

LUCAS FURLAN COLETTI

COMPARAÇÃO DE QUEBRA EM FATORES DE RISCO PARA
FUTUROS DE U.S. TREASURY DE 10 ANOS PARA CÁLCULO DE
RISCO DE MERCADO UTILIZANDO A METODOLOGIA VALUE AT
RISK (VaR)

São Paulo
2013

LUCAS FURLAN COLETTI

COMPARAÇÃO DE QUEBRA EM FATORES DE RISCO PARA
FUTUROS DE U.S. TREASURY DE 10 ANOS PARA CÁLCULO DE
RISCO DE MERCADO UTILIZANDO A METODOLOGIA VALUE AT
RISK (VaR)

Monografia apresentada ao PECE da
Escola Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do título de
MBA em Engenharia Financeira

São Paulo
2013

LUCAS FURLAN COLETTI

COMPARAÇÃO DE QUEBRA EM FATORES DE RISCO PARA
FUTUROS DE U.S. TREASURY DE 10 ANOS PARA CÁLCULO DE
RISCO DE MERCADO UTILIZANDO A METODOLOGIA VALUE AT
RISK (VaR)

Monografia apresentada ao PECE da
Escola Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do título de
MBA em Engenharia Financeira

Área de Concentração:
Engenharia Financeira

Orientador:
Rodrigo de Barros Nabholz

São Paulo
2013

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha esposa, Thati.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador, Rodrigo de Barros Nabholz, pela compreensão, incentivo e orientação durante o desenvolvimento desse trabalho.

RESUMO

O objetivo desse trabalho é comparar duas metodologias de quebra em fatores de risco para futuros de *U.S. Treasury* de 10 anos para cálculo de risco de mercado utilizando a metodologia *Value at Risk* (VaR). Serão descritos os conceitos envolvidos no apuração e na quebra e será feito cálculo de *backtest* para cada metodologia, apresentando os pontos positivos e negativos de cada uma.

Palavras-chave: *Value at Risk*, futuro de *U.S. Treasury*, *U.S. Treasury*

ABSTRACT

The objective of this work is to compare two methodologies for defining the risk factors of the U.S. Treasury 10 year notes futures for the calculation of market risk using the methodology Value at Risk (VaR). We are going to describe the main concepts involved in pricing the future and definition of risk factors and we are going to calculate a backtest for each methodology describing the pros and cons for each one.

Keywords: Value at Risk, U.S. Treasury futures, U.S. Treasury

SUMÁRIO

1. Introdução	1
2. <i>U.S. Treasuries</i>	3
2.1 Apreçamento de <i>U.S. Treasury</i>	4
3. Apresentado futuros de <i>U.S. Treasury</i>	7
3.1 Detalhando o contrato	7
3.2 Utilizando futuro de <i>U.S. Treasury</i> para gerenciamento de risco	9
3.2.1 Definindo a razão utilizando o valor de face	9
3.2.2 Definindo a razão utilizando fator de conversão	10
4. Apreçamento dos futuros de <i>U.S. Treasury</i>	11
5. Revisão de modelo <i>Value at Risk</i>	14
5.1 Conceito de Value at Risk	14
5.2 Modelo de Simulação Histórica	15
5.3 Identificação de Fatores de Risco	16
5.4 Mapeamento de Fatores de Risco em vértices	17
6. Quebra do futuro de <i>U.S. Treasury</i> em Fatores de Risco	19
6.1 Quebrando da forma mais completa	19
6.2 Quebrando da forma mais simplificada	20
7. Criando os Retornos dos Fatores de Risco	21
7.1 Curva livre de risco	21
7.2 Curva de preço do futuro	22
8. Análises e resultados	24
8.1 Volume de dados	24
8.2 Comparando as metodologias	24
9. Conclusão	26
10. Referências	27

1. Introdução

Os futuros de *U.S. Treasury* contam com participantes do mercado em todo o mundo e oferecem a eles uma forma de se ajustar à exposição de risco de taxa de juros. Dessa forma, esses produtos são ferramentas importantes para a administração do risco de taxa de juros ou para aproveitar a volatilidade dos preços.

Esse derivativo está entre os produtos mais líquidos do mundo, e pode ser utilizado em uma variedade de aplicações e mecanismos de gerenciamento de risco, inclusive sendo usado para operações de hedging, otimização de renda, ajustes na duração das consolidações fiscais, especulações em taxas de juros e operações de spread.

Na Figura 1 abaixo podemos ver o volume de contratos negociados desses futuros.

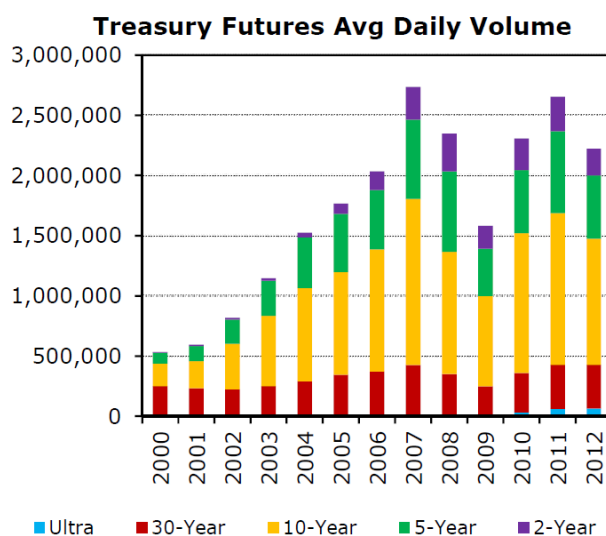


Figura 1: Fonte CME. Documento Understanding Treasury Futures

A CME divulgou que, em 28/05/2013, o volume diário total de negociações de contratos de futuros de *U.S. Treasury* foi de 10.476.906, quebrando o recorde anterior de 10.103.808, estabelecido anteriormente em 26/02/2013.

Para termos uma ideia de quanto isso representa em dólares, podemos multiplicar essa quantidade pelo valor de face¹ dos futuros, o que resulta em \$1.047.690.600.000.

¹ Consideramos \$100.000 como valor de face nesse, pois esse é o valor para os futuros Ultra, de 30 anos, de 10 anos e de 5 anos. Os futuros de 2 anos e 3 anos tem como valor de face \$200.000 e representam um quantidade muito pequena quando comparados com os outros.

Com um volume tão grande de negociações e com tantas possíveis aplicações é fundamental entender os riscos envolvidos nessa negociação.

Vamos estudar o risco desse produto do ponto de vista de risco de mercado e, para isso, será necessária a identificação dos fatores de risco básicos do futuro de *U.S. Treasury*.

O objetivo desse trabalho é comparar duas formas de definir os fatores de risco: uma mais completa que implica em uma certa dificuldade de generalização para ser automatizada; e um modelo mais simples que pode ser automatizado com mais facilidade.

O trabalho iniciará com um breve resumo sobre os títulos do tesouro americano, que são os ativos base desses contratos futuros.

Em seguida, será feita uma apresentação do derivativo, a qual conterà uma explicação sobre suas características: informações sobre o contrato, conceitos de Fator de Conversão e de *cheapest-to-deliver*.

Depois, será construído o raciocínio para entender as quebras que serão sugeridas: conceitos de apreçamento, de *Value at Risk* e de quebras em fatores de risco.

O próximo passo será calcular os retornos dos fatores de risco e fazer um *backtest* usando as quebras sugeridas.

Por fim, será feita uma comparação e apresentada uma conclusão com os pontos positivos e negativos de cada um.

2. U.S. Treasuries

Como definido por Fabozzi (2000), as *U.S. Treasuries* são títulos emitidos pelo Departamento do Tesouro dos Estados Unidos e são apoiadas pela total confiança e crédito do governo norte americano. Esses títulos são considerados sem risco de crédito e são utilizados como *benchmark* de taxa de juros no mercado internacional.

De acordo como o Departamento do Tesouro dos Estados Unidos, em Agosto de 2013, o governo brasileiro tinha aproximadamente 253 bilhões de dólares investidos nesses títulos², o que o tornava o 4º maior no ranking de investidores de *U.S. Treasuries*.

Vamos detalhar um pouco mais as características desses papéis.

As *U.S. Treasuries* podem ser agrupadas em dois tipos:

- *Treasury Bills*: são títulos que não tem pagamento de *coupon* e o vencimento desde sua emissão é menor ou igual a um ano.
- *Treasury Notes* e *Bonds*: são títulos com pagamentos de *coupon* e vencimento desde sua emissão maior ou igual a dois anos. Papéis com vencimento até 10 anos são chamados de *Notes* e maiores de 10 anos são chamados de *Bonds*.

É importante notar uma diferença em relação aos títulos públicos brasileiros, as *U.S. Treasuries* são classificadas de acordo com seu prazo original, o que não ocorre para os papéis brasileiros. Dessa forma, existem, por exemplo, séries de 2 anos, de 3 anos, de 5 anos e de 10 anos, entre outras, sendo o papel de emissão mais recente de cada uma dessas séries chamado de *on-the-run*.

Outra diferença é como as *U.S. Treasuries* são cotadas. De acordo com Hull (2009), a cotação que os *traders* utilizam é chamada de *clean price*, e ela não representa o valor em dinheiro que será pago pelo papel, o qual é chamado de *dirty price*. A relação entre os dois é a seguinte:

$$\text{Dirty Price} = \text{Clean Price} + \text{Juros Acumulados} \quad (2.1)$$

² United States Department of the Treasury and Federal Reserve Board "Major foreign holders of Treasury securities": <http://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/tic/Documents/mfh.txt>

onde:

Juros Acumulados = Juros acumulados desde o último pagamento de *coupon*.

Estamos acostumados apenas com o *dirty price*, que é realmente o quanto será pago pelo título, pois é dessa forma que são divulgadas as cotações dos títulos públicos e debêntures aqui no Brasil.

E qual seria o motivo dos *traders* utilizarem o *clean price* se esse não é efetivamente o financeiro da operação? O *clean price* é mais estável ao longo do tempo em relação ao *dirty price*. Quando ele muda é por alguma razão econômica, como, por exemplo, mudanças nas taxas de juros do mercado ou na qualidade de crédito do emissor do título, ou seja, ele não é influenciado pelas subidas (acúmulos) e quedas (quando ocorrem pagamentos) dos juros acumulados, como ocorre com o *dirty price*.

Além disso, o *clean price* é uma porcentagem em relação ao Principal do título. Quando o *clean price* é 100% significa que o título está sendo cotado ao par. Dessa forma, é imediata a identificação se o papel está sendo negociado abaixo ou acima do par.

2.1 Apreçamento de *U.S. Treasury*

De forma a entender melhor o derivativo é fundamental entender como o ativo é apreçado. Portanto, nessa subseção vamos conhecer o apreçamento de uma *U.S. Treasury*.

De acordo com Fabozzi (2000), temos a seguinte fórmula para apreçamento de títulos, a qual pode ser aplicada também para *U.S. Treasuries*:

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{C}{(1+r)^{t_i}} + \frac{M}{(1+r)^{t_n}} \quad (2.2)$$

onde:

P = preço (em dólares);

n = número de períodos restantes;

C = pagamento semestral de *coupon* (em dólares);

$r = \text{yield}$ semestral de mercado (yield anual dividida por 2)³;

$M = \text{Principal}$;

$t_i = \text{prazo}$ (considerando uma base semestral) para o vencimento do fluxo i ;

$t_n = \text{prazo}$ (considerando uma base semestral) para o vencimento do último fluxo.

A ideia desse cálculo é bem simples. Basicamente, ele representa o valor final de cada fluxo descontado por uma taxa de mercado para se obter um valor presente do título.

Essa taxa de mercado é o único parâmetro variável nesse cálculo. Ela representa quanto o mercado está disposto a pagar por um título com características semelhantes ao que está sendo apreçado. Variações nessa taxa implicam em variações no preço da *U.S. Treasury*, e são dessas variações que surge o risco de mercado desse papel.

Pode ter surgido a dúvida se o resultado dessa fórmula (2.2) é o *clean price* ou o *dirty price*. Como ela resulta num financeiro em dólares, esse é o cálculo do *dirty price*. Ou seja, podemos chegar no *dirty price* a partir do *clean price*, conforme a fórmula (2.1), ou a partir da *yield* de mercado como foi visto agora.

Isso ocorre porque, na verdade, a *yield* de mercado e o *clean price* estão sempre relacionados. Para cada *clean price* existe uma *yield* de mercado que resulta no mesmo *dirty price*, e vice-versa.

A importância de calcularmos o *dirty price* pela fórmula (2.2) é que obtemos o valor presente de cada um dos *coupons* de forma independente.

A *yield* utilizada nessa fórmula é uma taxa média de mercado. Para as *U.S. Treasuries on-the-run*, podemos substituir essa *yield* pela taxa *spot* da curva livre de risco para cada um dos *coupons*, pois é a partir das *U.S. Treasuries* de emissão mais recente que é construída essa curva.

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{C}{(1+r_i)^{t_i}} + \frac{M}{(1+r_n)^{t_n}} \quad (2.3)$$

onde:

$r_i = \text{taxa livre de risco}$ para o vencimento do fluxo i ;

³ A *yield* original é semestral e calculada utilizando a fórmula composta, mas o dado divulgado pelo mercado é com base anual, sendo que essa conversão de base é feita utilizando a fórmula de juros simples (no caso aqui, a *yield* semestral é multiplicada por 2)

r_i = taxa livre de risco para o vencimento do último fluxo.

Dessa forma, fica mais evidente que o risco da *U.S. Treasury* está associado a curva livre de risco.

3. Apresentado futuros de *U.S. Treasury*

Agora que conhecemos melhor as *U.S. Treasuries*, vamos falar do seu principal derivativo, o futuro de *U.S. Treasury*.

Como citado na seção anterior, os títulos emitidos pelo Departamento do Tesouro dos Estados Unidos são separados por série, dessa forma existem contratos futuros específicos para cada série:

- Futuros de U.S. Treasury Notes de 2 anos
- Futuros de U.S. Treasury Notes de 3 anos
- Futuros de U.S. Treasury Notes de 5 anos
- Futuros de U.S. Treasury Notes de 10 anos
- Futuros de Treasury Bonds de 30 anos

O futuro de *U.S. Treasury* escolhido para esse trabalho foi o de 10 anos, pois, além de ser o mais líquido como pode ser visto na Figura 1 da seção 1, também é negociado na BM&F Bovespa⁴.

3.1 Detalhando o contrato

O Quadro 1 sintetiza as informações do contrato de Futuro de *Treasury* de 10 anos:

Tamanho do contrato	Uma U.S. Treasury Note com valor de face no vencimento de \$100.000
Classes para entrega	Data do vencimento de no máximo 10 anos e vencimentos remanescentes de no mínimo 6 anos e 6 meses após o primeiro dia do mês de entrega
Cotação	Pontos (\$1.000) e quartos de 1/32 de um ponto. Por exemplo, 84-16 representa 84 16/32, 84-165 representa 84 16,5/32
Oscilação mínima (Tick)	O preço mínimo de oscilação deverá ser a metade de um trinta e dois avos (1/32) de um ponto (\$15,625 arredondados ao centavo mais próximo por contrato) exceto para os spreads entre meses, quando a flutuação mínima deverá ser um quarto de um trinta e dois avos (1/32) de um ponto (\$7,8125 por contrato arredondados ao centavo mais próximo por contrato). O valor par deverá ser na base de 100 pontos
Meses negociados	Os cinco primeiros contratos consecutivos do ciclo trimestral de março, junho, setembro e dezembro
Último dia de negociação	Sétimo dia útil que precede o último dia útil do mês de entrega
Último dia para entrega	O último dia útil do mês de entrega
Método de entrega	Sistema de transferência de fundos por lançamento (book entry) do Federal Reserve

⁴ Para o futuro de U.S. Treasury negociado na BM&F Bovespa a liquidação é exclusivamente financeira.

Horário de negociação	Pregão de Viva Voz: de 7:20 às 14:00 horas CT de segunda a sexta-feira CME Globex: de 17:30 às 16:00 horas CT, de domingo a sexta-feira Para os contratos que estão vencendo, as operações serão encerradas às 12:01 CT, no último dias de negociação
Símbolo do contrato	Preção de viva voz: TY CME Globex: ZN

Quadro 1: Fonte CME: http://www.cmegroup.com/trading/files/IR-250_USTreasury_FC_PORT_R4.pdf

Esse contrato tem algumas características interessantes, diferente do que estamos acostumados aqui no Brasil. Como podemos ver, a liquidação no vencimento do contrato é feita por meio de entrega física de um título, o qual pode ser qualquer um dentre o conjunto de títulos que são elegíveis (Classes para Entrega). Além disso, a entrega pode ser feita em qualquer dia entre o último dia de negociação e o último dia para entrega.

Dessa forma, surge a pergunta: como esse futuro é cotado se existe uma lista títulos que podem ser entregues no vencimento e cada um tem um *coupon* diferente? A resposta é que o preço de ajuste é um *clean price* baseado num *coupon* de 6%, e um parâmetro chamado de Fator de Conversão (FC)⁵ é utilizado para ajustar o valor a ser pago pela *U.S. Treasury* no vencimento do contrato futuro. Assim, o valor em dinheiro se dá pela fórmula:

$$\begin{aligned} & (\text{Preço de Ajuste} \times \text{Fator de Conversão}) \\ & + \text{Juros Acumulados} \end{aligned} \quad (3.1)$$

O Fator de Conversão pode ser pensado como o preço do título em relação a um papel com um *coupon* de 6%. Dessa forma, títulos com *coupons* altos tendem a ter um FC alto, enquanto que títulos com *coupons* baixos tendem a ter um FC baixo. Mais especificamente, papéis com *coupon* menor que 6% terão FC menor que 1, e papéis com mais de 6% terão FC maior que 1.

A intenção desse sistema de Fator de Conversão é tornar igualmente rentável a entrega de qualquer um dos títulos elegíveis. Teoricamente, a parte que está vendida no futuro deve ser indiferente quanto à sua seleção.

⁵ A fórmula utilizada pela CME para calcular os fatores de conversão pode ser encontrada em: http://www.cmegroup.com/trading/interest-rates/files/Calculating_U.S.Treasury_Futures_Conversion_Factors.pdf

Mas, existe uma imperfeição nesse sistema pois ele assume que o DV01 é fixo, independente das variações das taxas de mercado do instrumento. Isso acaba fazendo com que uma das *Treasuries* em particular leve vantagem, a qual é conhecida como *cheapest-to-deliver* (CTD).

De acordo com *Hull* (2009), utilizando as fórmulas (2.1) e (3.1) é possível chegar na seguinte relação para encontrar a CTD.

$$\begin{aligned} & \text{Clean Price Treasury} \\ & - (\text{Preço de Ajuste} \times \text{Fator de Conversão}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dado que a parte que está vendida no futuro recebe de acordo com a fórmula (3.1) e o preço de compra do título é dado pela fórmula (2.1), tem-se que a *U.S. Treasury* que mais compensa entregar é aquela cujo resultado da fórmula (3.2) seja o menor.

3.2 Utilizando futuro de *U.S. Treasury* para gerenciamento de risco

Os futuros de *U.S. Treasury* proporcionam aos investidores de renda fixa avessos ao risco a oportunidade de proteger ou controlar os riscos inerentes às suas atividades de investimento. No entanto, o uso desse instrumento para essas finalidades requer um certo conhecimento de técnicas de hedge.

Mais especificamente, para fazer o hedge é necessário saber a quantidade de contratos futuros que devem ser negociados, ou seja, precisamos definir uma razão que reflita os movimentos do derivativo dadas mudanças no ativo.

3.2.1 Definindo a razão utilizando o valor de face

A forma mais superficial de definir uma razão é simplesmente igualar o valor de face do título ao valor de face do futuro. Vamos ver um exemplo para ficar mais claro.

Exemplo 1. Se temos uma posição de valor de face de 1 milhão em uma *U.S. Treasury*, naturalmente vamos pensar em vender 10 contratos futuros (cujo valor de face é 100 mil) gerando uma posição contrária de 1 milhão de valor de face.

Apesar desse método ter a vantagem de ser extremamente simples, ele ignora o fato de que há um descasamento entre os *coupons* do título e o *coupon* teórico do futuro.

3.2.2 Definindo a razão utilizando fator de conversão

Uma forma mais elaborada de definir a razão é considerar o fator de conversão associado ao título, pois, como discutido acima, ele reflete o valor relativo do título em relação ao *coupon* teórico de 6% do futuro. Vamos ver um exemplo.

Exemplo 2. Se tivermos uma posição de 10 milhões na *U.S. Treasury* de vencimento 31/08/2020 e *coupon* 2,125%, devemos vender 79 contratos futuros de vencimento Dezembro/2013, pois o fator de conversão para esse papel é 0,7939.

Esse hedge considerando o fator de conversão tende a ser bastante eficaz principalmente quando se está protegendo o título cheapest-to-deliver, balanceando as perdas (ganhos) do título com ganhos (perdas) iguais no derivativo.

4. Apreçamento dos futuros de *U.S. Treasury*

Com as informações da seção anterior é possível definir como o preço desse produto é construído.

Seguindo a ideia de Hull (2009), para calcular o preço teórico desse futuro é necessário assumir que a CTD e a data de entrega são conhecidas⁶.

O primeiro passo é determinar o preço da *U.S. Treasury* (CTD) no vencimento do futuro. Para isso, é importante saber se existem pagamentos de *coupon* entre a data de cálculo e o vencimento do futuro.

Abaixo, vamos fazer um caso com 1 pagamento de *coupon* entre essas datas. Esse caso pode ser generalizado quando houver mais de um *coupon* no período aplicando o mesmo tratamento definido aqui e levando em consideração os prazos.

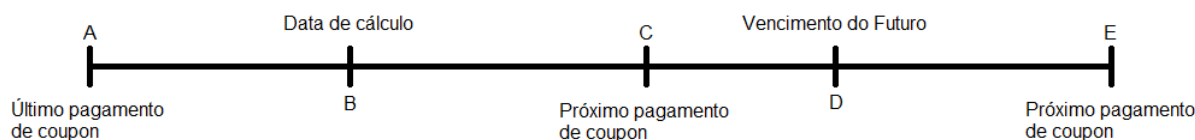


Figura 2: Fluxo utilizado para explicação do apreçamento do futuro de *U.S. Treasury*

Então, nesse exemplo, temos 1 pagamento de *coupon* entre a data de cálculo e o vencimento do futuro, portanto, temos que subtrair o valor desse *coupon* pois ele não existirá no vencimento do futuro.

Na data de cálculo (B) temos o *clean price* da *U.S. Treasury*, e é a partir dele que começamos. Primeiro vamos acumular os juros do último pagamento de *coupon* (A) até a data de cálculo (B) para termos o preço na data de cálculo em financeiro conforme a fórmula (2.1):

$$\text{Dirty Price} = \text{Clean Price} + \text{Juros Acumulados}_{A-B} \quad (2.1)$$

Desse valor vamos subtrair o valor do pagamento do *coupon* que existe entre a data da cálculo (B) e o vencimento do futuro (D), mas para isso precisamos trazê-lo a valor presente:

⁶ Para determinar a *cheapest-to-deliver*, é feita a conta da fórmula (3.2) utilizando as cotações das *treasuries* e do futuro atuais. Para a data de entrega, assume-se que é o último dia de negociação.

$$VP_{Coupon_C} = \frac{Coupon_C}{(1 + r_C)^{t_C}} \quad (4.1)$$

onde:

$Coupon_C$ = valor do coupon que será pago em C ;

$(1 + r_C)^{t_C}$ = fator efetivo calculado considerando a taxa livre de risco e o prazo de vencimento do *coupon* que será pago em C .

Agora calculamos o preço na data de cálculo subtraído desse *coupon*:

$$VP_{U.S. Treasury} = Dirty Price - \frac{Coupon_C}{(1 + r_C)^{t_C}} \quad (4.2)$$

A partir desse passo, temos um valor presente desconsiderando todos pagamentos intermediários até o vencimento do futuro. E o que será feito agora é levar esse valor até o vencimento do futuro:

$$VF_{U.S. Treasury} = \left[Dirty Price - \frac{Coupon_C}{(1 + r_C)^{t_C}} \right] \times (1 + r_D)^{t_D} \quad (4.3)$$

onde:

$(1 + r_D)^{t_D}$ = fator efetivo calculado considerando a taxa livre de risco e o prazo de vencimento do futuro em D .

Com isso temos o valor do título no vencimento do futuro, e o que falta agora é comparar esse valor (4.3) com o que foi definido em (3.1).

$$VF_{U.S. Treasury} = (Preço de Ajuste \times Fator de Conversão) + Juros Acumulados_{C-D} \quad (4.4)$$

Isolando o Preço de Ajuste, temos o seguinte:

$$\begin{aligned} & \text{Preço de Ajuste} \\ &= \frac{\left[Dirty Price - \frac{Coupon_C}{(1 + r_C)^{t_C}} \right] \times (1 + r_D)^{t_D} - Juros Acumulados_{C-D}}{Fator de Conversão} \quad (4.5) \end{aligned}$$

Generalizando a equação acima temos o seguinte:

Preço de Ajuste

$$= \frac{\left[\text{Dirty Price} - \sum_{j \in K} \frac{\text{Coupon}_j}{(1 + r_j)^{t_j}} \right] \times (1 + r_{VF})^{t_{VF}} - \text{Juros Acumulados}_{VF}}{\text{Fator de Conversão}} \quad (4.6)$$

onde:

K = conjunto dos *coupons* que vencem entre a data de cálculo e o vencimento do futuro.

Coupon_j = valor do *coupon* j ;

$(1 + r_j)^{t_j}$ = fator efetivo calculado considerando a taxa livre de risco e o prazo de vencimento do *coupon* j .

$(1 + r_{VF})^{t_{VF}}$ = fator efetivo calculado considerando a taxa livre de risco e o prazo de vencimento do futuro.

Dessa forma, definimos como construir um preço de ajuste justo para o futuro de *U.S. Treasury*.

5. Revisão de modelo *Value at Risk*

Antes de partirmos para a identificação e quebra em fatores de risco do futuro de *U.S. Treasury*, vamos fazer uma revisão de *Value at Risk*.

5.1 Conceito de *Value at Risk*

O conceito de VaR foi introduzido em 1994 pelo banco J.P. Morgan & Co. A ideia é medir a perda máxima esperada de um portfólio, com um certo grau de confiança, para um dado horizonte de tempo, sob condições normais de mercado.

Essa metodologia permite uma redução da multidimensionalidade do risco a um único número, expresso em unidade monetária. Ou seja, o VaR resume em um único número a máxima perda esperada de um dado portfólio. Este número ainda agrega todos os descasamentos de prazos, moedas e indexadores. Além do mais, o risco é medido em termos de potencial de perda, isto é, o risco está associado à uma probabilidade (intervalo de confiança), tornando-o de fácil compreensão.

Os principais modelos de risco utilizados no cálculo do VaR são: o modelo de Simulação Histórica, o modelo Paramétrico (distribuição normal e real) e o modelo de Simulação de Monte Carlo.

De forma genérica, calcular o risco de uma carteira corresponde a estimar um retorno limite, r^*_{IC} , associado a um intervalo de confiança (IC), através da distribuição de retornos da carteira. O retorno limite divide a distribuição de retornos em duas regiões, a região de controle (intervalo de confiança) e a região extrema (região de risco).

Neste sentido, o risco pode ser obtido através da multiplicação do retorno limite pela riqueza, I , dado por:

$$VaR = I \times r^*_{IC} \quad (5.1)$$

O conceito de riqueza utilizado acima pode ser caracterizado da seguinte forma: considere uma carteira composta de n ativos, com z fatores de risco. Sendo p_i o valor a mercado de cada fator de risco, a riqueza total da carteira será definida da forma

$$I = \sum_{i=1}^z |p_i| \quad (5.2)$$

O peso relativo de cada fator de risco sobre a carteira total será dado por

$$w_i = \frac{|p_i|}{I} \quad (5.3)$$

Os modelos apresentados tem diferentes formas de estimar r^*_{IC} . O modelo histórico assume que a série de retornos é estacionária, ou seja, um retorno limite passado irá se repetir no futuro, podendo ser estimado através da reprodução da distribuição de retornos da carteira. Os modelos paramétricos estimam o retorno limite futuro através de uma forma quadrática. Por fim, o modelo de simulação de Monte Carlo estima o retorno limite através da simulação da distribuição de retornos.

Entre os modelos de risco citados, o modelo de simulação histórica é o que apresenta menor grau de complexidade. Basicamente, consiste em montar uma série de retornos da carteira para um intervalo de tempo desejado, e obter o risco a partir de um histograma dos retornos.

Dada essa facilidade de implementação, utilizaremos esse modelo como base para o estudo. Vamos detalha-lo um pouco mais a seguir.

5.2 Modelo de Simulação Histórica

Considere uma carteira C , onde w_i , com $i = 1, 2, \dots, z$ são os pesos relativos de cada fator de risco. O retorno da carteira em um instante t é dado por

$$r_{C,t} = \sum_{i=1}^z w_i r_{i,t} \quad (5.4)$$

onde:

$r_{i,t}$ = retorno do fator de risco i na data t .

Então, dado um intervalo de tempo qualquer $[a, b]$, a série de retornos da carteira será dada por $r_{C,[a,b]} = \{r_{C,a}, \dots, r_{C,b}\}$. Desta forma, dado um intervalo de

confiança (quartil), o retorno limite r^*_{IC} poderá ser determinado através do histograma de retornos, e o risco da carteira será dado pela fórmula (5.1).

5.3 Identificação de Fatores de Risco

Como visto acima, para o cálculo do VaR os produtos são quebrados em seus fatores de risco básicos. Essa quebra é feita observando a fórmula do seu apuração e identificando quais elementos variam com mudanças de mercado.

Além disso, é importante definir quanto do valor do produto está exposto a cada um desses fatores de risco.

Para ficar mais claro, vamos olhar dois exemplos:

Exemplo 3. Vamos analisar um título prefixado. O primeiro passo é olhar sua fórmula de apuração:

$$MtM = \frac{\text{Valor Inicial} \times (1 + \text{Taxa de Juros})}{(1 + \text{Taxa de Mercado})} \quad (5.5)$$

Podemos observar que o único elemento que sofre com variações do mercado é a Taxa de Mercado e ele incide sobre o valor total da posição desse produto.

Exemplo 4. Agora vamos analisar um contrato de futuro de dólar. Novamente, vamos olhar o fórmula de apuração:

$$\text{Futuro de Dólar} = \frac{\text{Dólar Spot} \times (1 + \text{Taxa de Mercado})}{(1 + \text{Cupom de Dólar})} \quad (5.6)$$

Aqui, vemos que existem 3 fatores de risco, pois o Dólar Spot, a Taxa de Mercado e o Cupom de Dólar são impactados com variações do mercado. Além disso, todos incidem sobre o valor total da posição alavancada.

Com a quebra é possível verificar que produtos diferentes podem ter fatores de risco básicos em comum, que é o caso da Taxa de Mercado nos exemplos acima.

Tendo definido os fatores de risco e quanto existe de exposição em cada um deles, o VaR é calculado apenas com base nos retornos desses fatores, conforme visto na seção anterior.

5.4 Mapeamento de Fatores de Risco em vértices

Para os fatores de risco que dependem de prazo, que é o caso da Taxa de Mercado e do Cupom de Dólar dos exemplos anteriores, é inviável ficar calculando retornos para todos os prazos possíveis.

A princípio, podemos calcular as volatilidades e covariâncias para cada prazo e combinações de prazos, e assim calcular o risco total. Contudo, para uma grande quantidade de prazos diferentes, o processo é pouco prático tanto computacional quanto analiticamente.

Analiticamente, um grande número de variâncias e covariâncias dificulta visualizar o comportamento relativo entre ativos financeiros diferentes, principalmente aqueles cujos fluxos de caixa estejam em datas de pouca liquidez. De forma que a análise das correlações obtidas não estará agregando nenhum valor a análise dos dados.

Do ponto de vista computacional, o custo destes cálculos pode ser resolvido com o aumento da infraestrutura computacional, via um processador mais potente e aumento da memória, principalmente. No entanto, mesmo contando com computadores de alto desempenho, os cálculos realizados acabariam sendo afetados por instabilidade numérica dada a enorme quantidade de números que estaríamos lidando.

Para facilitar o cálculo do risco, devemos simplificar essa estrutura, alocando todos os prazos originais em pontos, ou vértices, pré-definidos. A este processo damos o nome de Mapeamento dos Fatores de Riscos em Vértices.

O mapeamento tem início com a definição dos vértices, em geral prazos de referência para o mercado. Utilizando dias úteis, por exemplo, definimos o seguinte conjunto de vértices fixos $V = \{1, 21, 42, 63, 84, \dots\}$.

Mapear um prazo em vértices implica em decompô-lo em seus dois vértices subjacentes: o vértice imediatamente maior e o imediatamente menor (salvo o caso em que o fluxo de caixa coincide com um dos vértices), tal que as seguintes condições estejam satisfeitas:

1. O valor de mercado exposto ao fator de risco é preservado. Ou seja, o valor total nos vértices deve ser igual ao valor original.
2. O risco de mercado do prazo é preservado. Logo o risco total dos vértices deve ser igual ao risco do prazo original.
3. Não é permitido mudança de sinal. Os valores nos vértices devem preservar o sinal do valor original.

Esse mapeamento será muito importante para entendermos como serão construídos os retornos dos fatores de risco do futuro de *U.S. Treasury*.

6. Quebra do futuro de *U.S. Treasury* em Fatores de Risco

Nessa seção, vamos estudar duas possíveis formas de identificar os fatores de risco do futuro de *U.S Treasury*, uma mais completa e uma bem mais simples.

6.1 Quebrando da forma mais completa

O primeiro passo é analisar a fórmula (4.6) que define o preço do futuro.

Preço de Ajuste

$$= \frac{\left[\text{Dirty Price} - \sum_{j \in K} \frac{\text{Coupon}_j}{(1 + r_j)^{t_j}} \right] \times (1 + r_{VF})^{t_{VF}} - \text{Juros Acumulados}_{VF}}{\text{Fator de Conversão}} \quad (4.6)$$

Como esse cálculo é baseado na CTD, o $\text{Juros Acumulados}_{VF}$ e o *Fator de Conversão* são conhecidos e não variam com o mercado. Assim, podemos observar que o único elemento que sofre com variações do mercado é a taxa livre de risco, mas ainda está complicado enxergar a exposição que está sofrendo com essa variação.

Se ignorarmos os dois elementos citados no parágrafo anterior e substituirmos o *dirty price* pela fórmula (2.3), obtemos o seguinte:

$$\left[\sum_{i=1}^n \frac{C}{(1 + r_i)^{t_i}} + \frac{M}{(1 + r_n)^{t_n}} - \sum_{j \in K} \frac{\text{Coupon}_j}{(1 + r_j)^{t_j}} \right] \times (1 + r_{VF})^{t_{VF}} \quad (6.1)$$

Podemos separar essa fórmula em duas exposições:

- Exposição $VP_{U.S. Treasury}$, calculada de acordo com a fórmula (4.2), na qual temos a variação da taxa livre de risco que desconta cada um dos fluxos;
- Exposição $VF_{U.S. Treasury}$, calculada de acordo com a fórmula (4.4), na qual temos a variação da taxa livre de risco que carrega $VP_{U.S. Treasury}$ até o vencimento do futuro.

Isso acaba resultando num risco *forward* a partir do vencimento do futuro.

Dessa forma, temos uma quebra bem completa nos fatores de risco. Ela deixa bem clara a relação que o futuro tem com o papel, mas implica em avaliar diariamente qual *U.S. Treasury* é a *cheapest-to-deliver* e associar esse título ao futuro. Isso parece simples, mas imagine que existem vários vencimentos de futuro para cada série e essa avaliação tem que ser feita para cada um dos vencimentos. Esse tratamento acaba dificultando a generalização de uma automatização desses cálculos.

6.2 Quebrando da forma mais simplificada

Uma opção mais simples para mapear o risco é utilizar os próprios preços de ajuste dos futuros de *U.S. Treasury* como fator de risco.

Isso significa que vamos tratar o futuro como se o preço dele fosse construído a partir de uma curva de preços, diferentemente do que foi definido na seção 4.

Dessa forma, o fator de risco é a curva de preços futuros e a exposição é a própria posição alavancada do futuro.

Esse tratamento é bem simples, pois apenas com as informações dos preços de ajuste podemos construir uma curva de preço e calcular o risco do futuro, não dependendo de associar uma *U.S. Treasury* ao cálculo. Mas, como dessa forma não temos uma quebra para cada um dos fluxos da *U.S. Treasury*, fica muito difícil visualizar o hedge entre o título e o futuro.

Na próxima seção veremos como os retornos desse fator de risco são construídos.

7. Criando os Retornos dos Fatores de Risco

Agora, vamos explicar como são construídos os retornos dos fatores de risco utilizados nos dois casos da seção anterior. Para ambos, utilizaremos o mapeamento em vértices descrito na seção 5.4.

7.1 Curva livre de risco

Como estamos trabalhando com os títulos de dívida do governo americano, nossa curva livre de risco será construída utilizando as taxas de referência das *U.S. Treasuries* divulgadas pelo departamento do tesouro americano⁷.

Uma dificuldade aqui é que essas taxas de referência são *yields* e não taxas *spot*. O mais correto seria fazer um *bootstrapping* dessas *yields*, mas para simplificar os cálculos iremos considerar a *yield* como se fosse uma taxa *spot* para o *duration* do papel.

Assim teremos uma curva livre de risco de taxas *spot* para cada dia, e com essas curvas construiremos os retornos dos prazos úteis fixos $V = \{1, 21, 42, 63, 126, 252, 504, 756, 1260, 2520\}$. Vamos exemplificar esse cálculo a seguir.

Abaixo, temos a curva para 2 dias.

Tabela 1: Curva livre de risco para o dia 30/10/2013.

Data	Prazo	Taxa
30/10/2013	1	0,05
30/10/2013	21	0,05
30/10/2013	63	0,04
30/10/2013	126	0,09
30/10/2013	252	0,11
30/10/2013	502	0,33
30/10/2013	747	0,58
30/10/2013	1208	1,3
30/10/2013	1662	1,93
30/10/2013	2239	2,55
30/10/2013	3916	3,33
30/10/2013	5455	3,63

⁷ <http://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/Pages/TextView.aspx?data=yield>

Tabela 2: Curva livre de risco para o dia 29/10/2013.

Data	Prazo	Taxa
29/10/2013	1	0,06
29/10/2013	21	0,06
29/10/2013	63	0,04
29/10/2013	126	0,08
29/10/2013	252	0,11
29/10/2013	502	0,31
29/10/2013	747	0,59
29/10/2013	1208	1,29
29/10/2013	1662	1,9
29/10/2013	2239	2,53
29/10/2013	3916	3,31
29/10/2013	5455	3,62

Para calcular o retorno dos vértices, primeiro interpolamos as curvas para obter as taxas para os vértices fixos, depois passamos a taxa para fator efetivo e, finalmente, calculamos o retorno geométrico dos fatores efetivos. Obtendo o seguinte:

Tabela 3: Retornos dos vértices fixos do fator de risco da curva livre de risco para o dia 30/10/2013.

Data	Vértice	Retorno
30/10/2013	1	-0,0000002777
30/10/2013	21	-0,0000083310
30/10/2013	42	-0,0000041655
30/10/2013	63	0,00
30/10/2013	126	0,0000499788
30/10/2013	252	0,00
30/10/2013	504	0,0003920381
30/10/2013	756	-0,0002804552
30/10/2013	1260	0,0006462431
30/10/2013	2520	0,0019731153

7.2 Curva de preço do futuro

Aqui, a ideia é a mesma da seção anterior só que a curva será construída utilizando os preços de ajuste dos futuros de U.S. Treasury Notes de 10 anos divulgados pela CME ⁸. Os vértices utilizados no mapeamento serão $V = \{1, 21, 42, 63, 126, 252, 378\}$. Nesse caso, não precisamos de vértices muito longos, pois os vencimentos dos futuros são curtos.

Conforme foi feito anteriormente, vamos exemplificar a construção dos retornos desse fator de risco também.

⁸ http://www.cmegroup.com/trading/interest-rates/us-treasury/10-year-us-treasury-note_quotes_settlements_futures.html

Tabela 4: Curva de preço para o dia 30/10/2013.

Data	Futuro	Prazo	Preço de Ajuste
30/10/2013		1	127,515625
30/10/2013	TYZ13	35	127,515625
30/10/2013	TYH14	96	126,25
30/10/2013	TYM14	160	126,25
30/10/2013	TYU14	224	125,75
30/10/2013	TYZ14	287	125,75

Tabela 5: Curva de preço para o dia 29/10/2013.

Data	Futuro	Prazo	Preço de Ajuste
29/10/2013		1	127,71875
29/10/2013	TYZ13	36	127,71875
29/10/2013	TYH14	97	125,984375
29/10/2013	TYM14	161	125,984375
29/10/2013	TYU14	225	125,984375
29/10/2013	TYZ14	288	125,984375

Aqui, também precisamos interpolar para obter os preços para os vértices fixos e depois calcular o retorno.

Tabela 6: Retornos dos vértices fixos do fator de risco da curva de preço para o dia 30/10/2013.

Data	Vértice	Retorno
30/10/2013	1	-0,001591675
30/10/2013	21	-0,001591675
30/10/2013	42	-0,0017802
30/10/2013	63	-0,001870904
30/10/2013	126	-0,001854715
30/10/2013	252	-0,001862082
30/10/2013	378	-0,001862082

8. Análises e resultados

Nessa seção vamos discutir o volume de dados necessário em cada uma das metodologias para automatizar os cálculos⁹ e comparar o VaR calculado por cada uma.

8.1 Volume de dados

Para automatizar a forma mais completa, é preciso acompanhar a emissão de U.S. Treasuries elegíveis para todas as séries de futuros e calcular diariamente a CTD. Além disso, deve ser construída também diariamente, através de bootstrapping, a curva livre de risco.

Já para a metodologia mais simplificada, utilizamos apenas os preços de ajuste dos futuros.

8.2 Comparando as metodologias

Utilizando as ferramentas apresentadas nas seções anteriores, fizemos o cálculo do VaR do futuro de *U.S. Treasury* para uma amostra de 2 meses¹⁰ utilizando as duas formas de quebra em fator de risco e comparamos com os retornos reais.

Abaixo podemos ver essa comparação na Figura 3.

⁹ A ideia de automatização aqui é de um sistema que esteja pronto para calcular o risco qualquer futuro de *U.S. Treasury*, portanto, todos os dados necessários de todas as séries precisam estar disponíveis a todo instante.

¹⁰ O período de validação foi de 03/09/2013 a 30/10/2013. Foi utilizado o modelo histórico com horizonte de tempo de 1 dia, nível de confiança de 95% e uma amostra de 168 retornos.

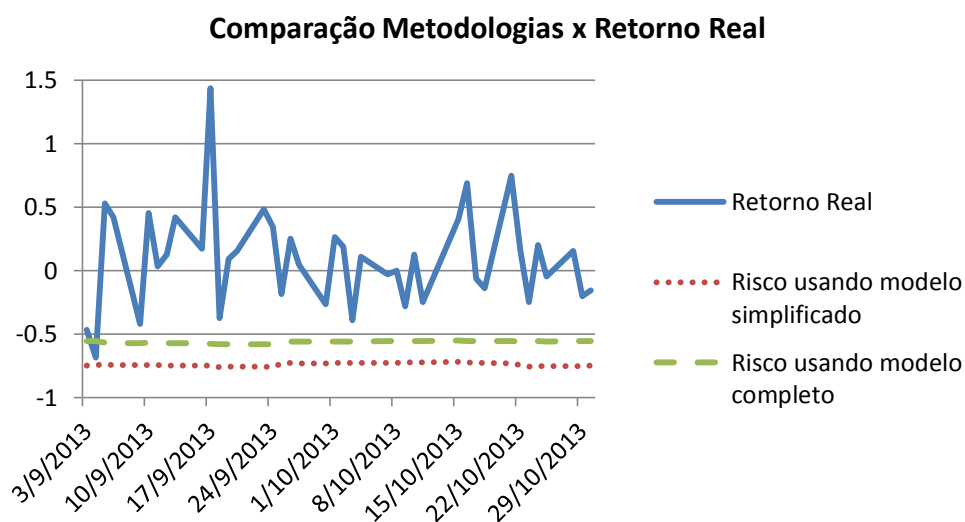


Figura 3: Comparação das metodologias com o retorno real.

Observamos que o modelo completo se ajustou muito bem, como era esperado, enquanto que o modelo mais simples acabou superestimando um pouco o risco.

Se fizermos uma análise olhando o risco em relação ao tamanho da posição alavancada, vemos que o risco é percentualmente muito pequeno, o que gera pouca diferença em termos financeiros entre os dois modelos, como mostra a Tabela 7.

Tabela 7: Risco sobre posição

Data	Posição Alavancada	Risco/Posição Modelo Simplificado	Risco/Posição Modelo Completo	Risco \$ Modelo Simplificado	Risco \$ Modelo Completo
30/10/2013	127515,62	0,5886%	0,4358%	750,60	555,77
29/10/2013	127718,75	0,5893%	0,4362%	752,60	557,09
28/10/2013	127562,50	0,5899%	0,4367%	752,49	557,00
25/10/2013	127609,38	0,5905%	0,4370%	753,57	557,69
24/10/2013	127406,25	0,5912%	0,4374%	753,17	557,29

9. Conclusão

Após as definições e resultados demonstrados durante o desenvolvimento desse trabalho levantamos os seguintes pontos positivos e negativos de cada metodologia.

Analisando as quebras propostas fica claro que o modelo completo é o que permite enxergar de forma clara a relação do futuro com o título, mas a necessidade de avaliar diariamente qual papel é o CTD para todos os vencimentos de futuros o torna um modelo complexo para ser automatizado.

Já o modelo simplificado apresentou resultados muito bons quando comparado com o modelo completo e sua facilidade de automatização o torna uma alternativa muito interessante para o cálculo do VaR, apesar de superestimar um pouco o risco.

Um ponto que podemos considerar para melhorar aderência do cálculo risco é ajustar os parâmetros do modelo de risco. Por exemplo, o cenário acima foi calculado usando um nível de confiança de 95% e o risco ficou um pouco superestimado. Talvez seja interessante diminuir um pouco o nível.

Para finalizar, é importante destacar que foi feita apenas uma análise isolada desse produto, sendo um próximo passo incorporar esse derivativo numa carteira com títulos que permita a avaliação das metodologias em situações de hedge com as *U.S. Treasuries*.

10. Referências

FABOZZI, FRANK J. **Bond Markets, Analysis and Strategies**. 4.ed. New Jersey: Prentice-Hall, 2000. 20p.

HULL, JOHN C. **Options, Futures and others Derivatives**. 7.ed. New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2009. 132p.