016$;
- c) IDI Longa: opção que negocia o valor do IDI com vencimento em $T_2 = 02/01/2017$;
- d) Swaption: opção que vence em $T_1 = 01/07/2016$ e negocia o contrato de DI1F com vencimento em $T_2 = 02/01/2017$.

Vale ressaltar que, apesar de T_2 ser 02/01/2017, as simulações foram realizadas apenas até 30/09/2016.

8.1.3 Terceiro Período: set/14 – jul/16 – jan/17

Este período visa pegar toda a série de dados, assim, é possível realizar comparações olhando o período como um todo, separando intervalos onde certos métodos foram mais eficientes que outros. Ainda, como descrito na seção 7.7, o mais importante é analisar os métodos antes de se atingir T_1 , que, neste caso, é julho de 2016. Este período apresenta a característica de apresentar intervalo T_0-T_1 muito maior que T_1-T_2 , concedendo esta vantagem. Assim:

- a) Início da análise se dá em $T_0 = 12/09/2014$;
- b) IDI Curta: opção que negocia o valor do IDI com vencimento em $T_1 = 01/07/2016$;
- c) IDI Longa: opção que negocia o valor do IDI com vencimento em $T_2 = 02/01/2017$;
- d) Swaption: opção que vence em $T_1 = 01/07/2016$ e negocia o contrato de DI1 com vencimento em $T_2 = 02/01/2017$.

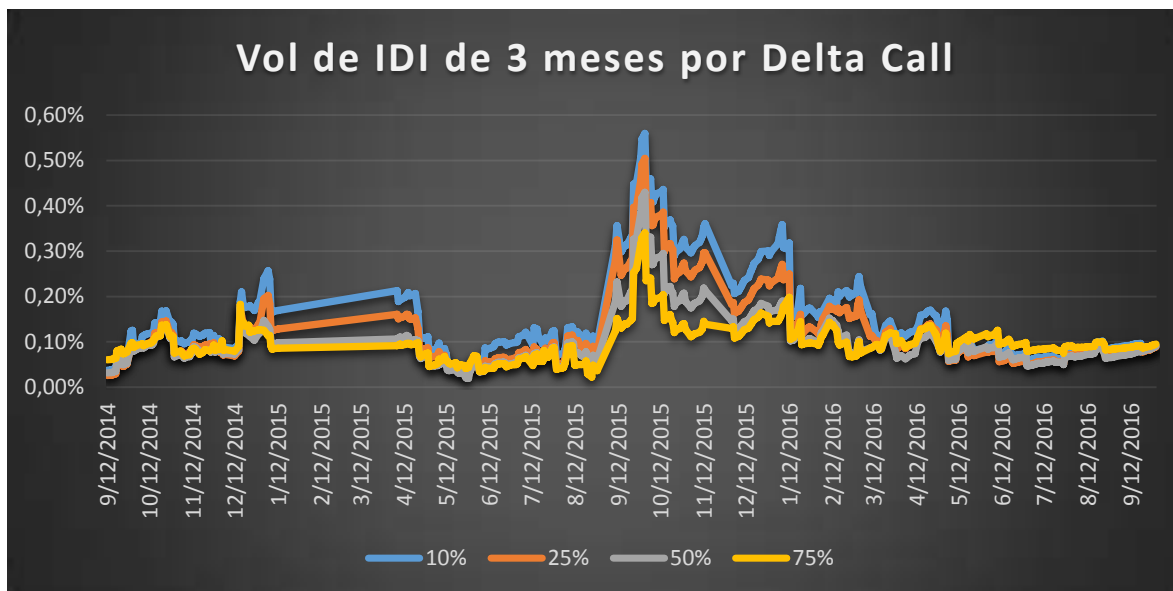
Vale ressaltar que, apesar de T_2 ser 02/01/2017, as simulações foram realizadas apenas até 30/09/2016.

8.2 CONSIDERAÇÃO DA SUPERFÍCIE DE VOLATILIDADE

A existência da superfície de volatilidade é explicada na seção 5.4.1. Assim, é importante que ela seja levada em consideração, definindo que diferentes Strikes possuem diferentes volatilidades implícitas. Para se ter uma ideia de como funciona esta superfície para o

mercado de juros, a figura 21 apresenta um gráfico com a evolução da volatilidade no tempo para opções sobre IDI com prazo de 3 meses para cada Delta de opção de compra³⁸:

Figura 23 - Volatilidade em função do Delta para opções sobre IDI de 3 meses



Fonte: Elaboração do autor com base em dados fornecidos por corretoras de mercado.

Os métodos acima utilizam as volatilidades observadas no mercado para IDIs e Swaptions. Assim, deve-se decidir: qual Delta de opção deve ser utilizado como referência no momento de se obter volatilidades para opções de IDIs e Swaptions?

Decidiu-se por testar os métodos de precificação para opções sobre juros a termo para todas as classes de Delta. Ou seja, as opções, *a priori*, seriam testadas para Strikes que representassem Deltas de 10%, 25%, 35%, 50%, 65%, 75%, 90%. Isto torna vários ajustes necessários.

Quando um atuante ou cliente de instituição financeira pede para que seja realizada cotação para o preço de uma opção, ele pede em função do Strike (“Quero comprar uma opção de juros a termo com Strike 14%”), não por Delta, assim, de nada importa a decisão de testar os métodos para um Delta 50% ser tomada se não é possível traduzir este Delta em um Strike. Felizmente, isto é possível, porém cada método apresentará um Strike diferente que representa seu Delta 50%. Assim, definiu-se o seguinte:

³⁸ É costumeiro apresentar a superfície em função de Delta, não de *Strikes*. Como opções de compra com um *Strike* maior possuem menos chances de serem executadas, seus Deltas são menores. Assim, Delta baixo equivale a *Strikes* altos para opções de compra.

- a) para o primeiro dia de testes dos períodos definidos na seção anterior, será calculado quais Strikes correspondem aos Deltas 10%, 25%, 35%, 50%, 65%, 75%, 90%, para o primeiro método;
- b) supondo-se que o Strike que equivale a um Delta 50% para o método 1 seja 12% de taxa de juros, esta será assumida como uma das taxas para a qual a opção será testada, para todos os métodos. Apesar de, para os outros métodos, este preço de Strike não equivaler a 50% de Delta, existe a suposição inicial de que ficarão muito próximos, provavelmente entre 49% e 51%, de forma que ainda seja possível se considerar que se está testando a opção para a faixa de Delta de 50%;
- c) assim, todos os Strikes iniciais para cada intervalo de Delta são levantados no primeiro dia de testes, e tomados como fixos.

Os métodos, então, usam as volatilidades de IDIs e Swaptions para cada Strike dependendo de seu Delta. Por exemplo, o método 1 utiliza as volatilidades de opção sobre IDI curta e longa. Para o Strike de 10% de Delta para a opção sobre juros a termo, serão usadas as volatilidades da IDI curta e longa para este mesmo Delta no cálculo. Assim, caso a superfície atual de volatilidade de IDIs indique que os atuantes aplicam maior volatilidade para opções com maior Delta, o método de cálculo para opções sobre juros a termo também refletirá este fato.

8.2.1 Interpolação da Superfície de Volatilidade

Os Strikes, em taxa de juros, são definidos e fixados, então, no primeiro dia dos testes. Com o passar do tempo, os preços de mercado variam, de forma que os Deltas das opções também variam. Por exemplo, suponha que o Strike definido no primeiro dia para Delta 25% de uma opção de compra seja 13% de taxa de juros a termo. Se a expectativa do mercado é que a taxa real final observada seja de 11,50%, a opção dificilmente seria exercida, justificando o seu Delta baixo. Após alguns dias de negociação, a expectativa para a taxa de juros a termo subiu para 12,15%. Agora, as chances da opção de compra com Strike 13% ser exercida aumentaram, o que tende a elevar o seu Delta. Ou seja, dia a dia, para cada Strike, os Deltas devem ser recalculados para se saber de qual região da superfície de volatilidade de IDIs e Swaptions remover as referências.

Isto gera o seguinte empecilho: para saber qual volatilidade usar, é necessário o Delta, mas para se calcular o Delta, é necessária a volatilidade. Este impasse é resolvido da seguinte forma:

- a) calcula-se, qual a volatilidade retornada para cada intervalo de Delta;
- b) pelo modelo de Black, existe apenas um Strike para o qual esta volatilidade retorna este Delta. Assim, utilizando-se bissecção por um método iterativo disponibilizado no apêndice F, encontra-se este Strike;
- c) os Strikes foram fixados no primeiro dia e, com o passo descrito em b), foram obtidos quais Strikes apresentam as volatilidades dos Deltas entre 10% e 90%. Basta, agora, realizar uma interpolação para descobrir a volatilidade correta para o Strike da opção.

Ou seja, os métodos desenvolvidos na seção 7 são aplicados sobre IDIs e Swaptions com deltas de interesse (10%, 25%, 35%, 50%, 65%, 75%, 90%,) para se encontrar as volatilidades da opção sobre juros a termo para estes mesmo Deltas. Estes Deltas são, então, traduzidos para Strikes pelo método de bissecção, e obtém-se a distribuição de volatilidade para cada nível de Strike. Finalmente, interpola-se esta relação de Strikes x Volatilidades para se encontrar as volatilidades adequadas para os Strikes fixados no primeiro dia.

Suponha que, no primeiro dia, os Strikes definidos para cada Delta tenham sido (lembrando que IJT é o índice que se inicia em 100.000 em T_1 , e estes Strikes IJT representam o valor final do Índice caso os Strikes em taxa se concretizem):

Tabela 2 - Strikes Iniciais

Delta	10%	25%	35%	50%	65%	75%	90%
Strike Taxa	16,09%	14,43%	13,89%	13,25%	12,62%	12,12%	10,04%
Strike IJT	107.874	107.086	106.830	106.525	106.223	105.981	104.980

Fonte: Elaboração do autor

Estes Strikes são fixos para o resto dos dias de testes. Suponha agora que, no 40º dia de testes, as IDIs curtas e longas apresentem o seguinte perfil de volatilidade:

Tabela 3 - Curva de Volatilidade por Delta

Deltas	10%	25%	35%	50%	65%	75%	90%
Vol IDI Curta	0,058%	0,038%	0,026%	0,020%	0,020%	0,022%	0,025%
Vol IDI Longa	0,779%	0,570%	0,530%	0,500%	0,478%	0,470%	0,517%

Fonte: Elaboração do autor

Para se encontrar qual a volatilidade de uma opção sobre juros a termo segundo o método 1, aplica-se sua fórmula para as IDIs de respectivo Delta, assim:

Figura 24 - Aplicação dos Métodos por Delta

Deltas	10%	25%	35%	50%	65%	75%	90%
IDI Curta	0,058%	0,038%	0,026%	0,020%	0,020%	0,022%	0,025%
IDI Longa	0,779%	0,570%	0,530%	0,500%	0,478%	0,470%	0,517%
Método 1	0,89%	0,65%	0,61%	0,57%	0,55%	0,54%	0,59%

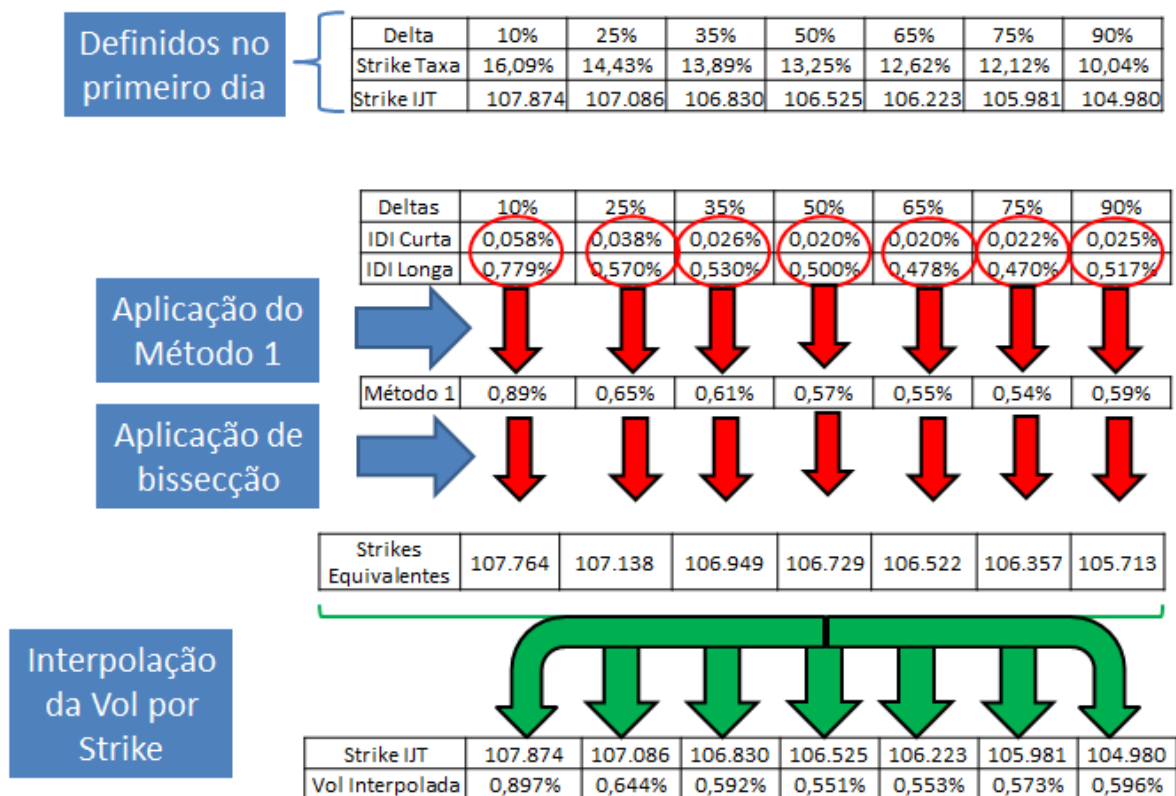
Aplicação do Método 1

Fonte: Elaboração do autor

Sabendo-se que, por exemplo, para um Delta de 10%, a volatilidade da opção sobre juros a termo é 0,89%, descobre-se qual Strike de 10% de Delta por método iterativo e, em seguida, interpola-se estes Strikes para se encontrar qual a volatilidade para os Strikes das opções avaliadas.

O processo como um todo para encontrar as volatilidades de acordo com a superfície resume-se a:

Figura 25 - Processo para o encontro da Volatilidade



Fonte: Elaboração do autor

Os Strikes definidos no primeiro dia são calculados da mesma maneira, apenas não havendo necessidade de interpolação. Este procedimento é realizado todos os dias para que se encontre as volatilidades adequadas com a superfície. O método de interpolação escolhido foi o exponencial, por apresentar capacidade de suavizar a curva e não extrapolar os limites máximos e mínimos da superfície (uma interpolação Spline, por exemplo, pode retornar volatilidades negativas). Um código em VBA foi desenvolvido para as interpolações exponenciais da volatilidade, e é disponibilizado no apêndice G.

8.3 REALIZAÇÃO DOS BACKTESTS PARA ANÁLISE DE RESULTADOS

Com os métodos de precificação, os prazos para testes e o método de interpolação da superfície de volatilidade definidos, parte-se para a realização dos testes. O detalhamento dos testes é mais bem explicado mostrando-se o exemplo real para o primeiro período definido na seção 8.1 (07/04/15 – 01/07/15 – 04/01/16).

O primeiro passo é montar a base de dados do mercado. Foram coletados dados de fechamento para preços de DIs futuros e taxas CDI desde janeiro de 2014 até setembro de 2016, através do terminal da Bloomberg, plataforma centralizadora de dados utilizada pelo mercado financeiro. Os dados de volatilidade foram coletados por corretoras parceiras do banco em que o autor atua.

O segundo passo consiste em se definir os Strikes para os quais os métodos serão testados. Isto é feito no primeiro dia, quando o método de bissecção é aplicado para se definir quais Strikes se constituem nos Deltas de 10% a 90%. Decidiu-se testar os métodos para precificação de uma opção de compra, e obteve-se:

Figura 26 - Encontro dos Strikes no primeiro dia de testes

Deltas		10%	25%	35%	50%	65%	75%	90%
Vols de IDIs no dia 07/04/15	Vol IDI Curta	0,192%	0,145%	0,120%	0,095%	0,085%	0,083%	0,081%
	Vol IDI Longa	0,929%	0,720%	0,680%	0,650%	0,628%	0,620%	0,667%
Aplicação do Método 1	Método 1	1,11%	0,86%	0,82%	0,78%	0,75%	0,75%	0,80%
Aplicação de bissecção	Strikes Equivalentes	107.764	107.138	106.949	106.729	106.522	106.357	105.713
Strikes no primeiro dia	Taxas Equivalentes	16,09%	14,43%	13,89%	13,25%	12,62%	12,12%	10,04%

Fonte: Elaboração do autor

Assim, estes eram os Strikes que representavam os Deltas de interesse no primeiro dia e foram fixados para os próximos passos da simulação. Apenas para se ter de referência, a expectativa da taxa de juros a termo, retirada utilizando-se a equação 79, para este dia, 07/04/2015, se encontrava em 13,42%. Assim, foi montada uma tabela como esta para cada Strike definido acima:

Tabela 4- Tabela para análise de performance de opções

Opção sobre	Início	Vencimento	Strike Taxa	Strike Índice	Tipo
Juros a Termo	07/04/2015	04/01/2016	10,04%	104.980,47	Call

Unidades:	-	-	R\$	R\$	Contratos		Contratos		R\$	R\$	R\$	R\$	R\$	R\$	R\$	
Data	Delta	Vol	B&S	Delta Fin		Delta		Gamma		Vega	Theta	Carrego	Result MTM	Result Hedge	Carrego Hedge	Total
				N15	F16	N15	F16	N15	F16							
07/04/2015	90%	0,80%	1489,3	-1,95	6,25	0,99	-1,05	-0,0002	-0,0003	0,28	0,68					
08/04/2015	90%	0,80%	1451,5	-1,92	6,22	0,99	-1,05	-0,0002	-0,0003	0,31	0,65	-0,70	-37,85	39,18	39,18	0,62
09/04/2015	90%	0,80%	1473,7	-1,89	6,19	0,99	-1,05	-0,0002	-0,0003	0,28	0,67	-1,40	22,26	-22,03	17,17	0,18
10/04/2015	90%	0,80%	1471,2	-1,86	6,16	0,99	-1,05	-0,0002	-0,0003	0,28	0,67	-2,11	-2,54	3,16	20,33	0,10
13/04/2015	90%	0,79%	1475,5	-1,82	6,14	0,99	-1,05	-0,0002	-0,0003	0,27	0,67	-2,81	4,31	-3,79	16,55	-0,07
14/04/2015	90%	0,79%	1473,1	-1,79	6,11	0,99	-1,05	-0,0002	-0,0003	0,26	0,67	-3,51	-2,43	3,05	19,60	-0,15
15/04/2015	90%	0,79%	1470,5	-1,76	6,08	0,99	-1,05	-0,0002	-0,0003	0,26	0,67	-4,21	-2,52	3,14	22,76	-0,22
16/04/2015	91%	0,79%	1507,0	-1,73	6,06	0,99	-1,06	-0,0002	-0,0002	0,22	0,70	-4,92	36,50	-36,49	-13,73	-0,91
17/04/2015	91%	0,78%	1554,4	-1,70	6,03	0,99	-1,06	-0,0002	-0,0002	0,18	0,74	-5,62	47,34	-47,47	-61,20	-1,75
20/04/2015	91%	0,78%	1603,5	-1,67	6,00	0,99	-1,06	-0,0001	-0,0001	0,14	0,78	-6,33	49,11	-49,33	-110,56	-2,69
22/04/2015	91%	0,78%	1607,2	-1,63	5,97	0,99	-1,06	-0,0001	-0,0001	0,14	0,78	-7,03	3,70	-3,05	-113,66	-2,80
23/04/2015	91%	0,78%	1605,9	-1,60	5,94	0,99	-1,06	-0,0001	-0,0001	0,13	0,78	-7,73	-1,33	2,09	-111,62	-2,80
24/04/2015	91%	0,78%	1625,9	-1,57	5,92	1,00	-1,06	-0,0001	-0,0001	0,12	0,79	-8,44	20,08	-19,71	-131,38	-3,18
27/04/2015	92%	0,60%	1572,3	-1,54	5,91	1,00	-1,07	-0,0001	0,0000	0,02	0,78	-9,15	-53,60	54,20	-77,24	-3,35

Fonte: Elaboração do autor

O procedimento de análise de desempenho dos métodos de precificação se resume ao entendimento da tabela acima. As opções foram testadas e seus valores atualizados através de intervalos de tempos discretos, de um dia útil, o que justifica a coluna DATAS. A coluna VOL representa a volatilidade determinada pelo método, e é a coluna mais importante. Para o encontro desta volatilidade, não só é aplicado o método, mas se realiza bissecção e interpolação como mostra a figura 25. Como visto na figura 26, no primeiro dia foi determinado que o Strike de 10,04% apresentaria volatilidade de 0,80% e Delta de 90%, em congruência com a tabela. As demais colunas merecem melhor explicação caso a caso. As colunas B&S, DELTA e TOTAL são explicadas nas subseções seguintes, as demais são explicadas no apêndices de J, e a base de dados para a geração da tabela é fornecida e explicada no apêndice C.

8.3.1 Coluna B&S

A coluna B&S representa a aplicação da fórmula de Black e Scholes para precificar a opção. Neste caso, utilizou-se a adaptação de Black para preços futuros descrita na seção 5.3.5:

$$c = e^{-rT} [F_0 N(d1) - KN(d2)] \quad (106)$$

Onde:

c = preço da opção de compra;

K = preço de *Strike* da opção;

r = taxa de juros livre de risco com capitalização contínua;

T = período de vida da opção, na mesma base de r ;

σ = volatilidade implícita para precificação;

N = função densidade acumulada normal;

F_0 = preço futuro para o ativo subjacente observado hoje;

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{F_0}{K}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}};$$

$$d2 = \frac{\ln\left(\frac{F_0}{K}\right) - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

O autor, no entanto, realizou adaptação para o mercado brasileiro (prática aprendida no ambiente de trabalho). Neste mercado, a taxa de juros é capitalizada em dias úteis e a taxa de juros livre de risco comumente usada é a CDI, ou a sua expectativa média entre hoje e o prazo final, refletida nos contratos de DI1 futuros. Assim, encontrar qual a taxa capitalizada continuamente que equivale ao DI. Esta taxa é obtida pela resolução da equação:

$$\frac{1}{(1+DI)^{\frac{du}{252}}} = e^{-r\left(\frac{du}{252}\right)} \quad (107)$$

O que equivale a:

$$r = \ln(1 + DI) \quad (108)$$

E o termo e^{-rT} , quando adaptado, se transforma em $e^{-\ln(1+DI)T}$, onde T é contado em dias úteis até o vencimento da opção. A fórmula de Black se torna:

$$c = e^{-\ln(1+DI)T} [F_0 N(d1) - KN(d2)] \quad (109)$$

Foi desenvolvida uma função em VBA para este cálculo, disponível no apêndice H.

8.3.2 Coluna DELTA

Uma vez calculado o preço da opção pelo método de Black, é possível calcular o Delta da mesma, que é simplesmente a derivada em relação ao preço futuro do ativo subjacente. Neste caso, o ativo subjacente é o Índice de Juros a Termo, cujo preço futuro é encontrado pela fórmula:

$$F_{IJT} = 100.000 * (1 + DI_{termo})^{\frac{du_{termo}}{252}} \quad (110)$$

A derivada consiste em avaliar a variação no preço da opção para uma variação infinitesimal neste futuro de índice. No mundo real, os DIs não se movem de forma contínua, mas possuem variação mínima definida pela BM&F, equivalente a 0,01% na taxa. Assim, este foi considerado o choque infinitesimal, e o Delta pode ser encontrado por:

$$Delta = \frac{BS(DI_{termo+choque}) - BS(DI_{termo})}{choque} \quad (111)$$

Onde BS representa a fórmula de Black apresentada na seção anterior. Uma função em VBA foi desenvolvida para o cálculo do Delta e é fornecida no apêndice I.

8.3.3 Coluna TOTAL

Esta coluna visa obter o resultado total do atuante que assumiu posição na opção e realizou o seu Delta hedge ao longo do tempo. Ela consiste, basicamente, da soma das colunas CARREGO HEDGE (que representa o total de resultado com hedge desde o início do período de testes), CARREGO (que representa o custo de oportunidade por ter pagado o prêmio da opção em T_0) e da variação do preço da opção durante todo o período. Tomando a tabela 4, por exemplo, no dia 16/04/2015, o resultado de CARREGO da opção era -R\$4,92, o resultado total do hedge já carregado é de -R\$13,73 e o preço da opção é R\$1507,00. Assim, o Resultado Total é encontrado por:

$$ResultadoTotal = -4,92 - 13,73 + (1507 - 1489,30) = -R\$0,91 \quad (112)$$

O autor, em seu trabalho, atua como *Market Maker*. Para esta função, são fornecidos preços aos clientes que desejam comprar a opção. Uma vez que o cliente aceite o preço e feche negócio, o autor realiza seu Delta hedge em contratos negociados na Bolsa de Valores, buscando neutralizar seus riscos. Assim, um bom método de precificação para ser utilizado por um *Market Maker* é o que forneça resultado total final mais próximo de zero, ou seja, que o Delta hedge realizado uma vez ao dia se aproximou mais da proteção total desejada.

9 RESULTADOS

Após a realização dos testes, apresentam-se os resultados obtidos para cada período. Estes resultados simulam a posição de um atuante que **comprou a opção de compra** sobre juros a termo especificada. A análise dos resultados é apresentada na seção 10.

9.1 RESULTADOS DO PRIMEIRO PERÍODO: 07/04/2015 - 01/07/2015 - 04/01/2016

Os Strikes definidos para serem testados neste período, pelo método explicado na figura 26, foram:

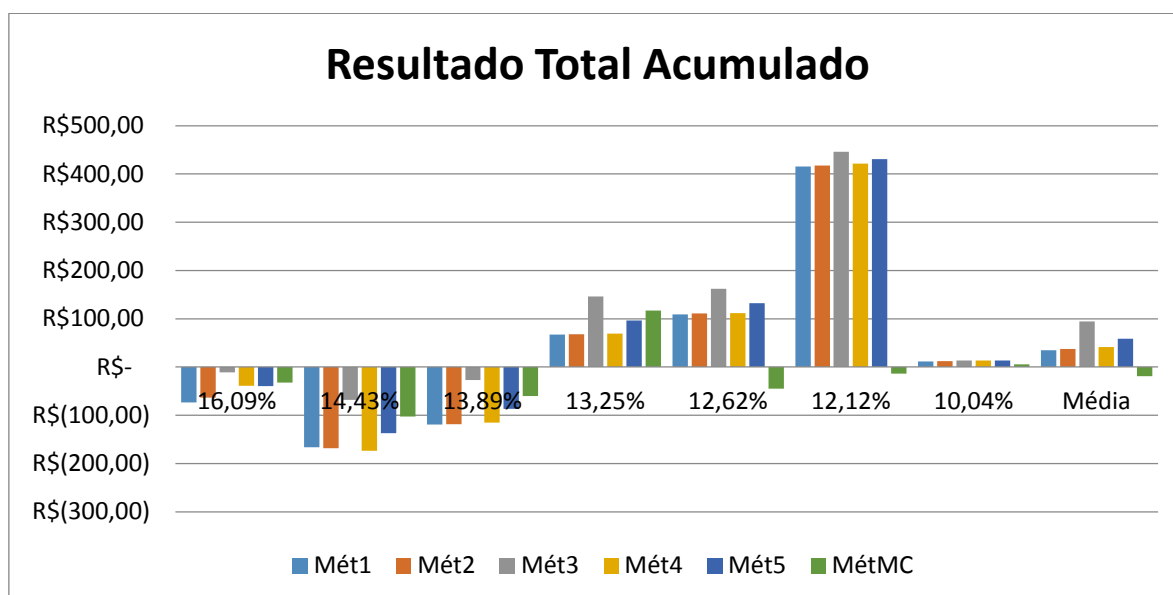
Tabela 5 - Strikes do primeiro período

Delta	10%	25%	35%	50%	65%	75%	90%
Strikes	16,09%	14,43%	13,89%	13,25%	12,62%	12,12%	10,04%

Fonte: Elaboração do autor

Como um dos principais objetivos era desenvolver um método que permitisse maior eficiência na realização do hedge, este foi o primeiro fator testado. Os resultados obtidos por Strike e por método (equivalentes ao último valor da coluna TOTAL da tabela 4) são apresentados através da figura 27 e da tabela 6:

Figura 27 – Resultado por Strike e por Método para o primeiro período



Fonte: Elaboração do autor

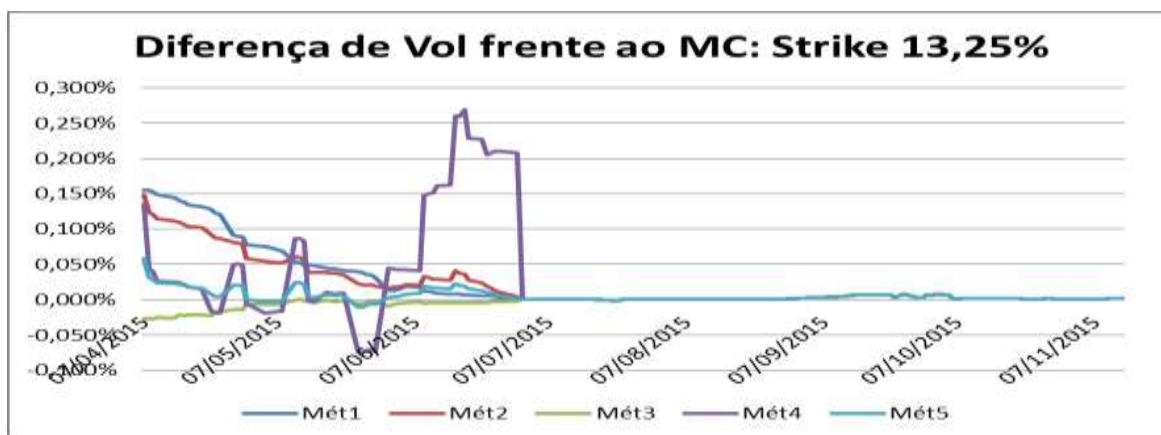
Tabela 6- Resultado por Strike e por método para o primeiro período

	16,09%	14,43%	13,89%	13,25%	12,62%	12,12%	10,04%	Média	Desvio Pad
Mét1	-R\$ 73,17	-R\$ 166,22	-R\$ 119,01	R\$ 67,06	R\$ 109,24	R\$ 415,35	R\$ 11,60	R\$ 34,98	R\$ 194,79
Mét2	-R\$ 63,20	-R\$ 167,83	-R\$ 118,43	R\$ 68,26	R\$ 111,36	R\$ 417,71	R\$ 12,34	R\$ 37,17	R\$ 195,02
Mét3	-R\$ 10,78	-R\$ 68,28	-R\$ 26,77	R\$ 146,05	R\$ 161,96	R\$ 446,02	R\$ 13,76	R\$ 94,57	R\$ 177,75
Mét4	-R\$ 38,63	-R\$ 173,47	-R\$ 114,97	R\$ 69,29	R\$ 112,06	R\$ 421,25	R\$ 13,32	R\$ 41,26	R\$ 194,88
Mét5	-R\$ 39,41	-R\$ 136,76	-R\$ 86,61	R\$ 96,68	R\$ 132,14	R\$ 430,70	R\$ 13,38	R\$ 58,59	R\$ 189,83
Mét MC	-R\$ 32,31	-R\$ 102,74	-R\$ 59,86	R\$ 117,05	-R\$ 44,77	-R\$ 13,42	R\$ 5,75	-R\$ 18,61	R\$ 69,13

Fonte: Elaboração do autor

Percebe-se a eficiência do método de Monte Carlo em fornecer o resultado mais próximo de zero com o menor desvio padrão entre os métodos. Isto fortalece a hipótese de que o método de Monte Carlo deve ser usado como *benchmark* para os métodos analíticos. Assim, foram montados três gráficos, para os dois Strikes extremos (apresentados no apêndice K) e o intermediário (apresentado a seguir), que avaliam a diferença da volatilidade encontrada pelos métodos frente à devolvida pelo método de Monte Carlo para diferentes níveis de Strike.

Figura 28 - Diferença de Vol frente ao MC: Strike 13,25%



Fonte: Elaboração do autor

A média e desvio padrão das diferenças apresentadas no gráfico são sumarizados nesta tabela:

Tabela 7 - Média e desvios das diferenças de volatilidade frente ao MC: período 1

	Média			Desvio Padrão		
	16,09%	13,25%	10,04%	16,09%	13,25%	10,04%
Mét1	0,0394%	0,0248%	0,0255%	0,0659%	0,0430%	0,0447%
Mét2	0,0306%	0,0223%	0,0201%	0,0470%	0,0341%	0,0300%
Mét3	-0,0062%	-0,0027%	-0,0033%	0,0114%	0,0077%	0,0063%
Mét4	0,0127%	0,0271%	0,0147%	0,1101%	0,0684%	0,0744%
Mét5	0,0038%	0,0056%	0,0021%	0,0124%	0,0092%	0,0069%

Fonte: Elaboração do autor

O fato de os gráficos mostrarem que, a partir de T_1 , que neste caso se configura como 01/07/15, a volatilidade de Monte Carlo praticamente não difere das outras é argumento forte para defender que o número de simulações usadas (10.000 para cada *Strike* e para cada dia) é suficiente para obter uma volatilidade justa, e o método pode ser usado como *benchmark* no período anterior a T_1 .

Para uma análise adicional, são apresentados gráficos para os Vegas e Gammas médios de cada opção por método no apêndice N, já que estes podem influenciar no resultado eficiente de Delta hedge.

9.2 RESULTADOS DO SEGUNDO PERÍODO: 04/01/2016 - 01/07/2016 - 02/01/2017

Seguindo a mesma lógica de apresentação de resultados do período anterior, os *Strikes* definidos para este período pelo método descrito na seção X foram:

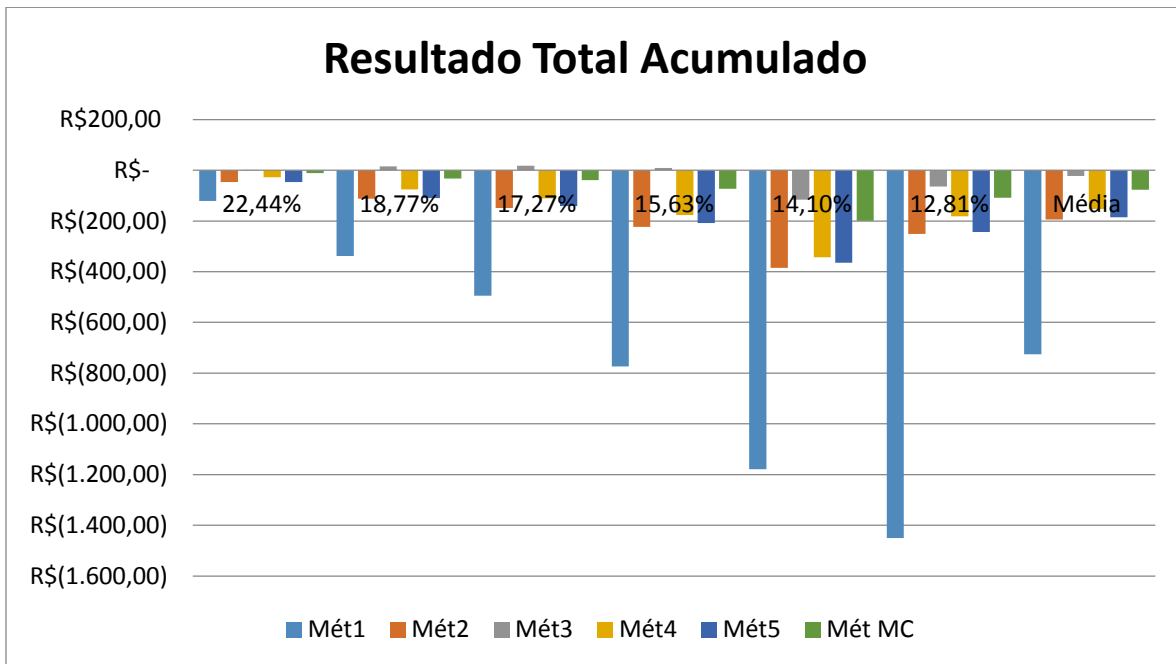
Tabela 8 - Strikes do segundo período

Delta	10%	25%	35%	50%	65%	75%
Strikes	22,44%	18,77%	17,27%	15,63%	14,10%	12,81%

Fonte: Elaboração do autor

Neste caso, não foi possível se obter o Strike 90% pelo método de bissecção para todas as datas, assim, este delta não será considerado no estudo para este período. Os resultados obtidos por Strike e por método para o resultado total acumulado são apresentados através da figura 34 e da tabela 9:

Figura 29- Resultado por Strike e por Método para o segundo período



Fonte: Elaboração do autor

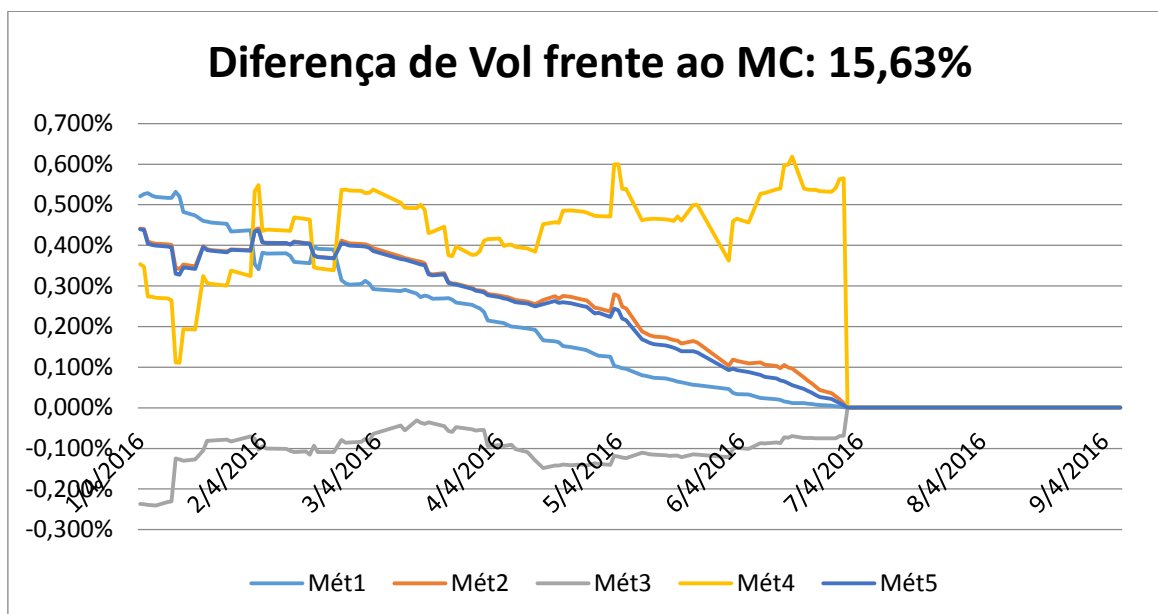
Tabela 9- Resultado por Strike e por método para o segundo período

	22,44%	18,77%	17,27%	15,63%	14,10%	12,81%	Média	Desv Pad
Mét1	-R\$ 120,70	-R\$ 338,17	-R\$ 494,72	-R\$ 774,03	-R\$ 1.178,57	-R\$ 1.450,10	-R\$ 726,05	R\$ 510,24
Mét2	-R\$ 46,84	-R\$ 112,22	-R\$ 148,78	-R\$ 222,65	-R\$ 385,11	-R\$ 251,54	-R\$ 194,52	R\$ 119,20
Mét3	R\$ 1,80	R\$ 14,98	R\$ 17,75	R\$ 8,48	-R\$ 116,56	-R\$ 64,01	-R\$ 22,93	R\$ 55,04
Mét4	-R\$ 27,84	-R\$ 75,49	-R\$ 110,33	-R\$ 177,10	-R\$ 342,97	-R\$ 181,67	-R\$ 152,57	R\$ 110,44
Mét5	-R\$ 45,94	-R\$ 109,49	-R\$ 141,36	-R\$ 208,46	-R\$ 364,32	-R\$ 243,69	-R\$ 185,54	R\$ 112,33
Mét MC	-R\$ 11,47	-R\$ 33,15	-R\$ 38,60	-R\$ 73,59	-R\$ 199,76	-R\$ 108,20	-R\$ 77,46	R\$ 68,91

Fonte: Elaboração do autor

Percebe-se, mais uma vez, a eficiência do método de Monte Carlo em fornecer um resultado próximo de zero com o baixo desvio padrão quando comparado aos outros métodos. Entretanto, o método 3, neste caso, apresentou resultado melhor, com a menor média absoluta de resultado e o menor desvio padrão. O método 1, de longe, foi o que apresentou pior resultado. Foram montados três gráficos, para os dois Strikes extremos (apêndice L) e o intermediário (apresentado a seguir), que avaliam a diferença da volatilidade encontrada pelos métodos frente à devolvida pelo método de Monte Carlo:

Figura 30 - Diferença de Vol frente ao MC: Strike 15,63%



A média e desvio padrão das diferenças apresentadas no gráfico são sumarizados nesta tabela:

Tabela 10 - Média e desvios das diferenças de volatilidade frente ao MC: período 2

	Média			Desvio Padrão		
	22,44%	15,63%	12,81%	22,44%	15,63%	12,81%
Mét1	0,1844%	0,1613%	0,1253%	0,2145%	0,1735%	0,1564%
Mét2	0,2147%	0,1950%	0,1370%	0,1858%	0,1612%	0,1168%
Mét3	-0,1111%	-0,0737%	-0,0719%	0,1068%	0,0609%	0,0514%
Mét4	0,3359%	0,3151%	0,1989%	0,2379%	0,2183%	0,1501%
Mét5	0,2057%	0,1868%	0,1315%	0,1856%	0,1616%	0,1160%

Fonte: Elaboração do autor

Para uma análise adicional, são apresentados gráficos para os Vegas e Gammas médios de cada opção por método no apêndice O, já que estes podem influenciar no resultado eficiente de Delta hedge.

Seguindo a mesma lógica de apresentação de resultados do período anterior, os Strikes definidos para este período pelo método descrito na figura 26 foram:

Tabela 11 - Strikes do terceiro período

Delta	10%	25%	35%	50%	65%	75%
Strike	19,13%	14,32%	12,50%	10,15%	7,48%	3,73%

Fonte: Elaboração do autor

Assim como para o segundo período, não foi possível se obter o Strike 90% pelo método de bissecção para todas as datas, assim, este delta não será considerado no estudo. Os resultados obtidos por Strike e por método para o resultado total acumulado são apresentados através da figura 41 e da tabela 12:

Figura 31- Resultado por Strike e por Método para o terceiro período



Fonte: Elaboração do autor

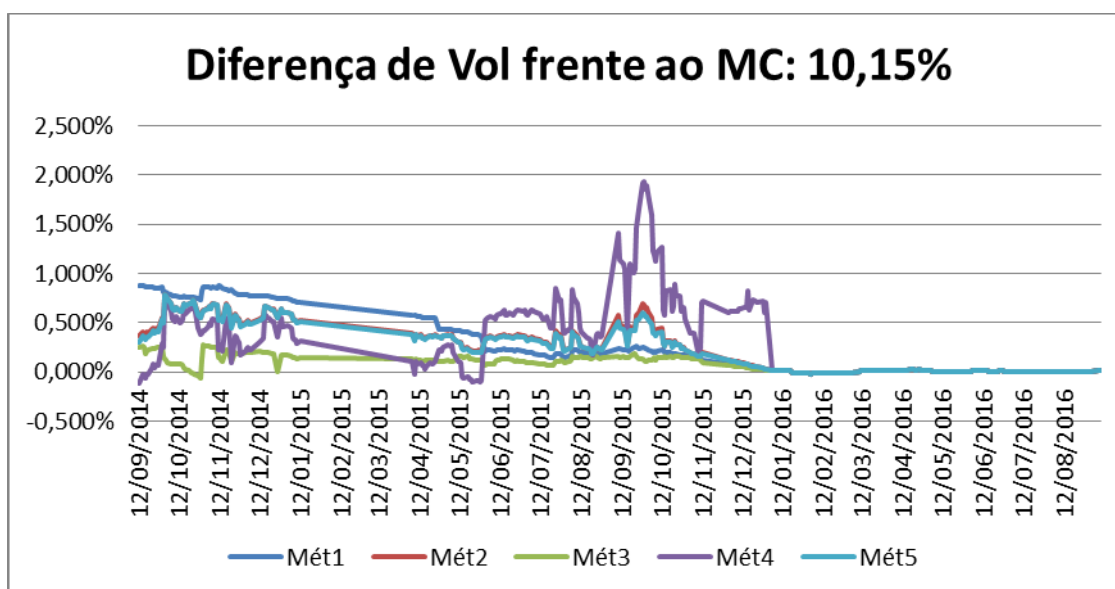
Tabela 12- Resultado por Strike e por método para o terceiro período

	19,13%	14,32%	12,50%	10,15%	7,48%	3,73%	Média	Desv Pad
Mét1	-R\$ 355,13	-R\$ 1.003,08	-R\$ 1.517,36	-R\$ 363,96	R\$ 398,71	R\$ 805,65	-R\$ 339,20	R\$ 858,47
Mét2	-R\$ 216,21	-R\$ 448,53	-R\$ 390,30	-R\$ 162,21	R\$ 161,03	R\$ 350,16	-R\$ 117,68	R\$ 313,70
Mét3	-R\$ 145,11	-R\$ 228,58	-R\$ 218,42	-R\$ 60,47	R\$ 186,65	R\$ 315,86	-R\$ 25,01	R\$ 226,06
Mét4	-R\$ 111,95	-R\$ 89,74	R\$ 21,81	R\$ 115,02	R\$ 213,46	R\$ 312,83	R\$ 76,91	R\$ 168,66
Mét5	-R\$ 157,50	-R\$ 332,59	-R\$ 260,13	-R\$ 71,58	R\$ 178,44	R\$ 316,18	-R\$ 54,53	R\$ 253,84
Mét MC	-R\$ 10,80	-R\$ 316,01	-R\$ 65,36	R\$ 37,40	R\$ 226,42	R\$ 317,20	R\$ 31,47	R\$ 224,32

Fonte: Elaboração do autor

Percebe-se, mais uma vez, a eficiência do método de Monte Carlo em fornecer um resultado próximo de zero com o baixo desvio padrão quando comparado aos outros métodos. Entretanto, o método 3, assim como para o segundo período, apresentou resultado melhor, com a menor média absoluta de resultado e o menor desvio padrão. O método 1, de longe, foi o que apresentou pior resultado novamente. Foram montados três gráficos, para os dois Strikes extremos (apêndice M) e o intermediário (a seguir), que avaliam a diferença da volatilidade encontrada pelos métodos frente à devolvida pelo método de Monte Carlo:

Figura 32 - Diferença de Vol frente ao MC: Strike 10,15%



Fonte: Elaboração do autor

A média e desvio padrão das diferenças apresentadas no gráfico são sumarizados nesta tabela:

Tabela 13 - Média e desvios das diferenças de volatilidade frente ao MC: período 3

	Média			Desvio Padrão		
	19,13%	10,15%	3,73%	19,13%	10,15%	3,73%
Mét1	0,3859%	0,2664%	0,2926%	0,4398%	0,3053%	0,3358%
Mét2	0,3111%	0,2476%	0,2837%	0,3003%	0,2371%	0,2795%
Mét3	0,1130%	0,0834%	0,1179%	0,1158%	0,0774%	0,1139%
Mét4	0,2916%	0,3101%	0,3551%	0,3932%	0,3811%	0,3955%
Mét5	0,2998%	0,2393%	0,2761%	0,2893%	0,2305%	0,2741%

Fonte: Elaboração do autor

Para uma análise adicional, são apresentados gráficos para os Vegas e Gammas médios de cada opção por método no apêndice P, já que estes podem influenciar no resultado eficiente de Delta hedge.

10 ANÁLISE DE RESULTADOS E CONCLUSÃO

Baseando-se nos resultados apresentados na seção anterior, é possível traçar conclusões sobre o melhor método de precificação para opções sobre juros a termo no mercado brasileiro. Assumiu-se a hipótese inicial de que o método de simulação por Monte Carlo serviria como boa referência para os demais métodos, tendo em vista que não estabelece padrão de comportamento para a taxa de juros a termo, mas, em contrapartida, deriva esta do comportamento de uma taxa de juros curta e longa para as quais o mercado já precifica um tipo de comportamento. Para que esta hipótese se mostrasse verdadeira, era necessário assegurar que a quantidade de simulações realizadas pelo método fosse suficiente para que a volatilidade devolvida convergisse para a volatilidade da IDI longa após T_1 . Isto se mostrou verdade para o número de 10.000 simulações por Monte Carlo aplicado, cuja evidência é refletida nos gráficos de diferença de volatilidade dos demais métodos frente ao Monte Carlo (ver figuras 28, 30 e 32, que mostram que a diferença entre o método de Monte Carlo e os demais métodos, que usam volatilidade da IDI longa após T_1 , converge para zero entre T_1 e T_2). Vale ressaltar que, com 6 níveis de Strikes definidos, para cada data foram realizadas 60.000 simulações. Com 153 datas para o primeiro período, isto leva a um total de 9.180.000 simulações apenas no primeiro período, que é o menor entre os três (e dentro de cada simulação ocorrem diversos “loops”, como mostra o apêndice D). Como condição de contorno, tinha-se que, a partir de T_1 , todos os métodos deveriam devolver volatilidade igual a da opção sobre IDI longa utilizada, como de fato ocorreu.

Assim, deve-se analisar qual dos métodos analíticos devolveu volatilidades que mais se aproximaram da de Monte Carlo. Os testes foram realizados levando três períodos diferentes em consideração, para se obter resultados em diferentes cenários:

- a) Abr/15 – Jul/15 – Jan/16: período de grande instabilidade das volatilidades a partir de abril de 2015. Caracteriza-se, portanto, em um período de alta “volatilidade da volatilidade”, assim como subida dos juros e suas expectativas;
- b) Jan/16 – Jul./16 – Jan/17: diminuição das expectativas da taxa de juros para todos os prazos, assim como o nível de sua volatilidade;
- c) Set/14 – Jan/16 – Jan/17: toda a série de dados. Permite realizar comparações olhando o período como um todo, separando intervalos onde certos métodos foram mais eficientes que outros. Ainda, como descrito na seção 7.7, o mais importante é analisar os métodos antes de se atingir T_1 , que, neste caso, é julho de 2016. Este

período apresenta a característica de apresentar intervalo T0-T1 muito maior que T1-T2, concedendo esta vantagem.

Constatou-se que, para quase todos os períodos e todos os níveis de Strike, o Método 3 apresentou menor diferença absoluta média em relação ao método de Monte Carlo, assim como menor desvio padrão desta diferença (tabelas 7, 10 e 13), eliminando dúvidas frente ao método que devolveu o preço mais justo frente às condições de mercado. No período 1 (tabela 7) o método 5 apresenta resultado melhor para níveis de Strike extremos, mas a vantagem é pequena, o desvio padrão é maior, e se apaga em outros períodos. Percebe-se, além disto, que os outros métodos apresentam comportamento semelhante, com exceção do método 4, como evidenciado pela figura 36. Isto ocorre porque, ao se utilizar unicamente a volatilidade de uma Swaption, não se leva em consideração de que o mesmo ativo pode ter volatilidades diferentes em períodos diferentes. A Swaption leva em consideração a volatilidade dos juros a termo apenas até a primeira data T_1 , ignorando seu comportamento posteriormente. Assim, este método se mostrou inaplicável em qualquer situação onde se procura precificar opções sobre juros a termo.

O segundo objetivo deste trabalho era determinar o método para o qual o resultado total final de uma posição hedgeada mais se aproxima de zero e que, conseqüentemente, se mostra mais adequado para aplicação no ambiente de trabalho do autor, que atua como *Market Maker*. Neste critério, o Método 3 voltou a apresentar excelentes resultados para o segundo e terceiro períodos, superando até mesmo a simulação por Monte Carlo. Entretanto, se mostrou inadequado quando aplicado ao primeiro período, apresentando maior resultado absoluto entre todos. Isto indica que este método aparenta melhor desempenho para aplicação por um *Market Maker* em períodos de baixa ou média volatilidade. Em um período como o primeiro, onde houve grande instabilidade de preços, a simulação de Monte Carlo se mostrou muito superior, não apenas pelo resultado absoluto mais próximo de zero, mas por ter apresentado o menor desvio padrão de todos.

Assim, conclui-se que o melhor método para precificação de uma opção sobre juros a termo é o que deriva sua volatilidade através das volatilidades de IDIs disponíveis no mercado, pelas fórmulas do método 3:

$$Var\left(\frac{Fat_L}{Fat_C}\right) \cong \frac{Fat_L^2}{Fat_C^2} \left[\frac{\sigma_L^2}{Fat_L^2} + \frac{\sigma_C^2}{Fat_C^2} - 2 \frac{\rho\sigma_L\sigma_C}{Fat_C Fat_L} \right] \quad (113)$$

$$Vol_{Mét3} = \left[\frac{\sqrt{Var\left(\frac{Fat_L}{Fat_C}\right)}}{Fator_{termo}} \right] * \sqrt{\frac{252}{T}} \quad (114)$$

Este método analítico apresentou maior semelhança com o de Monte Carlo, assim como bom desempenho na análise de resultado total hedgeado. O desenvolvimento matemático para se encontrar uma aproximação para variância de X/Y, apresentado no anexo B, foi consultado de SELTAN³⁹. A contribuição do autor para o desenvolvimento do método reside em três aspectos:

- a) aplicação do lema de Itô para se encontrar o comportamento do fator multiplicativo de juros (Fator) através do comportamento do Índice DI futuro (IDI_F) assumido pelo mercado na precificação de opções sobre IDI;
- b) levantamento da hipótese de que, sendo o fator a termo o resultado de uma razão entre um fator longo por um fator curto (eq. 79), uma vez encontrada a variância destes fatores pela aplicação do lema de Itô, a variância do fator a termo poderia ser aproximada como uma extensão do desenvolvimento divulgado por SELTAN, de modo $Var\left(\frac{X}{Y}\right) = Var\left(\frac{Fator_{Longo}}{Fator_{Curto}}\right)$, resultando na eq. 113;
- c) adaptação para as convenções do mercado brasileiro, que utiliza volatilidade em % anualizada com prazo contado em dias úteis, levando o autor a desenvolver a eq. 114.

Uma ressalva ainda deve ser feita quando o período de análise apresenta volatilidade acima do normal, para o qual a simulação de Monte Carlo mostrou melhor desempenho ao obter resultado total mais próximo de zero com o menor desvio possível.

³⁹ SELTAN, H. **Approximations for Mean and Variance of a Ratio**. disponível em <<http://www.stat.cmu.edu/~hseleman/files/ratio.pdf>>, acesso em 03/10/2016.

11 REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, C.; VICENTE, J. **Identifying Volatility Risk Premia from Fixed Income Asian Options**. Rio de Janeiro: [s.n.], 2008, 43p.
- BARBACHAN, J. S. F.; ORNELAS, J. R. H. Apreçamento de Opções de IDI Usando o Modelo CIR. **Est. Econ.**, São Paulo, v. 33, n. 2, p. 287-323, 2003.
- BARBACHAN, J. S. F.; ORNELAS, J. R. H. Apreçamento de opções de IDI usando distribuições hiperbólicas generalizadas. **Economia Aplicada**, v. 7, n. 4, p. 768-794, 2003.
- BARBEDO, C. H.; VICENTE, J. V.; LION, O. B. Pricing Asian Interest Rate Options with a Three-Factor HJM Model. **Revista Brasileira de Finanças**, Rio de Janeiro, v. 8, n. 1, p. 9-23, 2010.
- BEHVAND, F. **Forward Implied Volatility**. Oxford: Oxford University, 2010, 64 p.
- BLACK, F.; SCHOLES, M. The Pricing of Options and Corporate. **The Journal of Political Economy**, v. 81, p. 637-654, 1973.
- BLACK, F. The Pricing of Commodity Contracts. **Journal of Financial Economics**, Cambridge, v. 3, p. 167-179, 1976.
- BOYLE, P. P. Options: A Monte Carlo Approach. **Journal of Financial Economics**, Vancouver, v. 4, p. 323-338, 1977.
- CARRARA, A. F. **O Mercado de Balcão Brasileiro: um estudo sobre as características e a regulamentação**. 2013, 164p. Dissertação (Mestrado) – Escola Superior de Agricultura, Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2013.
- COX, J. C.; ROSS, S. A.; RUBENSTEIN, M. Option Pricing: A Simplified Approach. **Journal of Financial Economics**, v. 7, p. 229-263, 1979.
- CORTE, P. D.; SARNO, L.; TSIKAKASA, I. **Spot and Forward Volatility in Foreign Exchange**. [S.I.: s.n.], 2010, 38p.
- EGELKRAUTA, T. M.; GARCIA, P. **Intermediate Volatility Forecasts Using Implied Forward Volatility: The Performance of Selected Agricultural Commodity Options**. St. Louis: [s.n.], 2005, 21p.
- GARMAN, M. B., KLASS M. J. **On the Estimation of Security Price Volatilities from Historical Data**. Berkeley: Journal of Business, 1980. v.53, p.67-78.
- GLASSERMAN, P.; WU, Q. Forward And Future Implied Volatility. **International Journal of Theoretical and Applied Finance**, v. 14, n. 3, p. 407-432, 2011.
- GUPTA, A.; SUBRAHMANYAM, M. G. Pricing and hedging interest rate options: Evidence from cap-floor markets. **Journal of Banking & Finance**, v. 29, p. 701-733, 2005.

HAUGH, M. **The Monte Carlo Framework, Examples from Finance and Generating Correlated Random Variables.** 2004, disponível em <http://www.columbia.edu/~mh2078/MCS04/MCS_framework_FEEgs.pdf>, acesso em 12/09/2016.

HENDERSON, V. et al. **Bounds for In-Progress Floating-Strike Asian Options using Symmetry.** [S.I.: s.n.], 2004, 29p.

HOMESCU C. **Implied volatility surface: construction methodologies and characteristics.** [S.I.: s.n.], 2011, 40 p.

HULL, J. C. **Options, Futures, And Other Derivatives:** Global Edition. Harlow: Pearson Education Limited, 2012. 8. ed. 847 p.

Itô, K. On Stochastic Differential Equations. **Memoirs of the American Mathematical Society**, n. 4, p. 1–51, 1951.

IWASHITA, Y. **Smile Interpolation and Extrapolation.** [S.I.]: OpenGamma Quantitative Research 25, 20 p.

KRUSE, S. **On the Pricing of Forward Starting Options under Stochastic Volatility.** Kaiserslautern: Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik, 2003, 10 p.

LAKHLANI, V. B. **Pricing and Hedging Asian Options.** All Graduate Plan B and other Reports, paper 315, Utah State University, 36 p.

LONGSTAFF, F. A. The Valuation of Options on Yields. **Journal of Financial Economics**, Columbus, v. 26, p. 97-121, 1990.

MACIEL, L. D.; BALLINI, R.; SILVEIRA, L. R. F. **Precificação de Opções de Taxa de Juros no Brasil: Uma Análise dos Modelos de Black, Vasicek, CIR e Redes Neurais Recorrentes.** [S.I.: s.n.]. 20 p.

McAleer, M.; Medeiros, M. C. REALIZED VOLATILITY: A REVIEW. **Econometric Reviews**, v.27, p. 10–45, 2008.

NIELSEN, L. T. **Understanding $N(d1)$ and $N(d2)$:** Risk-Adjusted Probabilities in the Black-Scholes Model. Fontainebleau: INSEAD, 1992, 16p.

NIELSEN, L. B. **Pricing Asian Options.** [S. I.: s.n.], 2001, 134p.

OROSI, G. **Arbitrage-Free Call Option Surface Construction Using Regression Splines.** [S.I.: s.n.], 2013, 27 p.

PARKINSON, M. The Extreme Value Method for Estimating the Variance of the Rate of Return. **Journal of Business**, v.53, p.61–68, 1980.

ROGERS, L., SATCHELL S. Estimating Variance from High, Low and Closing Prices. **Annals of Applied Probability**, Cambridge, v.1, p.504–512, 1991.

SELTAN, H. **Approximations for Mean and Variance of a Ratio**. disponível em <<http://www.stat.cmu.edu/~hseltman/files/ratio.pdf>>, acesso em 03/10/2016.

SENGER, M. C. M.; ROSENFELD, R. **Apreçamento e Hedge de Opções sobre Taxa de Juro no Brasil: Uma Comparação entre os Modelos de Black, Vasicek e Black-Derman-Toy**. [S.I.: s.n.]. 24 p.

SIGMAN, K. **Simulating Brownian motion (BM) and geometric Brownian motion (GBM)**. 2013, disponível em <<http://www.columbia.edu/~ks20/4404-Sigman/4404-Notes-sim-BM.pdf>>, acesso em 08/09/2016.

SIGMAN, K. **Simulating normal (Gaussian) rvs with applications to simulating Brownian motion and geometric Brownian motion in one and two dimensions**. 2007, disponível em <<http://www.columbia.edu/~ks20/4703-Sigman/4703-07-Notes-BM-GBM-I.pdf>>, acesso em 10/09/2016.

SINCLAIR, E. **Volatility Trading**. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2008, 212 p.

WANG, X.; He, J. A geometric Levy model for n-fold compound option pricing in a fuzzy framework. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 316, p. 248-264, 2016.

WEBER, E. J. **A Short History of Derivative Security Markets**. Crawley: The University of Western Australia, 2008. 49 p.

WIKLUND, E. **Asian Option Pricing and Volatility**. Stockholm: [s.n.], 2012, 43p.

YANG, D., ZHANG Q. Drift-Independent Volatility Estimation Based on High, Low, Open, and Close Prices. **Journal of Business**, Chicago, v.73, p.477–491, 2000.

YIN, H.; WANG, Y.; QI, L. Shape-Preserving Interpolation and Smoothing for Options Market Implied Volatility. **J Optim Theory Appl**, v. 142, p. 243-266, 2009.

ZHANG, J. E. **Theory Of Continuously-Sampled Asian Option Pricing**. Hong Kong: [s.n.], 2000, 24p.

**APÊNDICE A - APLICAÇÃO DO LEMA DE ITÔ SOBRE O
COMPORTAMENTO DO FATOR MULTIPLICATIVO DE JUROS DE UMA IDI**

Da seção 6.2, temos que o comportamento do índice futuro de uma opção sobre IDI é dado pela equação 75, na forma de (o asterisco na numeração da equação significa que já fora apresentada no texto do trabalho):

$$dIDI_{F_0} = \sigma_{IDI_F} IDI_{F_0} dz \quad (75)^*$$

E a relação entre o índice e o fator multiplicativo da taxa de juros para o período de apuração é dado pela equação 76:

$$Fator = \frac{IDI_{F_0}}{IDI_{Spot}} = \frac{IDI_{F_0}}{constante} = \frac{IDI_{F_0}}{K} \quad (76)^*$$

O lema de Itô (seção 5.2.7) estabelece relação entre uma variável x , com taxas de tendência e de variância definidas, e uma variável $G(x, t)$, dependente apenas de x e do tempo. Se x se comporta como:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz \quad (39)^*$$

O lema mostra que dG segue o processo:

$$dG = \left(\frac{\delta G}{\delta x} a + \frac{\delta G}{\delta t} + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 G}{\delta x^2} b^2 \right) dt + \frac{\delta G}{\delta x} b dz \quad (39)^*$$

O comportamento do índice futuro é dado pela equação 75, e o comportamento do Fator pode ser encontrado através da aplicação do lema de Itô, da mesma maneira que aplicado na seção 5.2.7.1, considerando G como sendo o Fator e x como sendo o índice futuro. O autor realizou esta aplicação, e encontrou:

$$\frac{\delta Fator}{\delta IDI_{F_0}} = \frac{1}{K}, \quad \frac{\delta^2 Fator}{\delta IDI_{F_0}^2} = 0, \quad \frac{\delta Fator}{\delta t} = 0 \quad (115)$$

O lema mostra que dG segue o processo:

$$dG = \left(\frac{\delta G}{\delta x} a + \frac{\delta G}{\delta t} + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 G}{\delta x^2} b^2 \right) dt + \frac{\delta G}{\delta x} b dz \quad (40)^*$$

E segue, pelo lema de Itô (equação 40) com $a = \mu_{IDIF} = 0$ (da eq. 70):

$$dFator = \sigma_{IDIF} Fator dz \quad (116)$$

Que é o resultado apresentado pela equação 77.

**APÊNDICE B – APLICAÇÃO DO LEMA DE ITÔ SOBRE O
COMPORTAMENTO DO FATOR MULTIPLICATIVO DE JUROS DE UMA
SWAPTION.**

Da seção 6.2, temos que o comportamento do PU futuro de uma Swaption é dado pela equação 78, na forma de (o asterisco na numeração da equação significa que já fora apresentada no texto do trabalho):

$$dPU_{F_0} = \sigma_{PU_F} PU_{F_0} dz \quad (78)^*$$

Onde:

PU_{F_0} = valor futuro do PU para o contrato de DI1 futuro a termo negociado.

Lembra-se, ainda, que, pelas equações 80 e 81, a relação entre PU futuro e $Fator_{termo}$ é dada por:

$$PU_{F_0} = \frac{100.000}{(1+DI_{termo})^{\frac{du_{termo}}{252}}} = \frac{100.000}{Fator_{T_1 T_2}} = \frac{100.000}{Fator_{termo}} \quad (80)^*$$

Ou

$$Fator_{termo} = \frac{100.000}{PU_{F_0}} \quad (81)^*$$

Onde $du_{termo} = T_2 - T_1$ se estes são contados em dias úteis.

O lema de Itô estabelece relação entre uma variável x , com taxas de tendência e de variância definidas, e uma variável G , dependente apenas de x e do tempo, da seguinte forma:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz \quad (39)^*$$

O lema mostra que dG segue o processo:

$$dG = \left(\frac{\delta G}{\delta x} a + \frac{\delta G}{\delta t} + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 G}{\delta x^2} b^2 \right) dt + \frac{\delta G}{\delta x} b dz \quad (40)^*$$

O comportamento do PU futuro é dado pela equação 78, e o comportamento do $Fator_{termo}$ pode ser encontrado através da aplicação do lema de Itô, da mesma maneira que aplicado na seção 5.2.7.1. Considerando G como sendo o Fator a termo de juros e x como sendo o PU futuro, o autor realizou a seguinte aplicação:

$$\frac{\delta Fator_{termo}}{\delta PU_{F_0}} = \frac{-100.000}{(PU_{F_0})^2}, \quad \frac{\delta^2 Fator_{termo}}{\delta PU_{F_0}^2} = \frac{200.000}{(PU_{F_0})^3}, \quad \frac{\delta Fator_{termo}}{\delta t} = 0 \quad (117)$$

Ou, utilizando-se da equação 81:

$$\frac{\delta Fator_{termo}}{\delta PU_{F_0}} = \frac{-Fator_{termo}}{PU_{F_0}}, \quad \frac{\delta^2 Fator_{termo}}{\delta PU_{F_0}^2} = \frac{Fator_{termo}}{(PU_{F_0})^2}, \quad \frac{\delta Fator_{termo}}{\delta t} = 0 \quad (118)$$

E segue, pelo lema de Itô (eq. 40), com $\mu_{PU_F} = 0$ (da eq. 78):

$$dFator_{termo} = \left(\frac{(\sigma_{PU_F} PU_{F_0})^2 Fator_{termo}}{2 (PU_{F_0})^2} \right) dt + \sigma_{PU_F} dz \quad (119)$$

Ou

$$dFator_{termo} = \frac{Fator_{termo} \sigma_{PU_F}^2}{2} dt - Fator_{termo} \sigma_{PU_F} dz \quad (87)^*$$

APÊNDICE C – APRESENTAÇÃO DA BASE DE DADOS DA PLANILHA

Neste apêndice, são apresentadas e explicadas as colunas de planilha do software MS Excel® 2013 que fornecem a base de dados para a montagem da tabela 6, assim como a simulação de Monte Carlo. É tomado o exemplo do período 1: Abril/2015 – Julho/2015 – Janeiro/2015. O Símbolo N15 representa a data 01/07/2015 e F16, 04/01/2016.

Figura 33 - Base de dados - Colunas de B a H

	B	C	D	E	F	G	H
1	ContErros	0					
2	Vértice	Vencimento	DU entre				
3	N15	01/07/2015	128				
4	F16	04/01/2016					
5							
6	Data	IDI Dia	DU N15	DUF16	DIN15	DIF16	TermoN15F16
7	07/04/2015	179847,95	58	186	13,00%	13,29%	13,420%
8	08/04/2015	179932,67	57	185	12,98%	13,22%	13,329%
9	09/04/2015	180017,42	56	184	12,99%	13,26%	13,381%
10	10/04/2015	180102,22	55	183	13,00%	13,26%	13,373%
11	13/04/2015	180187,05	54	182	13,01%	13,27%	13,382%
12	14/04/2015	180271,92	53	181	13,02%	13,27%	13,375%
13	15/04/2015	180356,84	52	180	13,03%	13,27%	13,368%

Fonte: Elaboração do autor

- a) Coluna B: datas de interesse do período;
- b) Coluna C: valor corrente do Índice DI (IDI);
- c) Coluna D: dias úteis até N15;
- d) Coluna E: dias úteis até F16;
- e) Coluna F: DI1 futuro para N15 obtidos da BM&F;
- f) Coluna G: DI1 futuro para F16 obtidos da BM&F;
- g) Coluna H: DI1 a termo entre N15 e F16 calculado através da divisão entre os fatores de juros de F16 por N15 (eq. 79);

Figura 34- Base de dados - Colunas de I a R

	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1										
2										
3										
4										
5	N15		F16			Termo	N15		F16	
6	Ter 1bpN15	Ter 2bpN15	Ter 1bpF16	Ter 2bpF16	Fut Mercado	Fut+1bp	Fut +1bpN15	Fut +2bpN15	Fut +1bpF16	Fut +2bpF16
7	13,416%	13,411%	13,435%	13,449%	106605,454	106610,228	106603,2828	106601,1119	106612,3993	106619,3446
8	13,325%	13,320%	13,344%	13,358%	106561,9936	106566,7696	106559,8602	106557,7271	106568,9031	106575,8124
9	13,376%	13,372%	13,395%	13,409%	106586,4684	106591,2433	106584,3721	106582,2761	106593,3397	106600,2108
10	13,369%	13,365%	13,388%	13,402%	106582,9696	106587,7447	106580,9111	106578,8528	106589,8033	106596,6369
11	13,378%	13,374%	13,396%	13,410%	106587,1657	106591,9405	106585,1446	106583,1238	106593,9617	106600,7576
12	13,371%	13,367%	13,389%	13,403%	106583,7947	106588,5697	106581,8113	106579,8282	106590,5532	106597,3115
13	13,364%	13,359%	13,382%	13,396%	106580,3193	106585,0944	106578,3736	106576,4282	106587,0402	106593,7609

Fonte: Elaboração do Autor

- h) Coluna I: novo DI1 a termo caso o DI1 para N15 aumente em 1bp (0,01%) ;
- i) Coluna J: novo DI1 a termo caso o DI1 para N15 aumente em 2bp (0,02%);
- j) Coluna K: novo DI1 a termo caso o DI1 para F16 aumente em 1bp;
- k) Coluna L: novo DI1 a termo caso o DI1 para F16 aumente em 2bp;
- l) Coluna M: valor futuro do Índice de Juros a Termo (IJT, definido na seção 6.3) aplicando-se o DI1 a termo encontrado na coluna H;
- m) Coluna N: novo valor futuro do IJT quando o DI1 a termo é 1bp maior;
- n) Coluna O: novo valor futuro do IJT quando o DI1 a termo é igual ao valor da coluna I;
- o) Coluna P: novo valor futuro do IJT quando o DI1 a termo é igual ao valor da coluna J;
- p) Coluna Q: novo valor futuro do IJT quando o DI1 a termo é igual a valor da coluna K;
- q) Coluna R: novo valor futuro do IJT quando o DI1 a termo é igual ao valor da coluna L;

Figura 35 - Base de dados - Colunas de X a AC

	X	Y	Z	AA	AB	AC
1						
2						
3						
4						
5						
6	p hist	Cov hist	FatorN15	FatorF16	TermoEsp	CDI Acum Termo
58	0,917487	3,20886E-08	1,003049893	1,072858283	1,069596129	
59	0,917511	3,19073E-08	1,002541107	1,072741528	1,070022486	
60	0,917145	3,16966E-08	1,00203223	1,072470277	1,070295191	
61	0,916506	3,13976E-08	1,001523891	1,071950734	1,070319684	
62	0,914807	3,08101E-08	1,000507531	1,070526467	1,069983417	
63			1	1,070103768	1,070103768	1
64			1	1,069065665	1,069608249	1,000507531
65			1	1,068363234	1,069447964	1,00101532
66			1	1,067895484	1,06952228	1,001523366
67			1	1,067150395	1,069318492	1,00203167

Fonte: Elaboração do autor

- r) Coluna X: cálculo da correlação entre os fatores curto (N15) e longo (F16) a partir de dados históricos dos últimos 100 fechamentos de preços;
- s) Coluna Y: cálculo da covariância entre os fatores curto (N15) e longo (F16) a partir de dados históricos dos últimos 100 fechamentos de preços;
- t) Coluna Z: fator multiplicativo de juros curto (eq.12);
- u) Coluna AA: fator multiplicativo de juros longo (eq.12);
- v) Coluna AB: expectativa do fator a termo esperado. Até se atingir T1, é dado pela divisão entre fatores. Após T1, é o dado da coluna AC multiplicado pela coluna AA;
- w) Coluna AC: fator em CDI acumulado a partir de T1.

APÊNDICE D – CÓDIGO PARA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

A seguir é apresentado o código desenvolvido inteiramente pelo autor para a simulação de Monte Carlo para as opções estudadas. Este código se aplica à linguagem Visual Basic for Applications (VBA), e o software no qual foi rodado é o MS Excel® 2013. Os comentários dentro do código são destacados pelo caractere de aspa única (‘).

Tabela 14- CÓDIGO PARA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

```

Sub SimulaBS()

‘Resumo: As simulações são realizadas para todas as datas, obtendo as volatilidades para
cada dia do período analisado. Partindo-se do dia inicial da simulação, realiza-se um caminho
aleatório com intervalo de tempo discreto de um dia útil até se atingir a data final, obtendo-se
uma volatilidade realizada e um preço para a opção. A simulação se repete 10mil vezes para
cada dia e para cada Strike

‘linhafinal é a última data para a qual se pretende realizar simulação
‘linha início é a primeira
If Range("linhafinal").Value > Range("ultlongo").Value Then
    Exit Sub
End If
If Range("linhainicio").Value > Range("ultcurto").Value Then
    Call SimulaBSLongo ‘Se a data inicial é após T1, chama-se a sub SimulaBSLongo
    Exit Sub
End If

Set VolCurtarng = Range("MonVolCurta") ‘Matriz com vol de IDI Curta
Set VolLongarng = Range("MonVolLonga") ‘Matriz com vol de IDI Longa
Set PrazoCurtorng = Range("MonPrazoCurto") ‘Coluna com datas até T1
Set PrazoLongoRng = Range("MonPrazoLongo") ‘Coluna com datas até T2
Set FatCurtoRng = Range("MonFatCurto") ‘Coluna com fator de juros curto
Set FatLongoRng = Range("Monfatlongo") ‘Coluna com fator de juros longo

```

(Continua)

```
QtdeSimu = Range("QtdeSimu").Value '10.000
Set StrikeFatorRng = Range("MonStrikefator")
tipo = Range("Montipo").Value
Set RangeBS = Range("monRangeBS")
Set RangeVol = Range("monRangeVol")
Set FatTermoRng = Range("MonfatTermo")
Set Corrrng = Range("moncorr")
```

```
Dim linha As Integer
```

```
Dim DatasCurto As Range
```

```
Dim DatasLongo As Range
```

```
Dim Parada As Integer
```

```
Dim i As Integer
```

```
Dim Cont As Integer
```

```
Dim W1 As Double
```

```
Dim W2 As Double
```

```
Dim VolCurtaDia As Double
```

```
Dim VolLongaDia As Double
```

```
Dim FatTermo As Double
```

```
Dim Preco As Double
```

```
Dim TamCurto As Double
```

```
Dim TamLongo As Double
```

```
Dim FatLongoMem As Double
```

```
Dim FatCurtoMem As Double
```

```
Dim FatTermoMem As Double
```

```
Dim VolReal As Double
```

```
Dim Correlacao() As Double
```

```
Dim PrazoCurto As Double
```

```
Dim PrazoLongo As Double
```

```
Dim FatCurto As Double
```

```
Dim FatLongo As Double
```

```
Dim ContErro As Integer
```

```
Dim VolMem As Double
```

```

Dim FatTermoAntes As Double

ContErro = 0
Principal = Range("monprincipal").Value

UltCurto = Range("ultcurto").Value
Ultlongo = Range("ultlongo").Value

On Error GoTo Erro

For linha = Range("linhainicio").Value To Range("linhafinal").Value

    If linha > Range("ultcurto").Value Then
        Range("linhainicio").Value = linha
        Call SimulaBSLongo
        Exit Sub
    End If

    PrazoCurto = PrazoCurtorng(linha).Value
    PrazoLongo = PrazoLongoRng(linha).Value
    FatCurto = FatCurtoRng(linha).Value
    FatLongo = FatLongoRng(linha).Value
    FatTermo = FatTermoRng(linha).Value

    FatCurtoMem = FatCurto
    FatLongoMem = FatLongo
    FatTermoMem = FatTermo
    ReDim Correlacao(PrazoCurto) As Double

```

(Continuação)

Tabela 14- CÓDIGO PARA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

```

For i = 1 To PrazoCurto
    Correlacao(i) = Corrrng(linha + i - 1).Value
Next
For colu = 7 To 1 Step -1 'Para todos os Strikes
    VolCurta = VolCurtarng(linha, colu).Value

```

```

VolLonga = VolLongarng(linha, colu).Value

StrikeFator = StrikeFatorRng(8 - colu)
Preco = 0
Parada = 1
Cont = 1

VolCurtaDia = VolCurta * FatCurtoMem * Sqr(1 / 252) 'Aplica a porcentagem diária
VolLongaDia = VolLonga * FatLongoMem * Sqr(1 / 252)

VolReal = 0
VolMem = 0

Do While Cont <= QtdeSimu And Parada <= 10000

    FatLongo = FatLongoMem
    FatCurto = FatCurtoMem
    Cont = Cont + 1
    Parada = Parada + 1
    FatTermo = FatTermoMem

    VolReal = 0
    VolLongaDia = VolLonga * FatLongo * Sqr(1 / 252)

    For i = 1 To PrazoCurto

        W1 = WorksheetFunction.NormSInv(Rnd()) 'Primeiro ε da eq. 38

```

(Continuação)

Tabela 14- CÓDIGO PARA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

```

W2 = Correlacao(i) * W1 + Sqr(1 - Correlacao(i) ^ 2) * _ _WorksheetFunction.NormSInv(Rnd())
'Segundo ε da eq. 38

    FatTermoAntes = FatLongo / FatCurto
    FatCurto = W1 * VolCurtaDia + FatCurto
    FatLongo = W2 * VolLongaDia + FatLongo

    VolReal = VolReal + Log((FatLongo / FatCurto) / FatTermoAntes) ^ 2

```

```

VolCurtaDia = VolCurta * FatCurto * Sqr(1 / 252)
VolLongaDia = VolLonga * FatLongo * Sqr(1 / 252)

Next

If PrazoLongo - PrazoCurto > 1 Then

    For i = 1 To PrazoLongo - PrazoCurto
        W2 = WorksheetFunction.NormSInv(Rnd())
        FatTermoAntes = FatLongo / FatCurto
        FatLongo = W2 * VolLongaDia + FatLongo

        VolReal = VolReal + Log((FatLongo / FatCurto) / FatTermoAntes) *
_ ^ 2
        VolLongaDia = VolLonga * FatLongo * Sqr(1 / 252)
    Next
End If

FatTermo = FatLongo / FatCurto

VolMem = VolMem + Sqr((VolReal * 252 / PrazoLongo) *
_ (1 / QtdeSimu)

```

(Continuação)

Tabela 14- CÓDIGO PARA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

```

If tipo = "Call" Then
    Preco = Preco + WorksheetFunction.Max(0, FatTermo - StrikeFator) *
_ (1 / QtdeSimu)
Else
    Preco = Preco + WorksheetFunction.Max(0, StrikeFator - FatTermo) *
_ (1 / QtdeSimu)
End If

Loop

RangeBS(linha, 8 - colu).Value = Principal * Preco / FatLongoMem
RangeVol(linha, 8 - colu).Value = VolMem

```

```

Next
Range("registro").Offset(linha, 0).Value = QtdeSimu
Next

Range("registro").Calculate
Range("linhainicio").Value = Range("linhafinal").Value + 1
Range("linhafinal").Calculate

Exit Sub
Erro:

    ContErro = ContErro + 1
    If ContErro > 1000 Then
        Range("errocont").Value = linha
        Exit Sub
    End If
    Resume

End Sub

```

(Continuação)

Tabela 14- CÓDIGO PARA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

```

Sub SimulaBSLongo()

If Range("linhainicio").Value <= Range("ultcurto").Value Or_
_ Range("linhainicio").Value > Range("ultlongo").Value Then
    Exit Sub
End If

Set cdiapuradorng = Range("MonCdiTermo")
Set FatTermoRng = Range("MonFatTermo")
Set VolLongarng = Range("MonVolLonga")
Set PrazoLongoRng = Range("MonPrazoLongo")
Set FatCurtoRng = Range("MonFatCurto")
Set FatLongoRng = Range("Monfatlongo")
Set FatTermoRng = Range("MonfatTermo")
QtdeSimu = Range("QtdeSimu").Value

```

```
Set StrikeFatorRng = Range("MonStrikefator")
```

```
tipo = Range("Montipo").Value
```

```
Set RangeBS = Range("monRangeBS")
```

```
Set RangeVol = Range("monRangeVol")
```

```
Dim linha As Integer
```

```
Dim DatasLongo As Range
```

```
Dim Parada As Integer
```

```
Dim i As Integer
```

```
Dim Cont As Integer
```

```
Dim W2 As Double
```

```
Dim VolLongaDia As Double
```

```
Dim FatTermo As Double
```

```
Dim Preco As Double
```

```
Dim TamLongo As Double
```

```
Dim FatLongoMem As Double
Dim FatTermoMem As Double
Dim VolReal As Double
Dim PrazoLongo As Double
Dim FatCurto As Double
Dim FatLongo As Double
Dim CDIApurado As Double
Dim ContErro As Integer
Dim VolMem As Double
Dim FatTermoAntes As Double
Dim VolLonga As Double

ContErro = 0

Principal = Range("monprincipal").Value

Utlongo = Range("ultlongo").Value

On Error GoTo Erro

For linha = Range("linhainicio").Value To Range("linhafinal").Value

    PrazoLongo = PrazoLongoRng(linha).Value
    FatLongo = FatLongoRng(linha).Value
    FatTermo = FatTermoRng(linha).Value
    CDIApurado = cdiapuradorng(linha).Value

    FatLongoMem = FatLongo
    FatTermoMem = FatTermo

    For colu = 7 To 1 Step -1
```

```
VolLonga = VolLongarng(linha, colu).Value
```

```
StrikeFator = StrikeFatorRng(8 - colu)
```

```
Preco = 0
```

```
Parada = 1
```

```
Cont = 1
```

```
VolLongaDia = VolLonga * FatLongoMem * Sqr(1 / 252)
```

```
VolReal = 0
```

```
VolMem = 0
```

```
Do While Cont <= QtdeSimu And Parada <= 10000
```

```
    FatLongo = FatLongoMem
```

```
    Cont = Cont + 1
```

```
    Parada = Parada + 1
```

```
    FatTermo = FatTermoMem
```

```
    VolReal = 0
```

```
    VolLongaDia = VolLonga * FatLongo * Sqr(1 / 252)
```

```
    For i = 1 To PrazoLongo
```

```
        W2 = WorksheetFunction.NormSInv(Rnd())
```

```
        FatTermoAntes = FatLongo * CDIApurado
```

```
        FatLongo = FatLongo + W2 * VolLongaDia
```

```
        VolReal = VolReal + Log((FatLongo * CDIApurado) / FatTermoAntes) ^ 2
```

```
        VolLongaDia = VolLonga * FatLongo * Sqr(1 / 252)
```

```
    Next
```

```

FatTermo = FatLongo * CDIApurado

    VolMem = VolMem + Sqr((VolReal * 252 / PrazoLongo)) * (1 / QtdeSimu)

    If tipo = "Call" Then
        Preco = Preco + WorksheetFunction.Max(0, FatTermo - StrikeFator) * (1 / QtdeSimu)
    Else
        Preco = Preco + WorksheetFunction.Max(0, StrikeFator - FatTermo) * (1 / QtdeSimu)
    End If

    Loop
    RangeBS(linha, 8 - colu).Value = Principal * Preco / FatLongo
    RangeVol(linha, 8 - colu).Value = VolMem
Next
Range("registro").Offset(linha, 0).Value = QtdeSimu
Next
Range("registro").Calculate
Range("linhainicio").Value = Range("linhafinal").Value + 1
Range("linhafinal").Calculate
Exit Sub

Erro:

    ContErro = ContErro + 1
    If ContErro > 1000 Then
        Range("errocont").Value = linha
        Exit Sub
    End If

    Resume

End Sub

```

Fonte: Elaborado pelo autor

APÊNDICE E – CÓDIGO PARA INTERPOLAÇÃO SPLINE CÚBICA

A seguir é apresentado um código em VBA para MS Excel® 2013 adaptado de um desenvolvido por colegas de trabalho do autor para realização das splines cúbicas aplicadas

aos prazos de vencimentos dos DIs. Este código foi desenvolvido pelo autor em conjunto com colegas de trabalho.

Tabela 15 - CÓDIGO PARA INTERPOLAÇÃO SPLINE CÚBICA

```
Function NSpline(S, k, P)

tamanho = Application.Count(k)
Dim X() As Double
ReDim X(tamanho) As Double
Dim A() As Double
ReDim A(tamanho) As Double

If k(2) < k(1) Then
    For i = 1 To tamanho
        X(i) = k(tamanho + 1 - i)
    Next

    For i = 1 To tamanho
        A(i) = P(tamanho + 1 - i)
    Next

ElseIf k(2) > k(1) Then

    For i = 1 To tamanho
        X(i) = k(i)
    Next

    For i = 1 To tamanho
```

(Continua)

```
A(i) = P(i)
  Next
End If

Dim h() As Double, alpha() As Double
ReDim h(tamanho - 1) As Double, alpha(tamanho - 1) As Double

For i = 1 To tamanho - 1
  h(i) = X(i + 1) - X(i)
Next i

For i = 2 To tamanho - 1
  alpha(i) = 3 / h(i) * (a(i + 1) - a(i)) - 3 / h(i - 1) * (a(i) - a(i - 1))
Next i

Tam = tamanho
Dim l() As Double, u() As Double, z() As Double, c() As Double, b() As Double, D() As Double
ReDim l(Tam) As Double
ReDim u(Tam) As Double
ReDim z(Tam) As Double
ReDim c(Tam) As Double
ReDim b(Tam) As Double
ReDim D(Tam) As Double

l(1) = 1
u(1) = 0
z(1) = 0
l(Tam) = 1: z(Tam) = 0: c(Tam) = 0
For i = 2 To Tam - 1
```

(Conclusão)

Tabela 15 - CÓDIGO PARA INTERPOLAÇÃO SPLINE CÚBICA

```

l(i) = 2 * (X(i + 1) - X(i - 1)) - h(i - 1) * u(i - 1)
u(i) = h(i) / l(i)
z(i) = (alpha(i) - h(i - 1) * z(i - 1)) / l(i)
Next i

For i = Tam - 1 To 1 Step -1
  c(i) = z(i) - u(i) * c(i + 1)
  b(i) = (A(i + 1) - A(i)) / h(i) - h(i) * (c(i + 1) + 2 * c(i)) / 3
  D(i) = (c(i + 1) - c(i)) / 3 / h(i)
Next i

For i = 1 To Tam - 1
  If (X(i) <= S) And (S <= X(i + 1)) Then
    NSpline = A(i) + b(i) * (S - X(i)) + c(i) * (S - X(i)) ^ 2 + D(i) * (S - X(i)) ^ 3
  End If
Next i

If S <= X(1) Then NSpline = A(1)
If S >= X(Tam) Then NSpline = A(Tam)

End Function

```

Fonte: Elaborado pelo autor e seus colegas de trabalho

APÊNDICE F – MÉTODO DE BISSECÇÃO PARA ENCONTRO DO STRIKE EM FUNÇÃO DO DELTA A SER ATINGIDO E A VOLATILIDADE

Como explicado na seção 5.5.2, o Delta de uma opção tende a crescer quando sua probabilidade de ser exercida aumenta. Assim, para uma volatilidade previamente definida pelos métodos desenvolvidos na seção 7, há apenas um Strike, em índice, que retorna Delta específico, 50%, por exemplo. Assim, para se definir qual Strike possui Delta 50% para a volatilidade encontrada, utilizou-se do método da bissecção. Um código em VBA para MS Excel® 2013 foi desenvolvido pelo autor e é apresentado a seguir:

Tabela 16 - MÉTODO DE BISSECÇÃO PARA ENCONTRO DO STRIKE

```
Function StrikeFwd(Taxa, Fwd, Fwd2, Vol, Prazo, Tipo, DelTarget, Opcao)
```

```
Dim SInf As Double
```

```
Dim SSup As Double
```

```
Dim SMid As Double
```

```
Dim Tol As Double
```

```
Dim i As Integer
```

```
Dim DelInf As Double
```

```
Dim DelSup As Double
```

```
Dim DelMid As Double
```

```
Dim DifInf As Double
```

```
Dim DifSup As Double
```

```
Dim DifMid As Double
```

(Continua)

```
SInf = 100000

SSup = 150000

SMid = 125000

End If

If Opcao = "IDI" Then

    SInf = 150000

    SSup = 250000

    SMid = (SSup + SInf) / 2

End If

Tol = 0.001

DelInf = DeltaBS(Taxa, Fwd, Fwd2, SInf, Vol, Prazo, Tipo)

DifInf = DelInf - DelTarget

If Abs(DifInf) <= Tol Then

    StrikeFwd = SInf

    Exit Function

End If

DelSup = DeltaBS(Taxa, Fwd, Fwd2, SSup, Vol, Prazo, Tipo)

DifSup = DelSup - DelTarget

If Abs(DifSup) <= Tol Then

    StrikeFwd = SSup

    Exit Function

End If
```

(Continuação)

Tabela 16 - MÉTODO DE BISSECÇÃO PARA ENCONTRO DO STRIKE

```
DelMid = DeltaBS(Taxa, Fwd, Fwd2, SMid, Vol, Prazo, Tipo)
```

```
DifMid = DelMid - DelTarget
```

```
If Abs(DifMid) <= Tol Then
```

```
    StrikeFwd = SMid
```

```
    Exit Function
```

```
End If
```

```
For i = 1 To 30
```

```
    If DifMid * DifInf < 0 Then
```

```
        SSup = SMid
```

```
    Else
```

```
        SInf = SMid
```

```
    End If
```

```
        SMid = (SSup + SInf) / 2
```

```
DelInf = DeltaBS(Taxa, Fwd, Fwd2, SInf, Vol, Prazo, Tipo)
```

```
DifInf = DelInf - DelTarget
```

```
If Abs(DelInf - DelTarget) <= Tol Then
```

```
    StrikeFwd = SInf
```

```
    Exit Function
```

```
End If
```

```
DelSup = DeltaBS(Taxa, Fwd, Fwd2, SSup, Vol, Prazo, Tipo)
```

```
DifSup = DelSup - DelTarget
```

```
If Abs(DelSup - DelTarget) <= Tol Then
```

```
StrikeFwd = Ssup  
  
    Exit Function  
  
End If  
  
DelMid = DeltaBS(Taxa, Fwd, Fwd2, Smid, Vol, Prazo, Tipo)  
  
DifMid = DelMid – DelTarget  
  
If Abs(DifMid) <= Tol Then  
  
    StrikeFwd = Smid  
  
    Exit Function  
  
End If  
  
Next  
  
If I = 30 Then  
  
    StrikeFwd = “30 steps: Sinf=” & Sinf & “ Delinf=” & DelInf & “ Ssup=” & Ssup & “ Delsup=” &  
DelSup  
  
End If  
  
End Function
```

Fonte: Elaborado pelo autor

APÊNDICE G – CÓDIGO DE INTERPOLAÇÃO EXPONENCIAL PARA O ENCONTRO DAS VOLATILIDADES

Tabela 17 - CÓDIGO DE INTERPOLAÇÃO EXPONENCIAL

```
Function Exponencial(Vols As Range, Strikes As Range, Strike)
```

```
'Faz a interpolação exponencial de uma curva
```

```
'coloca na ordem certa, caso não esteja
```

```
Dim tamanho As Integer
```

```
tamanho = Application.Count(Vols)
```

```
Dim Vetor_Vol() As Double
```

```
ReDim Vetor_Vol(tamanho) As Double
```

```
Dim Vetor_Strikes() As Double
```

```
ReDim Vetor_Strikes(tamanho) As Double
```

```
If Strikes(tamanho) < Strikes(1) Then
```

```
    For i = 1 To tamanho
```

```
        Vetor_Strikes(i) = Strikes(tamanho + 1 - i)
```

```
    Next
```

```
    For i = 1 To tamanho
```

```
        Vetor_Vol(i) = Vols(tamanho + 1 - i)
```

```
    Next
```

```
ElseIf Strikes(tamanho) > Strikes(1) Then
```

```
    For i = 1 To tamanho
```

```
        Vetor_Strikes(i) = Strikes(i)
```

```
    Next
```

(Continua)

```

For i = 1 To tamanho
    Vetor_Vol(i) = Vols(i)
Next

End If

Prazo = Strike

'caso esteja fora do conjunto, pega o maix próximo

maximo = UBound(Vetor_Strikes)
minimo = LBound(Vetor_Vol)
If Strike > Vetor_Strikes(maximo) Then
    Exponencial = Vetor_Vol(maximo)
    Exit Function
ElseIf Strike < Vetor_Strikes(minimo) Then
    Exponencial = Vetor_Vol(minimo)
    Exit Function
End If

Dim A As Double
Cont = tamanho
T = False
For i = 1 To Cont
    If Prazo <= Vetor_Strikes(i) And T = False Then
        A = (Prazo - Vetor_Strikes(i - 1)) / (Vetor_Strikes(i) - Vetor_Strikes(i - 1))
        Px = ((1 / ((1 + Vetor_Vol(i - 1)) ^ (Vetor_Strikes(i - 1) / 252))) ^ (1 - A)) _
            * ((1 / ((1 + Vetor_Vol(i)) ^ (Vetor_Strikes(i) / 252))) ^ (A))
        Exponencial = (1 / Px) ^ (252 / Prazo) - 1
        T = True
    End If
Next
End Function

```

APÊNDICE H – CÓDIGO PARA A FÓRMULA DE BLACK DE PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES SOBRE FUTUROS

A adaptação para o mercado brasileiro, que utiliza uma taxa de juros capitalizada diariamente, em contraste com a capitalizada continuamente apresentada pelo método original de Black e Scholes, é uma prática que foi aprendida pelo autor em seu ambiente de trabalho, e a aplicou com elaboração própria para este caso:

Tabela 18 - CÓDIGO PARA ADAPTAÇÃO DE B&S PARA CASO BRASILEIRO

```

Function BS(Taxa, Fwd, Strike, Vol, Prazo, Tipo)

If Prazo > 1 Then

    If Tipo = "Call" Then

        BS = Exp(-Log(1 + Taxa) * Prazo / 252) * _
        _ (Fwd * WorksheetFunction.NormSDist(FuncaoD1(Fwd, Strike, Vol, Prazo)) -
        _ Strike * WorksheetFunction.NormSDist(FuncaoD2(Fwd, Strike, Vol, Prazo)))

    End If

    If Tipo = "Put" Then

        BS = Exp(-Log(1 + Taxa) * Prazo / 252) * _
        _ (Strike * WorksheetFunction.NormSDist(-FuncaoD2(Fwd, Strike, Vol, Prazo)) -
        _ Fwd * WorksheetFunction.NormSDist(-FuncaoD1(Fwd, Strike, Vol, Prazo)))

    End If

End If

End Function

```

(Continua)

```
Function FuncaoD1(Fwd, Strike, Vol, Prazo)
If Prazo > 1 Then

    FuncaoD1 = (Log(Fwd / Strike) + Vol ^ 2 * (Prazo / 252) / 2) / (Vol * (Prazo / 252) ^ (1 / 2))
End If
End Function

Function FuncaoD2(Fwd, Strike, Vol, Prazo)
If Prazo > 1 Then
FuncaoD2 = FuncaoD1(Fwd, Strike, Vol, Prazo) - Vol * (Prazo / 252) ^ (1 / 2)
End If
End Function
```

Tabela 19 - CÓDIGO PARA ENCONTRO DE DELTA

```
Function DeltaBS(Taxa, Fwd, Fwd2, Strike, Vol, Prazo, Tipo)
```

```
‘Fwd indica o futuro do ativo objeto da opção
```

```
DeltaBS = (BS(Taxa, Fwd2, Strike, Vol, Prazo, Tipo) - BS(Taxa, Fwd, Strike, Vol, Prazo,  
Tipo)) / (Fwd2 - Fwd)
```

```
End Function
```

Fonte: Elaborado pelo autor

APÊNDICE J - COLUNAS DA TABELA 4

- a) **COLUNA DELTA FIN:** a coluna DELTA é dada em porcentagem, e mostra a proporção de variação no preço da opção para a variação no Índice. Se a opção possui Delta 90%, uma variação de 10 pontos no Índice de Juros a Termo leva a uma variação de 9 reais na opção. Porém, este índice foi inventado pelo autor, e não é possível realizar o Delta Hedge, como explicado na seção 5.5.1 através de sua negociação. Assim, é necessário que se realize o Delta Hedge através de contratos de DI1 futuros para o prazo curto T_1 e para o prazo longo T_2 . Relembrando da equação 79:

$$Fator_{termo} = \frac{Fator_{T_0T_2}}{Fator_{T_0T_1}} \quad (120)$$

Assim, caso os preços de DI1 futuros longos ou curtos se movam, um impacto é gerado no Fator a termo que, por sua vez, impacta o preço da opção. A Coluna DELTA FIN mede exatamente isto, a sensibilidade do preço da opção em relação aos DI1 curtos e longos. Para uma variação infinitesimal de 0,01% na taxa DI1 curta, quanto se mexe o preço da opção? E para o DI1 longo? Segundo a tabela 4, por exemplo, um aumento de 0,01% na taxa de DI1 curto⁴⁰ faz com que o fator a termo decaia, gerando um impacto negativo de -R\$ 1,95 no preço da opção em 07/04/2015. Já um aumento de 0,01% no DI1 longo faz com que o fator a termo suba, gerando impacto positivo no preço da opção em R\$ 6,25.

- b) **COLUNA DELTA CONTRATOS:** O Delta hedge desta opção é, portanto (segundo apêndice D), realizado pela negociação dos contratos de DI1 curtos e longos. Como visto no apêndice I, no dia 07/04/2015, um aumento de 0,01% na taxa de DI1 curto causa uma diminuição de -R\$ 1,95 no preço da opção. Para se realizar a proteção contra este efeito, deve-se tomar uma posição em contratos de DI1 curto em certa proporção para que se obtenha efeito contrário.

Neste dia, um atuante que comprasse contrato de DI1 futuro para julho de 2015, ganharia R\$1,98 para cada aumento de 0,01% na taxa. Assim, uma simples regra de três devolve a

⁴⁰ Neste caso, o prazo curto T_1 é julho/2015 e o prazo longo T_2 é janeiro/2016. No mercado financeiro, estes meses são representados pelas letras N e F, respectivamente, justificando as notações N15 e F16.

proporcionalidade de número de contratos que devem ser tomados para se realizar o Delta hedge da opção em relação ao DI1 curto:

$$R\$1,95 = n * R\$1,98 \quad (121)$$

O que devolve $n \cong 0,985$, que é o que indica a coluna DELTA CONTRATOS N15 para 07/04/2015 na tabela 4. Ou seja, o atuante, ao comprar 0,985 contratos de DI1 para julho/2015 está protegido de variações de preço que este DI gera na opção. O mesmo procedimento é realizado para o DI1 longo, e repetido dia a dia. Como o Delta varia dia a dia, devido ao efeito Gamma e à passagem do tempo, a posição em contratos de DI1 longos e curtos são atualizadas e refeitas todos os dias.

c) **COLUNA GAMMA CONTRATOS:** Esta coluna visa calcular o Gamma, em contratos, para cada um dos dois DI1 futuros. Ou seja, ela indica qual a variação dos valores da coluna DELTA CONTRATOS para uma variação de 0,01% em cada DI1 futuro.

Para se chegar neste número para o DI1 curto, por exemplo, se recalcula qual seria o valor de DELTA CONTRATOS caso o DI para julho/2015 estivesse 0,01% maior. Em seguida, verifica-se a diferença deste valor para o da coluna DELTA CONTRATOS atual.

No caso da tabela 4, em 07/04/2015, por exemplo, a coluna GAMMA CONTRATOS N15 indica que para cada 0,01% que a taxa de DI1 curto variar, o Delta Hedge deve ser recalibrado, vendendo-se 0,0002 contratos de DI1 futuro vencendo em julho.

O Gamma é responsável por diminuir a eficiência do Delta Hedge, e um dos objetivos deste trabalho é verificar qual método apresenta maior eficiência de proteção ao risco. Assume-se a hipótese inicial de que métodos com um Gamma em contratos muito alto devem apresentar menor eficiência final do mecanismo de proteção.

d) **COLUNA VEGA:** O Vega, como descrito pela seção 5.5.3, mede a sensibilidade do preço da opção em relação a uma variação na volatilidade. Para se obter seu valor financeiro, calculou-se qual seria o novo preço da opção pela fórmula de B&S apresentada na seção 8.3.1 com um choque de 0,01% na volatilidade e subtraiu-se do atual:

$$Vega\ Financeiro = BS(Vol_{atual} + choque) - BS(Vol_{atual}) \quad (122)$$

Um Vega muito alto representa que a volatilidade tem grande influência no preço da opção. Assim, a realização do Delta Hedge pode não ser suficiente para se obter neutralidade ao risco, surgindo a necessidade de realização do Vega Hedge. Este tipo de proteção, entretanto, é caso de estudos específicos e não se enquadra no escopo deste trabalho, mas é um dado importante de se ter em mãos para a realização das análises finais.

- e) **COLUNA THETA:** O Theta mede a mudança do preço da opção com a passagem do tempo. Seu valor financeiro é calculado de modo semelhante ao Vega, porém dando um choque negativo de um dia útil no prazo da opção. Ou seja, se tudo mais se mantiver constante, qual o novo preço da opção amanhã? Este impacto é calculado pela seguinte fórmula, onde choque = -1 dia útil:

$$Theta\ Financeiro = BS(Prazo_{atual} - 1) - BS(Prazo_{atual}) \quad (123)$$

Lembrando que o Prazo da opção é igual a T_2 para opções sobre juros a termo.

- f) **COLUNA CARREGO:** O carregamento pode ser definido como o custo de oportunidade do dinheiro investido no pagamento do prêmio da opção em T_0 . Segundo a tabela 4, esta opção valia R\$1489,30 em T_0 , que foi o prêmio que o comprador pagou. O atuante, então, passa a segurar a opção, na expectativa de que possa exercer ela em T_2 . Porém este dinheiro pago no prêmio poderia ter sido investido para render CDI. Assim, o custo de oportunidade de segurar a opção até T_2 é refletido no quanto o atuante está deixando de ganhar caso tivesse investido o prêmio a uma remuneração de CDI.

Para cada dia, ele é calculado como o pagamento inicial, R\$1489,30, multiplicado pelo CDI acumulado, de T_0 até a data presente. Por exemplo, o fator multiplicativo do CDI acumulado entre a data inicial, 07/04/2015, e 16/04/2015, segundo site da CETIP⁴¹ vale 1,00330187. Assim, o carregamento nesta data vale:

$$Carrego_{16.04.2015} = (1,00330187 - 1) * R\$1489,30 = R\$4,92 \quad (124)$$

⁴¹ Pode ser obtido através do link http://estatisticas.cetip.com.br/astec/series_v05/paginas/web_v05_template_informacoes_di.asp?str_Modulo=completo&int_Idioma=1&int_Titulo=6&int_NivelBD=2, acesso em 22/10/2016. Para o cálculo na planilha, utilizou-se dados retirados da plataforma Bloomberg.

Exatamente o que indica a tabela 4.

- g) **COLUNA RESULT MTM:** Esta coluna representa simplesmente a variação no valor da opção. Se no dia anterior ela valia R\$1800 e hoje vale R\$1780, a coluna MTM indicará - R\$20,00. É importante para se calcular o resultado total da posição, pois, por mais que uma valorização na opção não consista de entrada de caixa para o atuante (que só pode exercê-la em T_2), se a opção subiu de valor, sua posição como um todo deve ter subido também, já que pode eventualmente vendê-la no mercado. Não é necessário que se considere o custo do dinheiro no tempo ao subtrair valores de duas datas, pois este custo já está incorporado na coluna CARREGO.
- h) **COLUNA RESULT HEDGE:** Esta coluna calcula o resultado da posição assumida em hedge através de contratos de DI curto e longo. Para o cálculo deste resultado, considerou-se o seguinte:
- a posição Delta Hedge é reajustada todos os dias, no final do dia, pelo preço de ajuste da BM&F para aquele dia;
 - esta posição é carregada até o final do dia seguinte, quando, novamente, a posição é reajustada de acordo com a variação no Delta da opção;
 - o resultado do Delta Hedge no dia é, então, calculado como uma posição que foi assumida no dia anterior pelo preço de ajuste, e finalizada no dia atual pelo novo preço de ajuste. O método para se obter este resultado, de atuante carregando posição de um dia para o outro, é fornecido na seção 4.3.2.

Percebe-se, na tabela 4, que o resultado de hedge sempre acompanha o resultado MTM, com exceção de dias onde a volatilidade variou demais

- i) **COLUNA CARREGO HEDGE:** Lembrando que os ajustes e os fluxos de caixa dos resultados são realizados diariamente pela BM&F, um resultado negativo hoje gera um carregamento para o futuro, seguindo a mesma lógica do cálculo de carregamento para o pagamento de prêmio da opção. Assim, a coluna CARREGO HEDGE visa obter qual o resultado total das posições em hedge, desde o início da simulação, mas considerando-se o carregamento gerado.

Para facilitar a didática, suponha que os juros diários de CDI possuem taxa de 0,1% diários. Suponha, ainda, que na data de hoje o resultado nas posições de hedge tenham sido R\$20,00. No dia seguinte, novo resultado de hedge é obtido no valor de R\$15,00. O resultado de Hedge total não será apenas a soma deste dois valores, pois os R\$20,00 obtidos ontem puderam ser investidos à taxa de 0,1% ao dia. Assim, o resultado total de Hedge nesta data é:

$$\text{Res Carrego Hedge} = R\$20,00 * 1,001 + R\$15,00 = R\$35,02 \quad (125)$$

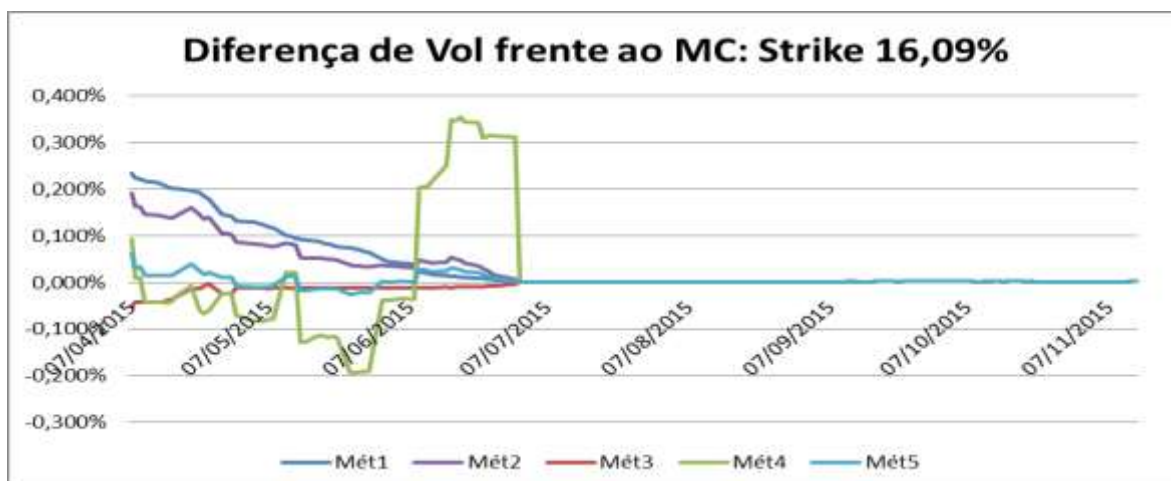
No terceiro dia, o resultado de Hedge foi –R\$17,00. O resultado carregado do hedge neste dia será de:

$$\text{Res Carrego Hedge} = R\$35,02 * 1,001 - R\$17,00 = R\$18,06 \quad (126)$$

E assim por diante. O motivo deste cálculo fica claro na próxima seção, que explica o cálculo do resultado total.

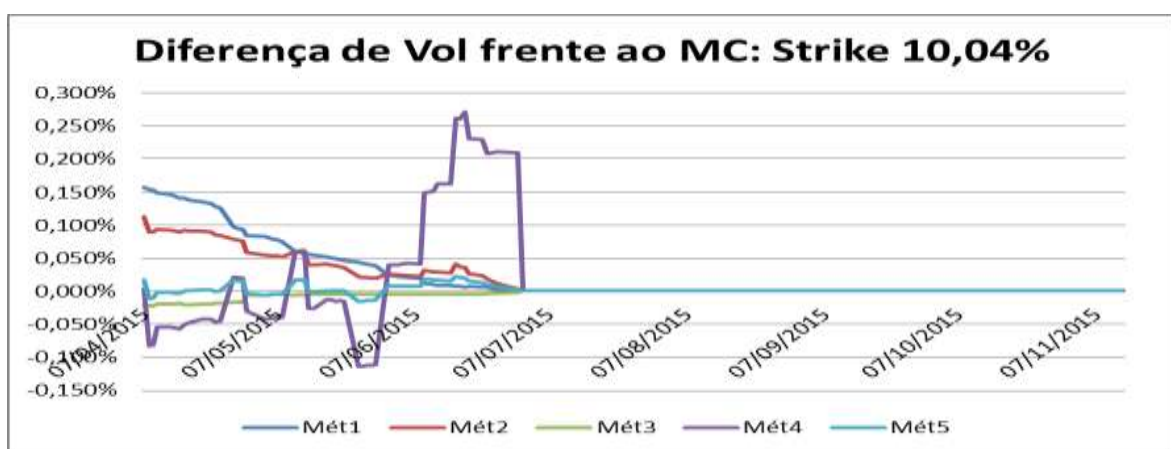
APÊNDICE K – DIFERENÇAS ENTRE VOLS FRENTE AO MONTE CARLO: STRIKES EXTREMOS DO PERÍODO 1

Figura 36 - Diferença de Vol frente ao MC: Strike 16,09%



Fonte: Elaboração do autor

Figura 37 - Diferença de Vol frente ao MC: Strike 10,04%



Fonte: Elaboração do autor

APÊNDICE L – DIFERENÇAS ENTRE VOLS FRENTE AO MONTE CARLO: STRIKES EXTREMOS DO PERÍODO 2

Figura 38 - Diferença de Vol frente ao MC: Strike 22,44%

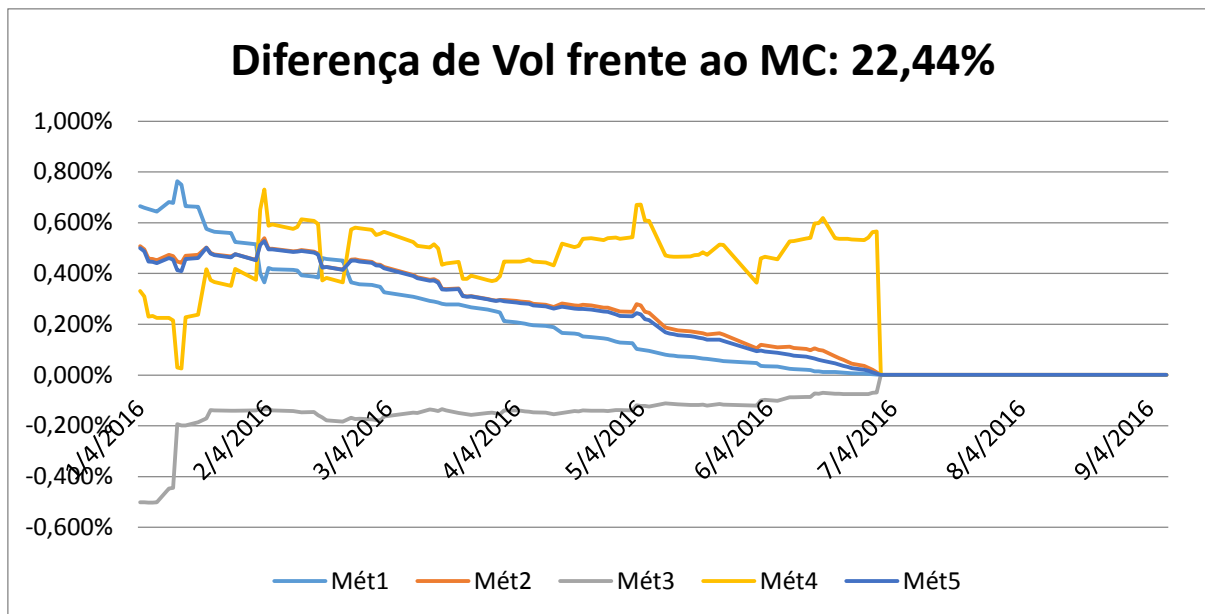
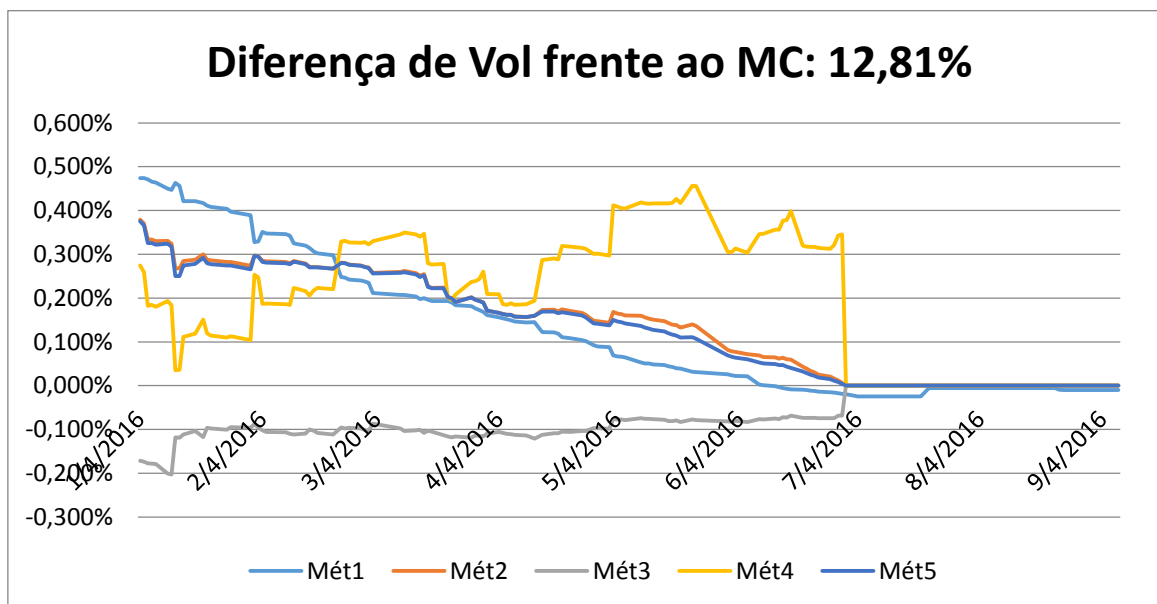


Figura 39 - Diferença de Vol frente ao MC: Strike 12,81%



**APÊNDICE M – DIFERENÇAS ENTRE VOLS FRENTE AO MONTE CARLO:
STRIKES EXTREMOS DO PERÍODO 3**

Figura 40 - Diferença de Vol frente ao MC: Strike 19,13%

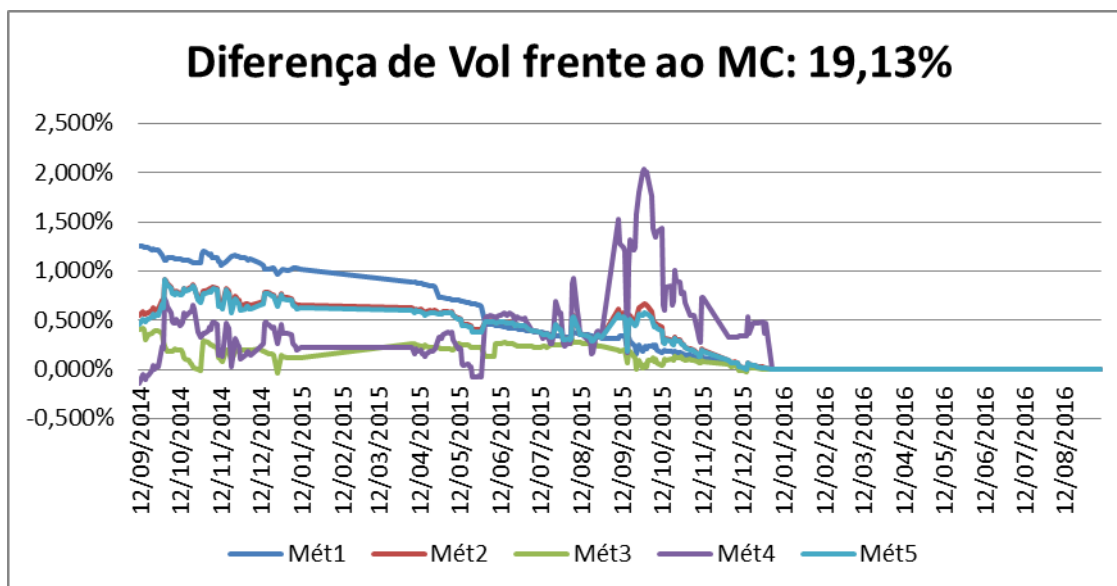
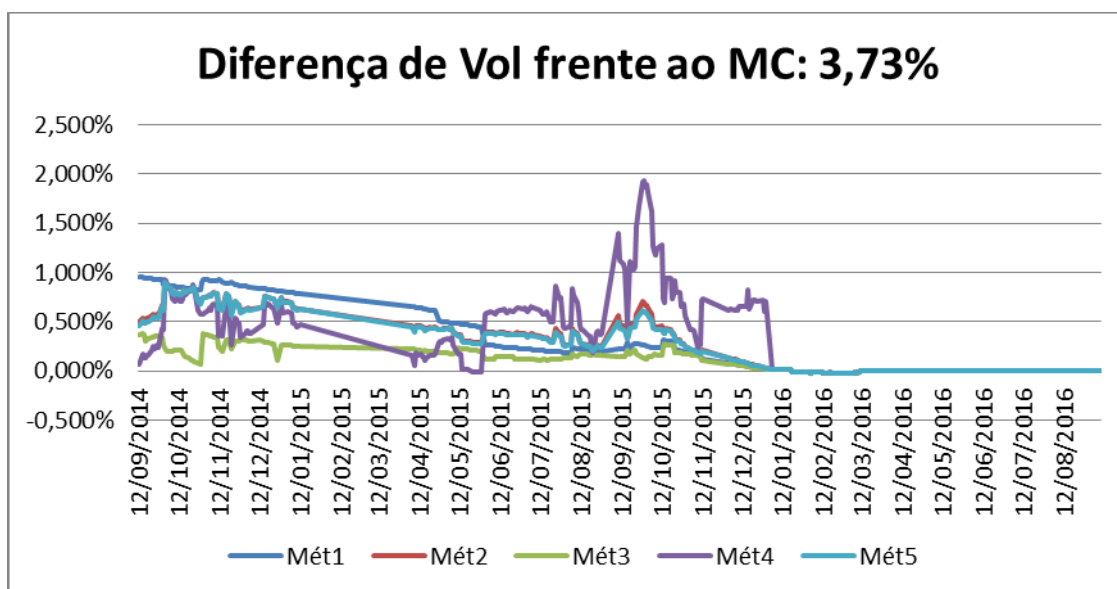
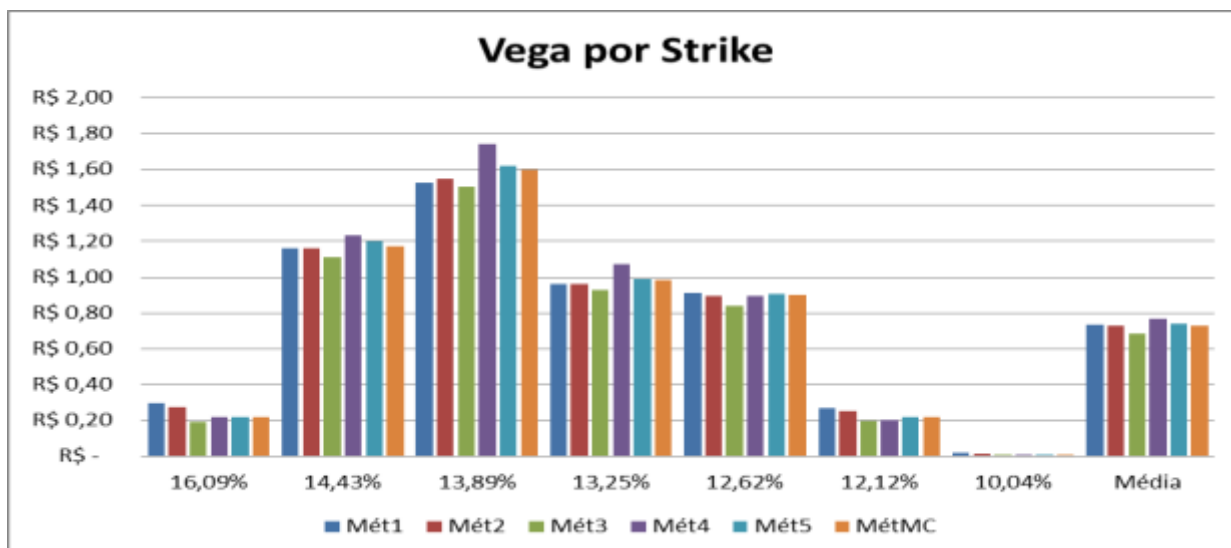


Figura 41 - Diferença de Vol frente ao MC: Strike 3,73%



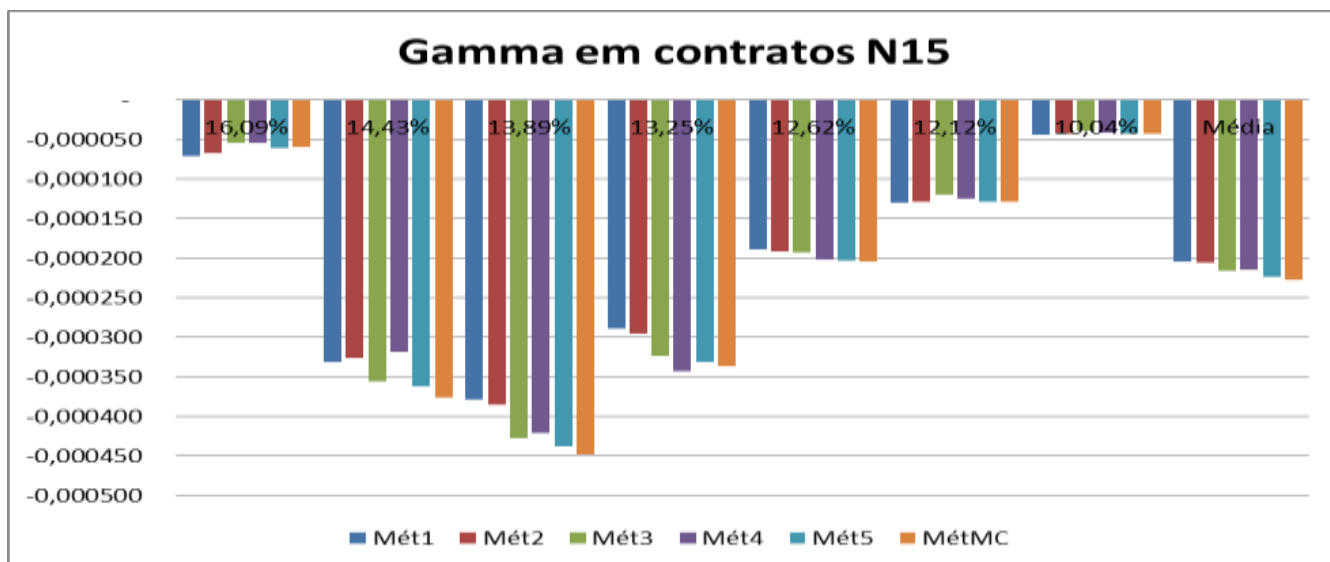
APÊNDICE N – VEGAS E GAMMAS POR STRIKE E MÉTODO PARA PERÍODO 1

Figura 42 - Vega médio por Strike para o primeiro período



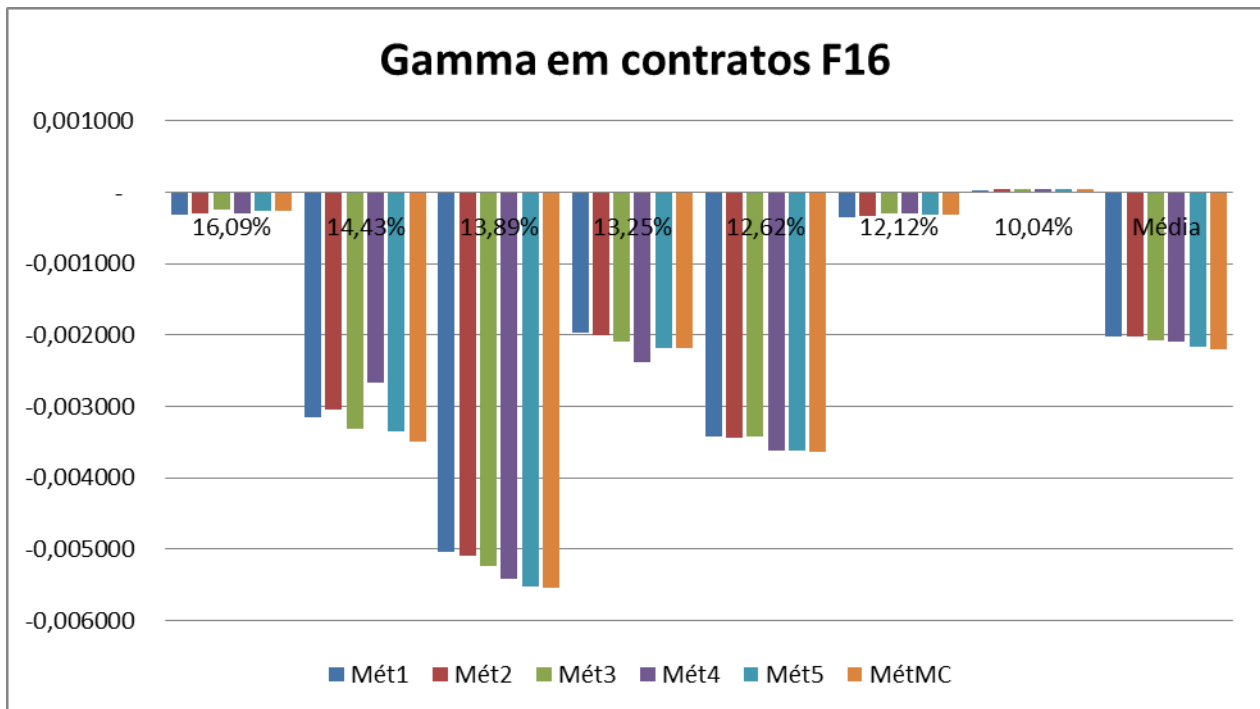
Fonte: Elaboração do autor

Figura 43 - Gamma médio em contratos de N15



Fonte: Elaboração do autor

Figura 44 – Gamma médio em contratos de F16



Fonte: Elaboração do autor

APÊNDICE O – VEGAS E GAMMAS POR STRIKE E MÉTODO PARA PERÍODO 2

Figura 45 – Vega médio por Strike para o segundo período

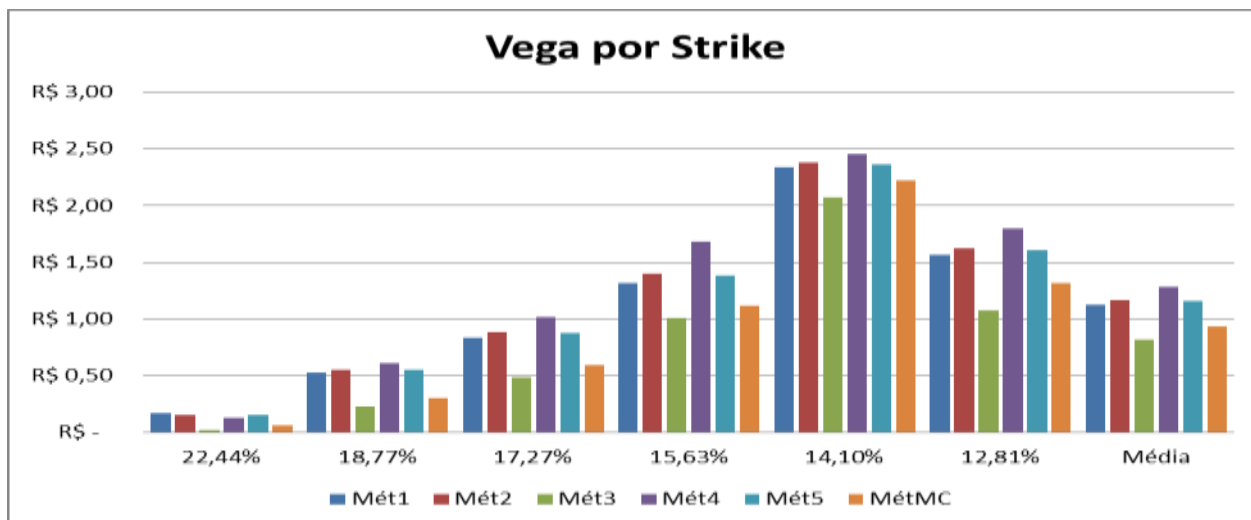


Figura 46 – Gamma médio em contratos de N16

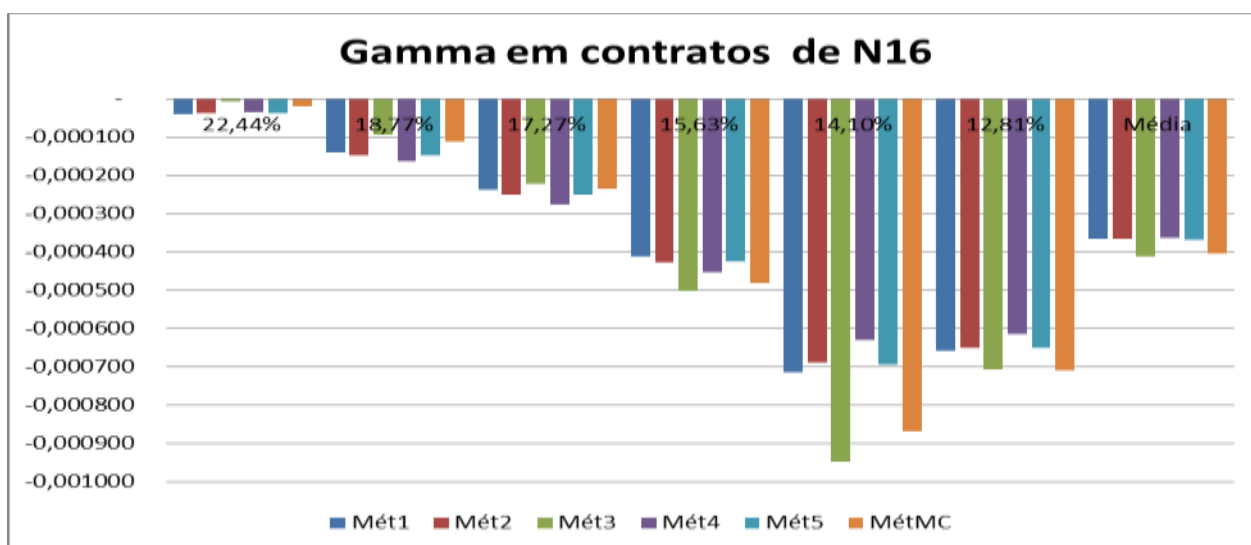
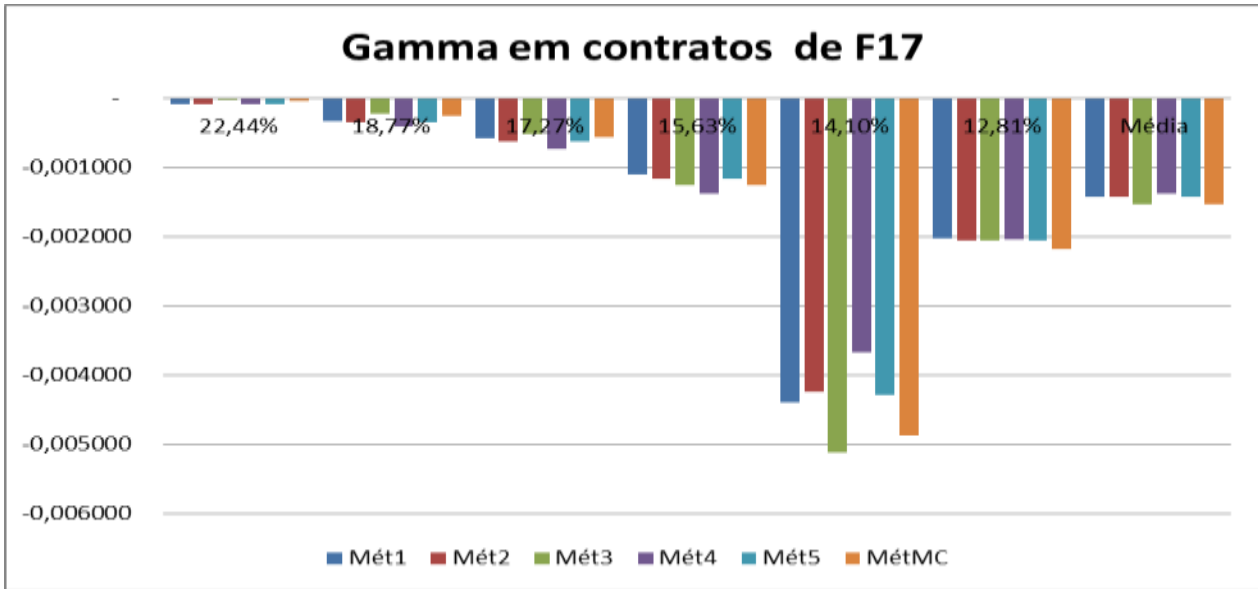


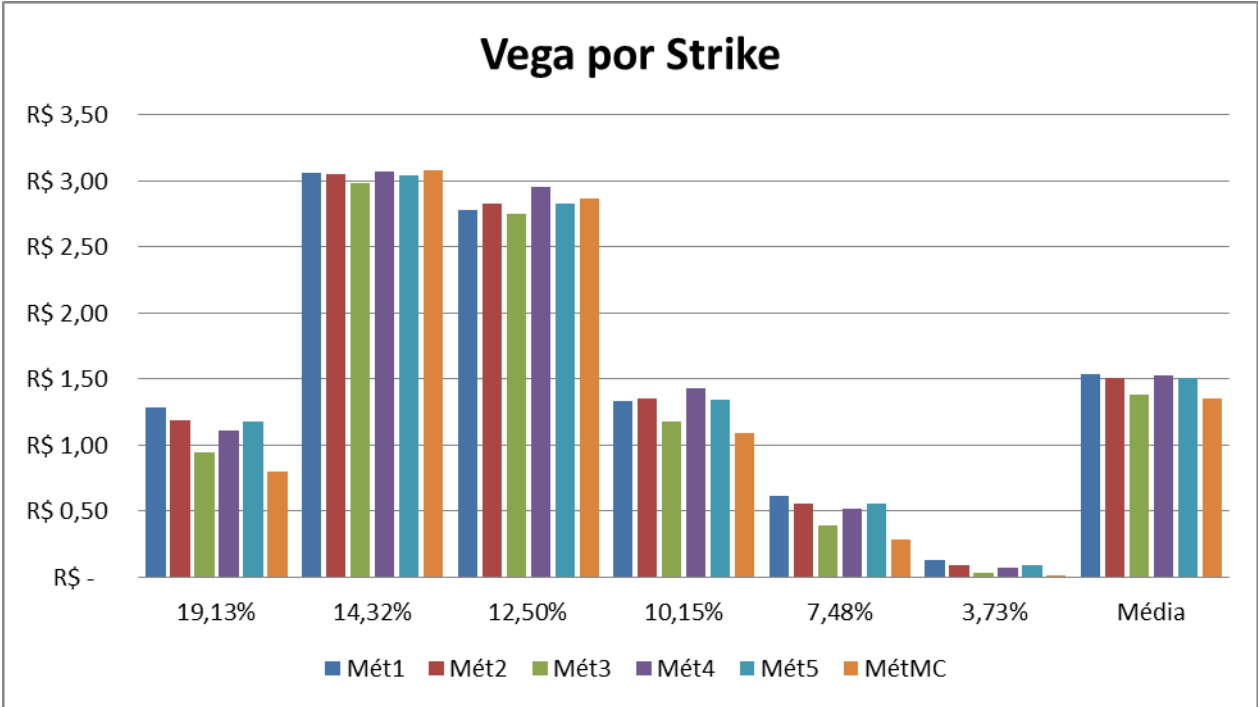
Figura 47 – Gamma médio em contratos de F17



Fonte: Elaboração do autor

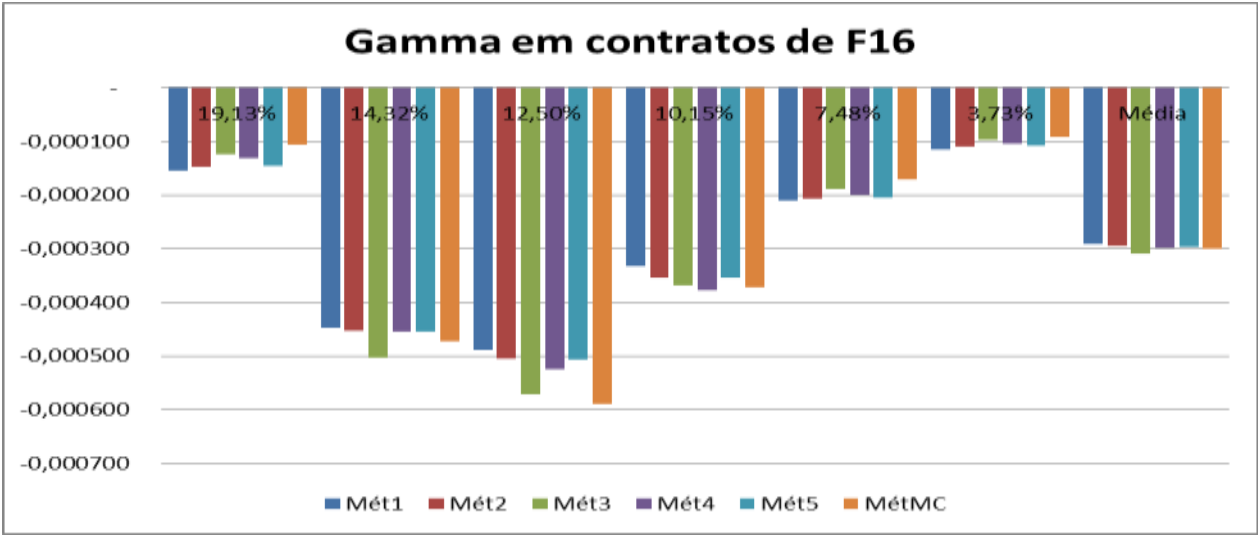
APÊNDICE P – VEGAS E GAMMAS POR STRIKE E MÉTODO PARA PERÍODO 3

Figura 48 – Vega médio por Strike para o terceiro período



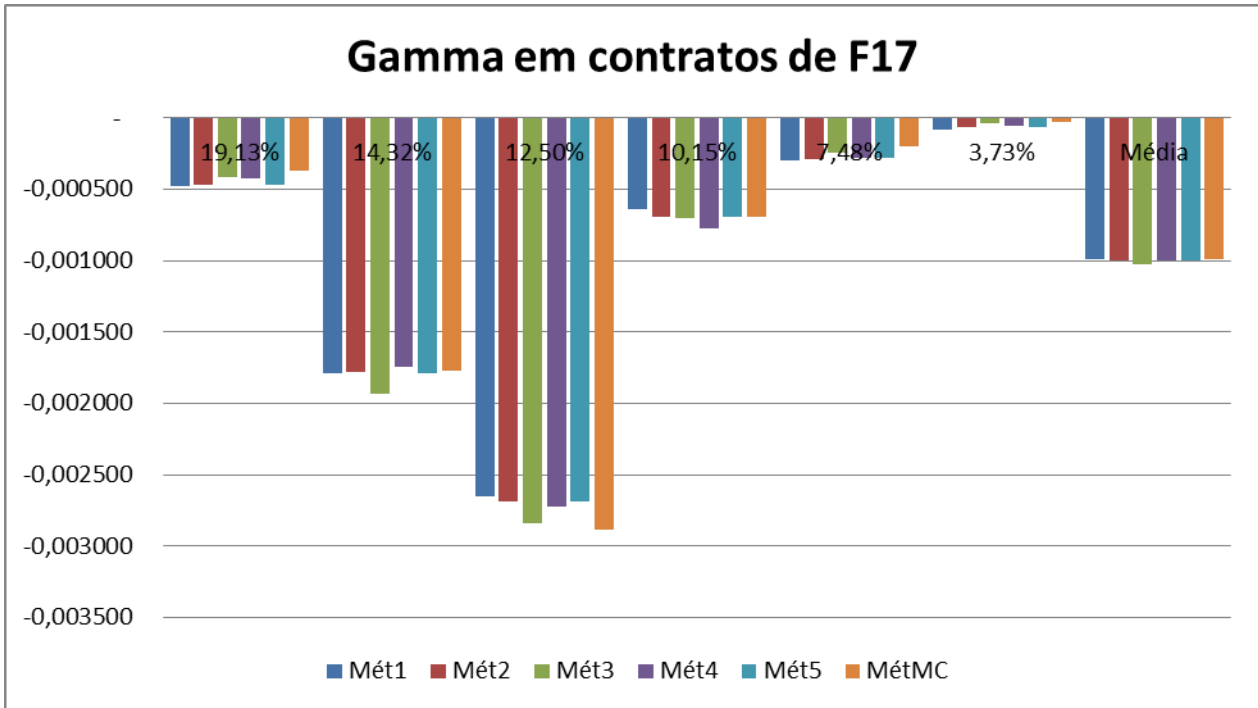
Fonte: Elaboração do autor

Figura 49 – Gamma médio em contratos de F16



Fonte: Elaboração do autor

Figura 50 – Gamma médio em contratos de F17



Fonte: Elaboração do autor

ANEXO A - INTERPRETAÇÃO DA FÓRMULA DE BLACK E SCHOLES

Uma explicação intuitiva dos termos do modelo de Black e Scholes é encontrada em uma análise realizada por Nielsen⁴². Suponha que uma opção de compra sobre ação tem seu preço descrito pelas equações 51 e 52, aqui repetidas:

$$c = S_0 N(d1) - Ke^{-rT} N(d2) \quad (51)^*$$

$$p = Ke^{-rT} N(-d2) - S_0 N(-d1) \quad (52)^*$$

Onde:

c = preço da opção de compra;

p = preço da opção de venda;

S_0 = preço atual da ação;

K = preço de *Strike* da opção;

r = taxa de juros livre de risco com capitalização contínua;

T = período de vida da opção, na mesma base de r ;

σ = volatilidade implícita para precificação;

N = função densidade acumulada normal;

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}};$$

$$d2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Caso, no tempo T , o preço da ação S_t esteja acima do Strike K , a opção é exercida e dois eventos **teóricos** com fluxos de caixa separados ocorrem para o atuante que a possui:

- a) é pago o preço de Strike K ;
- b) é recebida a ação com preço S_t .

Assim, os dois eventos podem ser definidos separadamente como P (pagamento) e R (recebimento), e possuem valor de:

$$P = \begin{cases} -K & \text{se } S_t \geq K \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (127)$$

⁴² NIELSEN, L. T. **Understanding N(d1) and N(d2):** Risk-Adjusted Probabilities in the Black-Scholes Model. Fontainebleau: INSEAD, 1992, 16p.

$$R = \begin{cases} S_t & \text{se } S_t \geq K \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (128)$$

Seja $E[\]$ a esperança de valor para os eventos e $\text{Prob}(\)$ a probabilidade de um evento ocorrer, temos, para o pagamento realizado:

$$E[P] = -K * \text{Prob}(S_t > K) \quad (129)$$

O termo d_2 da fórmula de Black e Scholes representa a quantidade de desvios padrões em que $\ln S_0$ se distancia de $\ln K$, ou seja, quantos desvios padrões que o logaritmo natural do preço deveria se mexer para entrar em preço de exercício ou sair do mesmo, já considerando a taxa de tendência $\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T$. Assim:

$$E[P] = -K * \text{Prob}(S_t > K) = -K * N(d_2) \quad (130)$$

É a expectativa de pagamento realizado pelo detentor da opção no tempo T . Por outro lado, a esperança do valor da ação recebida será a esperança de seu valor, dado que ocorreu o exercício, vezes a probabilidade de se ocorrer o exercício:

$$E[R] = E[S_T | S_T > K] * \text{Prob}(S_t > K) \quad (131)$$

O que acaba sendo equivalente a:

$$E[R] = E[S_T | S_T > K] * \text{Prob}(S_t > K) = e^{rT} S_0 N(d_1) \quad (132)$$

Assim, o preço da opção hoje se constitui da esperança de recebimento menos a esperança de pagamento no futuro, trazidos a valor presente pela taxa de juros livre de risco, capitalizada continuamente, como nas premissas de Black e Scholes:

$$\text{Preço}_{call} = e^{-rT} \{ E[R] - E[P] \} \quad (133)$$

O que equivale, segundo as equações 130 e 132 a:

$$\text{Preço}_{call} = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \quad (134)$$

Que é a fórmula de Black e Scholes.

ANEXO B – VARIÂNCIA DE X/Y

A seguinte demonstração para se encontrar a variância da razão X/Y foi encontrada na página da internet do professor Howard Seltman, do Department of Statistics da Carnegie Mellon University, disponível em <<http://www.stat.cmu.edu/~hseltman/files/ratio.pdf>>, acessado em 03/10/2016. É apresentada neste anexo com tradução nossa.

Considere variáveis aleatórias R e S, onde S não tem massa em 0 (discreto) ou tem um suporte $[0, \infty)$. Seja $G = g(R,S) = R/S$. Para qualquer $f(x,y)$, a expansão bivariada de primeira ordem de Taylor ao redor de θ é:

$$f(x, y) = f(\theta) + f'_x(\theta)(x - \theta_x) + f'_y(\theta)(y - \theta_y) + \text{resto}$$

Seja $\theta = (E(X), E(Y))$. A aproximação mais simples para $f(X, Y)$ é então:

$$f(X, Y) = f(\theta) + f'_x(\theta)(X - E(X)) + f'_y(\theta)(Y - E(Y)) + O(n^{-1})$$

A aproximação para $E[f(X, Y)]$ é, portanto:

$$\begin{aligned} E(f(X, Y)) &= E[f(\theta) + f'_x(\theta)(X - E(X)) + f'_y(\theta)(Y - E(Y)) + O(n^{-1})] \\ &\cong E[f(\theta)] + E[f'_x(\theta)(X - E(X))] + E[f'_y(\theta)(Y - E(Y))] \\ &= E[f(\theta)] + f'_x(\theta)E[(X - E(X))] + f'_y(\theta)E[(Y - E(Y))] \\ &= E[f(\theta)] + 0 + 0 \\ &\cong fE((X), E(Y)) \\ &= E(X)/E(Y) \end{aligned}$$

A expansão de Taylor de segunda ordem é:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(\theta) + f'_x(\theta)(x - \theta_x) + f'_y(\theta)(y - \theta_y) \\ &\quad + \frac{1}{2} \{ f''_{xx}(\theta)(x - \theta_x)^2 + 2f''_{xy}(\theta)(x - \theta_x)(y - \theta_y) + f''_{yy}(\theta)(y - \theta_y)^2 \} \\ &\quad + \text{resto} \end{aligned}$$

Então uma melhor aproximação para $E[f(X, Y)]$ expandido em torno de $\theta = (E(X), E(Y))$ é:

$$E(f(X, Y)) = f(\theta) + \frac{1}{2} \{ f''_{xx}(\theta) \text{Var}(X) + 2f''_{xy}(\theta) \text{Cov}(X, Y) + f''_{yy}(\theta) \text{Var}(Y) \} + O(n^{-1})$$

Para $f = R/S$, $f''_{RR} = 0$, $f''_{RS} = -S^{-2}$, $f''_{SS} = \frac{2R}{S^3}$, então $E(R/S)$ é aproximadamente:

$$E(R/S) \equiv E(f(R, S)) \cong \frac{E(R)}{E(S)} - \frac{\text{Cov}(E, S)}{E^2(S)} + \frac{\text{Var}(S)E(R)}{E^3(S)}$$

Pela definição de variância, a variância de $f(X, Y)$ é:

$$\text{Var}(f(X, Y)) = E \{ [f(X, Y) - E(f(X, Y))]^2 \}$$

Usando $E(f(X, Y)) \approx f(\theta)$ (da demonstração acima):

$$\text{Var}(f(X, Y)) \cong E \{ [f(X, Y) - f(\theta)]^2 \}$$

Então, usando a expansão de Taylor de primeira ordem para $f(X, Y)$ em torno de θ :

$$\begin{aligned} \text{Var}(f(X, Y)) &\cong E \{ [f(\theta) + f'_x(\theta)(X - \theta_x) + f'_y(\theta)(Y - \theta_y) - f(\theta)]^2 \} \\ &= E \{ f'^2_x(\theta)(X - \theta_x)^2 + f'^2_y(\theta)(Y - \theta_y)^2 + 2f'_x(\theta)(X - \theta_x)f'_y(\theta)(Y - \theta_y) \} \\ &= f'^2_x(\theta)\text{Var}(X) + f'^2_y(\theta)\text{Var}(Y) + 2f'_x(\theta)f'_y(\theta)\text{Cov}(X, Y) \end{aligned}$$

Agora, retornando para o exemplo: $f(R, S) = R/S$. Desde que $f'_R = S^{-1}$, $f'_S = \frac{-R}{S^2}$, e $\theta =$

$(E(R), E(S))$, $f'_R(\theta)f'_S(\theta) = \frac{-E(R)}{E^3(S)}$, e $f'^2_R(\theta) = \frac{1}{E^2(S)}$, $f'^2_S(\theta) = \frac{E^2(R)}{E^4(S)}$, e então:

$$\begin{aligned} \text{Var}(R/S) &\cong \frac{1}{E^2(S)} \text{Var}(R) + 2 \frac{-E(R)}{E^3(S)} \text{Cov}(R, S) + \frac{E^2(R)}{E^4(S)} \text{Var}(S) \\ &= \frac{E^2(R)}{E^2(S)} \left[\frac{\text{Var}(R)}{E^2(R)} - 2 \frac{\text{Cov}(R, S)}{E(R)E(S)} + \frac{\text{Var}(S)}{E^2(S)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu_R^2}{\mu_S^2} \left[\frac{\sigma_R^2}{\mu_R^2} - 2 \frac{Cov(R,S)}{\mu_R \mu_S} + \frac{\sigma_S^2}{\mu_S^2} \right] \\ &= \frac{\mu_X^2}{\mu_Y^2} \left[\frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2} + \frac{\sigma_Y^2}{\mu_Y^2} - 2 \frac{\rho \sigma_X \sigma_Y}{\mu_X \mu_Y} \right] \end{aligned}$$

Esta última fórmula devolve exatamente a equação 90 utilizada pelo método 3 para o encontro da volatilidade do juro a termo.