Universidade de São Paulo

Instituto de Matemática e Estatística

Licenciatura em Matemática

Roberta Stoppe

Orientadora: Profª. Drª. Barbara Corominas Valerio

O estudo de funções no Ensino Básico

São Paulo

novembro, 2019

Resumo

Este trabalho disserta sobre o tema Funções como objeto de estudo matemático, para tentar compreender as dificuldades de aprendizagem, por parte dos alunos, que podem surgir durante o seu ensino. As dificuldades no processo de ensino e aprendizagem das Funções são reconhecidas tanto pelos professores como pelos pesquisadores na área de Ensino da Matemática. Na literatura existem vários trabalhos abordando o assunto, como em Duval (1993), que, diferenciando os conhecimentos matemáticos das formas de pensamento matemático, começa a propor explicações para os obstáculos na aprendizagem desse tema. O estudo das funções geralmente ocorre no Ensino Médio e é um marco na escolarização, pois busca aperfeiçoar habilidades como a abstração, generalização e modelagem através do estudo desses objetos matemáticos. Com base em aporte teórico de trabalhos das áreas de educação matemática e de semiótica, realizo uma atividade junto a estudantes do Ensino Médio de diferentes escolas públicas estaduais de São Paulo, propondo que realizem transformações dos registros de representação, de forma a observar como eles desenvolvem conversões de linguagem, particularmente transitando entre linguagem natural, gráfica e algébrica, além de investigar como se dão os processos de ensino e aprendizagem e representação desse tema. As conclusões observadas são que parte significativa dessas dificuldades de conversão se situam na pouca experiência com diferentes representações durante os processos de ensino e aprendizagem, e na imprecisão ao representar objetos de natureza matemática na língua natural ou utilizá-la como referência para uma representação intermediária, diminuindo a congruência entre essas diferentes formas de um mesmo objeto que tem suas características e propriedades. Este trabalho de investigação foi apresentado na disciplina MAT0451 Projeto de Ensino de Matemática.

Palavras-chave: Funções; Ensino-aprendizagem; Matemática; Semiótica; Representações.

SUMÁRIO

Lista de ilustrações:

Lista de tabelas:

1 - Introdução

No Ensino Fundamental se iniciam os estudos relativos às Funções, que ainda nesse momento de escolaridade se tornam conhecimentos essenciais para o bom aproveitamento dos alunos na etapa do Ensino Médio. Isso por conta da ênfase que esse conteúdo recebe, tanto em matemática como em sua utilização frequente em outros componentes curriculares.

Nos estágios desenvolvidos durante a graduação, presenciei professores de matemática relatarem que o estudo de funções muitas vezes se coloca como desafio a diversos grupos de alunos, sinalizando também suas dificuldades para apresentar o tema de forma que os mesmos realmente compreendam suas aplicações. Essas observações se deram em contextos diversos, em escolas particulares e estaduais da capital paulista, em diversos turnos letivos nas três séries do Ensino Médio. Assim, os processos de ensino e aprendizagem não parecem conseguir tornar esse conhecimento claro aos alunos, sensação que é ratificada por estudos que são apresentados neste trabalho e que, a maioria das vezes, colocam essas dificuldades como axioma facilmente observáveis na prática docente.

São muitos os estudos que procuram entender sobre a instauração e superação de dificuldades dentro da escola, embora a definição desse conceito se encontre implícito nessas publicações, aqui vamos propor uma definição que se adequa ao caráter relativo com que compreendemos o desenvolvimento das situações de ensino e de aprendizagem.

No contexto escolar e, em específico, na aprendizagem de matemática, podemos definir “dificuldade” como a compreensão incompleta dos conceitos, procedimentos e representações necessárias, havendo habilidades e conhecimentos defasados dentre aqueles que se procura alcançar a partir do processo didático. No ensino de matemática, as dificuldades são bastante comuns, o que às vezes torna norma o que deveria ser exceção, a compreensão parcial ou superficial de alguns conteúdos, como é o caso das Funções.

A escolha do tema deste trabalho foi resultado de um direcionamento de foco, a partir de uma inquietação pessoal, sobre os erros e as dificuldades dos alunos no processo de aprendizagem. Inicialmente pretendia estudar atividades e metodologias que possibilitasse o desenvolvimento de um trabalho integrado em classes heterogêneas, em que diferentes alunos pudessem aprender através do mesmo contexto, sem que fosse necessário separar algum desses alunos, para um estudo individualizado e sem a referência do grupo. No entanto, é difícil definir genericamente todos os agentes associados a essas dificuldades no processo de ensino-aprendizagem, o que tornaria difícil a execução do trabalho de pesquisa nesta direção.

Motivada ainda pela necessidade de desenvolver algum tipo de saber sobre práticas integrativas das diferenças em sala de aula, decidi por eleger o tema de Funções como objeto de estudo matemático para tentar compreender as dificuldades de aprendizagem que podem surgir e levar a erros na execução de atividades e perguntas que parecem, aos professores, de simples resolução. A escolha do tema das funções se deu por diversos motivos, tantos que é possível dizer que foi uma escolha subsequente ao interesse de estudar dificuldades de aprendizagem no contexto de uma sala de aula regular.

Funções é um conteúdo matemático que exige fluidez entre diversos conjuntos de saberes, seu estudo é o momento de não apenas trabalhar com variáveis e valores desconhecidos, como também são abordadas variação e a relação de dependência de um valor em relação ao outro (que é, em si, a função como é vista no Ensino Básico). Esse conteúdo geralmente é inserido no currículo no início do ensino médio, sendo um marco na escolarização, pois busca aperfeiçoar habilidades como a abstração, generalização e modelagem através do estudo das funções, principalmente de primeiro e segundo graus. Em minhas experiências anteriores, percebi que muitos dos conceitos e definições envolvendo o tema de funções não eram bem compreendidos por muitos dos alunos, e nesse trabalho decidi investigar por que isso se dá.

Assim, o produto final dessa investigação é o trabalho apresentado para a disciplina de introdução aos trabalhos acadêmicos da graduação em Licenciatura em Matemática, MAT0451 - Projeto de Ensino de Matemática.

2 - Referencial teórico

2.1 Primeiras percepções

Para tentar compreender os fatores que influenciam na dificuldade de compreensão dos conceitos envolvendo funções, o estudo aqui desenvolvido se baseou no texto de Duval (2006) “Um tema crucial para a educação matemática: a habilidade para trocar o registro de representação”, que busca aprofundar o modelo de Piaget, agora se preocupando com as habilidades específicas de desenvolvimento do pensamento para o estudo da matemática, argumentando que a natureza dos conceitos que se colocam para estudo nessa disciplina necessitam de abordagem específica para plena compreensão de seus processos de ensino.

> Com frequência, muitos estudantes, em todos os níveis do currículo, percebem o distanciamento entre as formas do pensamento matemático e as formas de se pensar fora da matemática, embora o conhecimento matemático possa ser usado na vida real. Eles estão errados? De qualquer forma, os professores costumam observar que a aquisição de conhecimentos matemáticos não introduz a maioria dos alunos em formas de pensamento matemático, como a capacidade de alterar o registro de representação” (DUVAL, 2006)

Duval defende que o ensino deve desenvolver a habilidade de pensar matematicamente, mas que a forma como é proposto esse processo de ensino-aprendizagem não favorece a promoção dessa habilidade. Não existe uma preocupação em propiciar situações que favoreçam o desenvolvimento de autonomia pelos alunos. Assim como também não existe a preocupação em promover situações que possibilitem desenvolver conhecimento suficiente sobre os registros de representação e a utilização da matemática como linguagem em fenómenos extraescolares.

O autor também argumenta que existe uma diferença, observada pelos estudantes, entre as formas de raciocínio utilizadas no desenvolvimento da matemática e fora dela. Desde a escola básica a matemática e outras ciências são estudadas utilizando diferentes metodologias, o que causa distanciamento entre as formas de se pensar cada área ou cada conteúdo curricular.

São diversas as razões que influenciam essa situação, principalmente pelo papel atribuído à matemática na cultura escolar, em suas práticas docentes e no contrato didático a qual os estudantes estão até inconscientemente submetidos. Um exemplo é a metodologia geralmente associada à educação matemática por diversos estudantes: aula expositiva usando lousa e giz para compreender a teoria e posteriores exercícios de treino e fixação. A mudança desse paradigma pode causar estranhamento aos alunos, mas é necessária para que eles e elas possam se apropriar da matemática como linguagem e possam compreender suas diferentes representações.

Maggio e Nehring (2011), ao apontar as contribuições de Duval para o ensino de função, colocam que parte significativa do desenvolvimento da habilidade de conversão se baseia na distinção do congruente e o não-congruente, diferenciando objetos que tem, ou não, as mesmas propriedades e características, mesmo quando representados em diferentes linguagens dentro da matemática (diferentes sistemas semióticos).

> O teórico, que desenvolve estudos relativos à psicologia cognitiva, contribui com a área da Matemática, aponta a conversão como condição necessária para a aprendizagem dos conceitos matemáticos [...] A substitutividade, ou seja, a substituição de uma expressão por outra, é uma característica essencial do funcionamento cognitivo do pensamento matemático, e os fenômenos de congruência e não-congruência são importantes para essa substitutividade (MAGGIO E NEHRING, 2011, p. 2)

Aqui, fica demarcado que, para esses pesquisadores, a identificação de objetos congruentes é necessária para que seja possível aos estudantes desenvolver a habilidade de conversão.

2.2 Semiótica: sistemas de representação e mediação

Para se aproximar das teorias semióticas, mesmo que de maneira superficial, podemos citar a contribuição de alguns autores a respeito da conceituação do termo e suas aplicações e desenvolvimentos. Duval, em sua obra, é influenciado pelo linguista e matemático Peirce, que possui importantes contribuições sobre o tema da semiótica. Em Peirce (1999) podemos encontrar uma distinção entre um signo, definido como aquilo que representa algo a alguém, e o seu objeto, que é representado por ele, ao mesmo tempo em que declara arbitrária a condição de que o signo e o objeto são distintos. Essa ideia é um paradoxo do pensamento cognitivo da Matemática, seguindo Duval, como será apresentado mais à frente.

Dentro da perspectiva da linguística, Barros (1994) , "a semiótica tem por objeto o texto, ou melhor, procura descrever e explicar o que o texto diz e como ele faz para dizer o que diz"

(p. 7), ou seja, as semióticas são teorias sobre o texto que buscam compreender todos os seus sentidos, acumulando análises sobre aquela representação e seus significados. Aqui, o papel do texto é o de signo, conforme ele se apresente não necessariamente como língua natural.

Barbosa (1981) argumenta que "o homem só conhece o universo natural através dos códigos por ele mesmo estruturados [...] [os sistemas semióticos] não só possibilitam a vida em sociedade como também servem de instrumento de manifestação antropocultural" (p. 13), assim os sistemas de representação também servem como mediadores entre o indivíduo e o objeto representado, característica fundamental na matemática, que estuda muitos objetos abstratos, apenas acessíveis pela mediação através de algum sistema de representação, como a álgebra, gráficos, tabelas, língua materna, etc.

Então, para aplicar os paradigmas da semiótica no estudo da matemática, é preciso ter clareza da estruturação linguística que essa ciência tem. É possível encontrar em Barbosa (1981), um apontamento sobre a pertinência das linguagens matemáticas na ação codificadora exercida nos processos de aprendizagem, que mediam a relação dos humanos com o universo à sua volta.

> "a ação codificadora do homem não se restringe à estruturação linguística [...], que procura abarcar os dados que escapam aos recursos linguísticos, estruturando-os noutros sistemas semióticos" (p.25)

Nesse trecho, Barbosa (1981) apresenta a ideia de que a língua natural (o código linguístico), estudada pela linguística, não é suficiente para abranger todos os fatos do universo antropocultural (naturais ao homem, sua cultura e formas de organização social), de forma que esses fatos e signos só podem ser representadas por outros códigos, através de outros sistemas semióticos.

A mudança no paradigma das demonstrações e em algumas das representações matemáticas que ocorreu ao longo do tempo foi um processo de conversão que levou demonstrações feitas em versos, como nos originais de muitos textos antigos, à linguagem simbólica, com tratamento dentro da própria simbologia que se mostra com organização ainda melhor do que o código linguístico para a expressão dessas ideias.

Ao falar de diferentes problemas babilônios antigos, Roque (2012) ressalta que

> "Atualmente, alguns problemas podem ser resolvidos por uma equação do segundo grau do tipo $Ax^2 + Bx + C = 0$. Contudo essa associação exige o uso de símbolos que não fazem parte da matemática antiga. Logo, não faz sentido em falar de algo

> próximo do que concebemos como equação se as quantidades desconhecidas não eram representadas por letras, mas designavam comprimentos, larguras e áreas dadas por números” (ROQUE, 2012, p. 63)

Os diferentes sistemas de representação não são excludentes em suas utilizações, e na verdade se complementam na expressão das ideias que eventualmente são melhor contempladas por um ou outro. A linguagem natural e as representações da matemática são complementares na expressão das ideias e é importante que assim sejam compreendidas em sala de aula.

Assim, na conversão entre essas duas linguagens é importante considerar que a matemática, como linguagem, não faz parte do universo naturalmente constituído dos sujeitos escolares.

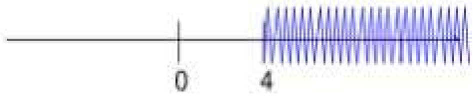
Os alunos, em geral, passam a conhecer a linguagem matemática e as suas regras de utilização apenas na escola e vão se aprimorando em sua utilização somente nesse espaço conforme avançam na escolarização, enquanto a língua natural permeia a relação do sujeito com a sociedade desde que ele nasce. Diante disso, é fundamental que essas duas formas de expressão das ideias e conceitos devem ser acolhidas em sala, e articuladas pelo que Duval (1993) chama de registro intermediário

> “a explicitação de representações intermediárias não discursivas aparece como condição necessária à aprendizagem do raciocínio dedutivo [...] a conversão de um enunciado em língua natural para um registro em escrita simbólica requer a volta das representações intermediárias” (p. 295)

Esses registros intermediários podem ser em língua natural ou algum tipo esquemático, uma vez que, como aponta Barbosa (1981), “um mesmo fato é suscetível de interpretação por meio de diferentes códigos”, um exemplo disso no currículo tradicional se refere à introdução à linguagem simbólica dos conjuntos no estudo dos conjuntos-solução que representam os valores possíveis de uma inequação.

Tome por exemplo $2x-8>0$. Geralmente, se iniciam os estudos de inequação aprendendo a encontrar uma desigualdade equivalente (processo de transformação), então encontramos $x>4$. Depois, os alunos costumam aprender a representar esse conjunto-solução usando sua representação simbólica $S=\{x\epsilon\Re \vee x>4\}$, e para isso geralmente fazem o exercício de representar esquematicamente na reta real o intervalo de números que satisfaz essa inequação (como abaixo)

Figura 2.1: representação esquemática do conjunto na reta



Fonte: elaborado pela autora

Segundo Greimas e Courtés (1979), "as línguas naturais são as únicas nas quais as outras semióticas são traduzíveis", o que ajuda a explicar um processo de aprendizagem em que, conforme o estudante vai adquirindo conhecimentos matemáticos, esses são inicialmente codificados pela linguagem natural e, depois, com maior grau de formalização e consolidação é possível que esse estudante se expresse matematicamente de forma mais precisa, também conseguindo maior compreensão sobre as formas de representação em linguagem algébrica.

Um triângulo, em sua natureza de objeto geométrico, não pode ser suficientemente representado apenas por uma palavra, uma vez que esse registro de representação não contempla determinadas manipulações que podem ser aplicadas a ele. É possível, porém, utilizando linguagem natural, descrever triângulo conforme as propriedades que o define (polígono fechado de três lados), ou utilizar a linguagem visual e desenhar um exemplo dele que possa nos servir de esboço na resolução de um problema complexo.

Assim, estudando o papel da representação, dos símbolos e dos signos no processo de ensino-aprendizagem estamos considerando a perspectiva da matemática como uma ciência plural, que é tanto linguagem para se expressar como ferramenta para resolução de problemas.

Para trabalhar as representações dentro da matemática, Duval (1993) define

> "Representações semióticas são produtos constituídos pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações semióticas que revelam sistemas semióticos diferentes" (Duval, 1993)

Duval (2006) nomeia de conversão a habilidade de deslocar um objeto matemático de um sistema semiótico para outro, preservando suas propriedades (mantendo a congruência), de forma que podemos representar esse objeto usando signos referentes a cada um desses sistemas.

Ainda segundo Duval, o estudo da matemática, por se dedicar muitas vezes à análise de objetos que não estão presentes no mundo natural da forma como os representamos, tem que confrontar um paradoxo. Nessa situação, ao mesmo tempo que o objeto não deve ser confundido com sua representação, ele também não pode ser estudado sem uma dessas representações, uma vez que os objetos de estudo dessa ciência por vezes são abstratos, havendo a necessidade inerente de um contexto de representação. Esse objeto possui uma ou mais características (propriedades) comuns às diversas representações, conforme o tipo de registro utilizado, nos permitindo garantir que se trata, realmente, de uma mesma entidade matemática, e permitindo a manipulação e tradução desse objeto em diferentes áreas da ciência, seja utilizando a linguagem algébrica, a linguagem natural (aqui, o português), a geométrica, gráfica, tabelas, etc.

Um exemplo dessa diversidade de linguagens presente na matemática está no estudo das funções, onde um mesmo objeto, preservando as propriedades que o define, pode ser traduzido à diferentes linguagens, que determinam também sua forma de estudo. Tome por exemplo $f(x) = x^2$ (em linguagem algébrica), que pode ser manipulado algebricamente sem necessidade de interpretação em outro sistema de mediação semiótica, mas também pode ser lido, como uma parábola (em linguagem geométrica), em termos de sua representação gráfica, no plano R^2, ou como uma função que modela uma determinada situação. Dessa forma, saber reconhecer a congruência entre essas três representações desse objeto matemático se torna importante para compreensão do conteúdo de funções no Ensino Básico.

2.3 Classes de transformações

Para falar das representações e dos sistemas semióticos, Duval (1993) define, “as representações semióticas são produções construídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento”

Ele ainda conceitua diferentes *classes de transformação de representação*, que são diferentes habilidades no trato com o aspecto língua da matemática. São apresentadas duas: o tratamento, que mantém a forma de registro, por isso os símbolos prevalecem ao significado das expressões; e a conversão, troca da forma de registro, falando do mesmo objeto. Neste trabalho estamos interessadas na habilidade de conversão entre as representações algébrica, gráfica e natural dos objetos.

> “A conversão de uma representação é uma transformação externa ao registro de início. Por exemplo, a descrição é a conversão de uma representação não verbal (gráfico por exemplo) em uma representação linguística; a descrição não é a mesma descrição que se faz de um objeto ou situação não representada semioticamente. Não existem regras de conversão, existe somente regras de tratamento; por exemplo, no registro da língua

> natural há poucas regras de tratamento para a expansão discursiva de um enunciado completo" (MAGGIO e NEHRING, 2011, p. 3)

Por exemplo, no caso da resolução de uma situação-problema, são utilizadas diferentes classes de transformação da representação. Observemos a situação a seguir:

A idade de um pai é o quádruplo da idade do filho. Daqui a 10 anos, a idade do pai será o dobro da idade do filho. Qual será a idade de cada um deles?

Em geral, a resolução esperada envolve a conversão dessas informações, que são disponibilizadas em português, para a linguagem algébrica, vertendo em "x" a quantidade desejada (no caso, a idade de algum dos personagens), e a posterior resolução dessa equação seguindo as normas algébricas de transformação, ou seja, a utilização dos próprios símbolos e sua organização interna, que independe do problema original, mas são reguladas pela própria linguagem.

Nesse caso, ocorre conversão quando, ao se resolver o problema, chamamos a idade do filho de "x", então a idade do pai é "4x", pois nos é dito que esta é o quádruplo da idade anterior. Da frase "Daqui a 10 anos, a idade do pai será o dobro da idade do filho" podemos converter em "4x+10=2(x+10)" utilizando a mesma habilidade de representação. A partir dessa última equação, é viável realizar transformações que nos possibilitam obter o resultado "x=5", e, utilizando a conversão, lembramos que x é a idade do filho, portanto o filho tem 5 anos, e seu pai tem 20 anos.

Como apontam Maggio e Nehring (2011), não existem regras que garantam uma conversão congruente, principalmente nas que relacionam a linguagem natural com linguagens matemáticas, gerando muitas dificuldades nos trabalhos com resolução de problemas, imprecisões na conversão principalmente pela ambiguidade que a língua natural pode ter, e que precisa ser eliminada na conversão para algum linguagem matemática.

Nos interessa estudar as causas das dificuldades nas conversões de linguagem, que são comumente apontadas no estudo do conteúdo. Observando Duval (1993), que declara, "é muito fácil ressaltar que a maioria dos estudantes tem dificuldade [em realizar conversão de linguagem]", fica claro tanto a presença de dificuldade nesse conteúdo como a naturalização dela nos processos de ensino-aprendizagens, que impede o aprendizado efetivo dos conteúdos da disciplina.

Maggio e Nehring (2011) comentam análise desenvolvida por Zucco (2010) sobre respostas de alunos de 3º ano do Ensino Médio de quatro questões que envolviam o conceito de função crescente e decrescente da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Eles observam que "os alunos apresentavam dificuldades em transitar pelas diferentes representações semióticas, nas conversões e nos tratamentos", e concluem que

> O não conhecimento de diversos registros de representação semiótica do conceito de função e a incapacidade de transitar entre os diferentes registros de representação podem explicar as dificuldades apresentadas pelos alunos (Maggio e Nehring, p. 8)

Considerando os pontos analisados, a hipótese levantada para esta pesquisa é de que não existe familiarização dos alunos com o caráter dual da matemática, que é tanto língua como ferramenta. Sendo a alfabetização nessa língua tratada como habilidade secundária no estudo dos conteúdos, que priorizam, por exemplo, a resolução de exercícios seguindo modelos, ou a utilização prática da matemática no dia a dia, muitas vezes esquecendo da formalização e generalização como parte do fazer matemático.

Dessa forma, ao buscar compreender os objetos matemáticos através de uma ou outra representação, sem observar que se trata de uma representação em certo sistema específico de um objeto que não está totalmente determinado por esse sistema, perde-se a habilidade de compreender esses objetos e entes matemáticos a partir de suas características principais, que os determinam de forma necessária e suficiente. Para Duval, "os alunos também deveriam ser capazes de reconhecer o mesmo objeto matemático do conhecimento em outros contextos de representação e usá-los." (1993)

Se faz essencial então, para a boa compreensão do significado das representações algébricas e sua simbologia, desenvolver condições que possibilitem uma coordenação interna para decidir qual sistema de representação semiótico usar para descrever um mesmo objeto (identificando que é o mesmo objeto, porém apresentado por um representação determinada), conforme a melhor adequação daquele sistema ao objeto e o interesse que se tem com essa representação.

2.4 Documentos regulatórios

Destacamos alguns trechos dos Parâmetros Curriculares Nacionais e da Base Nacional Comum Curricular, ambos do Ensino Fundamental, para compreender de que forma a habilidade de conversão entre os diferentes sistemas de representação é compreendida. A leitura desses trechos reforça a ideia de que, nos dois currículos, existe um profundo interesse em que os estudantes tenham vivência nas diferentes representações e consigam se transpor entre elas, como a seguir, nos PCNs :

> "No ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a "falar" e a "escrever" sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados" (BRASIL, 1997, p. 15)

> Eles também se utilizam de representações tanto para interpretar o problema como para comunicar sua estratégia de resolução. Essas representações evoluem de formas pictóricas (desenhos com detalhes nem sempre relevantes para a situação) para representações simbólicas, aproximando-se cada vez mais das representações matemáticas. Essa evolução depende de um trabalho do professor no sentido de chamar a atenção para as representações, mostrar suas diferenças, as vantagens de algumas, etc. (BRASIL, 1997, p. 41)

Já na BNCC, na unidade temática Álgebra, fica destacado que para o desenvolvimento do pensamento algébrico é necessário, dentre outras coisas, que os alunos possam

> "criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados (...) eles, os alunos, precisam ser capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações-problema, apresentadas em linguagem materna, em fòrmulas, tabelas e gráficos e vice-versa" (BRASIL, 2017, p. 268-269)

Assim, percebemos que os dois documentos consideram relevante as habilidades de conversão entre as linguagens. Indicando que se espera que os alunos possam transitar entre as diferentes linguagens matemáticas e, no caso da BNCC, utilizar essa habilidade na resolução de problemas. Os trechos acima destacados também se aproximam dos conceitos apresentados em Duval (1993, 2006) no aspecto em que apontam como habilidade essencial a comunicação das ideias e a interpretação das situações matemáticas em diversas linguagens, sendo essas ideias norteadoras do currículo de matemática aplicado nas escolas.

3 - Construção da atividade

Para investigar a compreensão de um grupo de alunos sobre as diferentes representações matemáticas das funções, foi feita uma atividade em turmas de Ensino Médio, e para isso contatamos diferentes professores parceiros, que haviam estudado ou realizado alguma formação continuada no Instituto. Os professores que se disponibilizaram a me receber em escolas com esse nível de ensino foram três, que atuam em Escolas Estaduais de diferentes regiões da Grande São Paulo.

Foram coletadas, no total, 133 respostas, distribuídas da seguinte forma: na escola A, em Diadema, a atividade foi aplicada em 2 turmas do 3º ano do período da manhã, com um total de 28 respostas. Na escola B, no Rio Pequeno, zona oeste de São Paulo, a atividade foi aplicada em 4 turmas, também do 3º ano do período da manhã com um total de 54 respostas, e na escola C, localizada na Vila Guilhermina, zona leste de São Paulo, foi aplicada em 3 turmas do 1º ano da tarde, coletando no total 51 respostas.

Cada resposta coletada corresponde de 1 a 3 alunos dessas turmas, pois embora solicitado que a atividade fosse realizada em duplas, alguns alunos preferiram fazer sozinhos ou em grupos com três integrantes. O número diferente de respostas em cada escola foi influenciado pela quantidade de turmas analisadas, dos alunos presentes no dia e da quantidade de grupos com 1 ou 3 integrantes.

Tínhamos como objetivo, ao aplicar a atividade, entender, como diferentes enunciados podem ajudar ou não a compreensão do que é pedido e como os alunos escrevem e interpretam em sua linguagem natural o que está representado algebricamente no problema, assim como realizam outras conversões entre as linguagens algébrica, gráfica e natural. A coleta do material se deu a partir da observação das respostas dadas por escrito, e também do diálogo com os alunos, durante e depois da aplicação, quando eles tiveram a oportunidade de explicitar seus pensamentos ao tentar resolver os exercícios propostos. Assim, foi possível compreender muitas das dificuldades na resolução desses exercícios que exigem a conversão entre diferentes linguagens matemáticas (gráfica e algébrica) e a língua natural.

Na atividade proposta, os alunos foram convidados a resolver 6 questões relacionadas com a conversão de linguagem de um conteúdo que eles já tinham estudado, as funções do primeiro grau, podendo utilizar consulta aos cadernos e livros, além de questionar a mim e ao professor da turma. Considerando as limitações dos tempos que julgamos razoável solicitar aos professores, para não comprometer o desenvolvimento de outras atividades, essas perguntas foram elaboradas para aplicação em 2 aulas de 50 minutos cada, o que foi possível e bastante proveitoso nas turmas das escolas B e C, apesar de ainda ser um tempo reduzido para uma análise aprofundada, foi possível a realização dessa atividade conforme o planejado nas turmas dessas escolas.

Já na aplicação da escola A ocorreu algo inusitado, uma vez que a professora parceira, nesse ano, não havia recebido turmas do Ensino Médio, mas ainda na intenção de colaborar com o desenvolvimento da pesquisa na Universidade me encaminhou ao outro professor, responsável pelos 3º anos, mas que só ministraria uma aula em cada turma naquele dia. Ainda assim, decidi por aplicar nessas turmas mesmo com essa limitação.

4 - Atividade desenvolvida

A atividade desenvolvida nas escolas se baseou principalmente em dois artigos, Duval (2006) e Maggio e Nehring (2011).

O primeiro artigo analisa o desempenho de 360 alunos entre 15 e 16 anos, a partir da coleta de dados de Duval (1988) em exercícios de uma atividade aplicada. Essa atividade quis observar o desempenho dos alunos na identificação de características de funções do primeiro grau através da oposição visual entre suas representações gráficas, buscando reconhecer a característica semântica correspondente na escrita simbólica. Foi apresentado, por exemplo, um gráfico e era solicitado identificar se este passa pela origem, abaixo ou acima dela.

Neste trabalho, Duval determina que sua pergunta motivadora é: "como discriminar as características visuais do gráfico que são matematicamente importantes para a conversão? Em outras palavras, como ver as características semânticas de uma equação através das características visuais qualitativas de um gráfico desenhado e vice-versa?". Nessa atividade, Duval analisou a habilidade de conversão dos estudantes, e sua compreensão das linguagens envolvidas.

No segundo artigo, os autores apresentam resultados de outras publicações de Duval. Dentre elas, em Duval (1993) são analisados os resultados de uma tarefa de conversão realizada por alunos franceses de escolaridade correspondente ao 1º ano do Ensino Médio, cujo objetivo era associação entre três elementos congruentes: descrição da propriedade dos pontos, expressão algébrica e o lugar geométrico daquele conjunto. A seguir reproduzimos o resultado desta pesquisa, onde as colunas I, II e III representam respectivamente os elementos congruentes que os estudantes deveriam relacionar. Na 4ª e na 5ª coluna está a porcentagem de acertos que cada associação obteve, isso é, qual a fração dos alunos que conseguiu relacionar corretamente as diferentes representações do mesmo objeto matemático.

Tabela 4.1: resultados dos alunos franceses

Resultados dos alunos franceses

I	II	III	I → III Hachurar	III → II escolher a expressão
1......o conjunto de pontos que tem uma abscissa positiva	x >0		67%	51%
2......que tem uma ordenada negativa	y < 0		67%	61%
3......cuja abscissa e ordenada tem o mesmo sinal	xy ≥ 0		56%	25%
4	xy ≤ 0			23%
5......cuja ordenada é superior a abscissa (a reta y = x sendo já traçada no gráfico)	y > x		38%	38%
6......cuja ordenada é superior a abscissa (a reta y = x não sendo traçada no gráfico)	y > x		19%	25%
7......cuja ordenada é igual a abscissa	y = x		60%	75%
8......cuja ordenada é oposta a abscissa	y = - x		34%	58%

Maggio e Nehring (2011) apud Duval (1993)

As perguntas aplicadas na atividade desenvolvida, em nosso trabalho, são similares às utilizadas em Duval (1993), com uma adaptação bastante relevante ao não envolver conjuntos generalizados, pedindo, por exemplo a representação dos valores “cuja ordenada é superior à abscissa” e semiplanos, mas sim funções de primeiro grau e situações com perguntas de resposta aberta.

Com o objetivo de investigar os conhecimentos adquiridos no contato com o conteúdo de funções de primeiro grau, a relevância que enxergam nele como objeto de estudo e as relações que conseguem fazer entre os ensinamentos da escola e a aplicação das funções na sua vida cotidiana, a principal preocupação na construção das questões propostas em nossa atividades foi que os alunos deixassem explícito seus raciocínios, de forma a obter como informação de pesquisa não só sua resposta final e resolução, mas também dicas sobre como se construiu esse processo de pensamento que culmina na resposta de um exercício, permitindo uma análise mais completa sobre suas dificuldades.

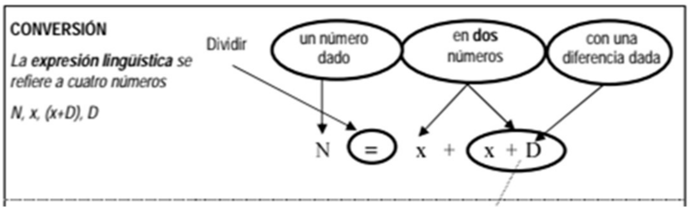
Como a aplicação se deu em papel, um formato bastante conhecido pelos alunos, e já instituído e formalizado dentro da escola, e das aula de matemática em especial, tínhamos medo de que as perguntas não fossem respondida por aqueles que não conhecem o procedimento formal e a resposta-modelo daqueles exercícios. Por isso durante as aplicações sempre reforçamos que tínhamos interesse em entender os métodos na tentativa de resolver as questões, e não íamos contar pontos dos itens certos ou errados. A ficha utilizada nas aplicações, ver anexo, tem 4 páginas, com uma instrução inicial e espaços reservados para resolver cada questão. As questões propostas são a seguir enunciadas com suas respectivas justificativas.

1) Pedro foi à feira e comprou x pacotes de legumes de R$3,50 e pagou R$21. Quanto vale x? Explique sua resolução.

Essa questão foi pensada para permitir que, na avaliação das respostas dos alunos, fosse possível entender sobre os processos anteriores de escolarização, uma vez que a maioria dos alunos já estudaram formas de resolver problemas como esse quando trabalham interpretação de situações-problema, ao mesmo tempo que também é uma situação de semi realidade (seguido classificação de Skovsmose 2000), sendo esperado observar que os alunos utilizassem diferentes métodos de resolução, nos permitindo visualizar melhor suas habilidades, principalmente em termos da utilização informal da matemática para resolver problemas cotidianos, a partir da estratégia que os alunos julgassem mais fácil, ao mesmo tempo que a própria redação da pergunta indicava uma ideia de caminho, ao se referir à quantidade desconhecida como “x”.

A conversão da linguagem natural para a linguagem algébrica é uma habilidade necessária na resolução de problemas em que se espera a formulação de uma equação, sendo recorrentemente citada por Duval (2006), como é possível observar no diagrama abaixo que representa o processo de conversão de um problema que pede para que se descubra os números dentro de determinada condição.

Figura 4.1: conversão



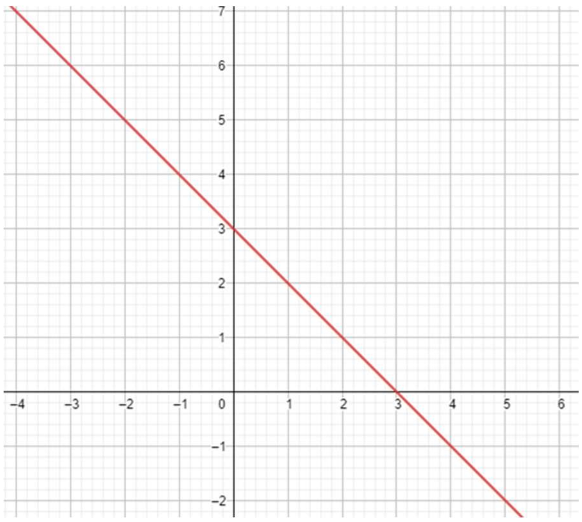
Duval (2006)

2) Desenhe um gráfico que represente a seguinte situação: um carro sai de uma cidade até outra com velocidade constante, percorrendo 240 km numa viagem que demora 3h. Faça um gráfico de tempo (t) por espaço (S), e explique como você chegou a esse desenho.

Esse exercício foi pensado para que os alunos convertessem de uma linguagem natural para a linguagem gráfica, e para isso selecionamos um exemplo sobre o qual os alunos já tem bastante vivência, seja em termos teóricos, de resolução de problemas na escola, principalmente na área de física, e também vivência prática, através de experiências e noções intuitivas sobre esse deslocamento.

3) Escreva a função que descreve o gráfico abaixo. Não esqueça de deixar explícito seu raciocínio

Figura 4.2: gráfico 1

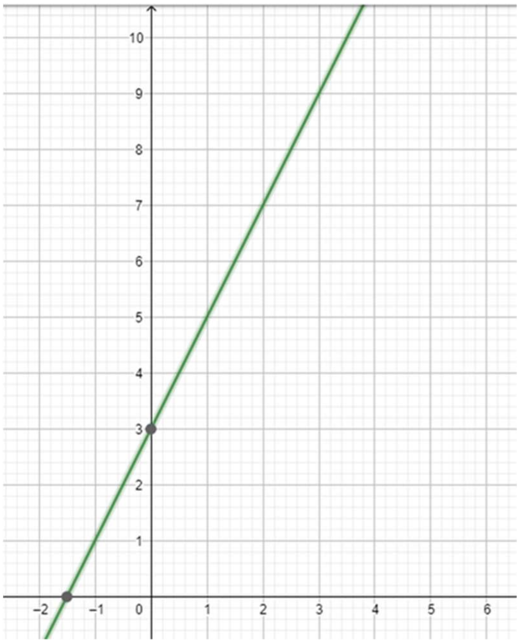


Fonte: produzido pela autora

Esse exercício pede uma resolução bastante comum dentro dos conteúdos de matemática pura, que solicita que se encontre a lei da função a partir do gráfico, a habilidade aqui necessária envolve a conversão da simbologia gráfica para a algébrica, em Duval (1993) foi feita uma análise semelhante, como observado nas colunas II e III da tabela 4.1.

4) Descreva o gráfico 2 (abaixo).

Figura 4.3: gráfico 2



Fonte: produzido pela autora

O objetivo nessa questão foi observar a conversão do gráfico em linguagem natural, através da descrição de suas características principais e mais marcantes para os alunos. A ideia era entender quais características da imagem chamam mais atenção e a forma como os alunos descrevem essas características nas palavras que julgarem mais adequadas.

Em Duval (1993) a avaliação é feita solicitando que os alunos relacionem as opções de resposta que demonstrem congruência entre essas mesmas duas linguagens, a gráfica e a natural, em opções com a descrição da propriedade dos pontos (colunas I e III da tabela 4.1), mas o estilo "fechado" de resposta limita a análise das respostas, sem conseguir muitas informações sobre o raciocínio que o levou àquela conclusão. Optamos então por fazer uma adaptação.

5) Crie uma situação que possa ser representada pelo gráfico 2 (ou parte dele), e explique quais características do gráfico te levaram a escolher essa situação.

Essa pergunta foi pensada para tentar entender se os alunos conseguem, observando as características que eles destacaram para esse gráfico, imaginar uma situação real ou inventada que fosse congruente ao gráfico, para assim trabalhar a conversão da linguagem gráfica em linguagem natural, procurando se expressar no sentido contrário ao habitualmente desenvolvido em sala de aula, onde em geral não se privilegia ou se considera a criação de hipóteses ou a expressão criativa, ao mesmo tempo que possa ser um desafio que os alunos encontrem uma situação que em todas as suas características se adapte a esse gráfico

6) Escreva uma situação que possa ser representado pela função $f(x) = 3x - 5$. *Por que você optou por essa situação? Faça o gráfico dela.*

Nessa atividade, a ideia era entender a relação dos alunos com a linguagem algébrica, assim, foi proposto que encontrassem o gráfico da função e criassem alguma situação em que ela seria um bom modelo de representação. Dessa forma, tentar entender suas ideias sobre a conversão da linguagem algébrica para a gráfica e a natural, essa última tendo as mesmas dificuldades previstas que na transformação dos gráficos em linguagem natural justamente pelo caráter de subjetividade que as conversões envolvendo linguagem natural possuem.

5 - Análise da atividade desenvolvida

A partir das discussões realizadas durante e depois da aplicação da atividade nas turmas, pudemos observar que a análise não poderia ser apenas quantitativa devido à algumas especificidades na condução das aulas pelos professores responsáveis e dos conteúdos já estudados pelos alunos, que certamente interferiram em suas respostas. Por exemplo, em uma das escolas, a resposta fornecida em uma das questões, ocorreu numa proporção muito diferente das outras duas escolas, o que refletiu a forma com que os alunos aprenderam o conteúdo, o que eles estavam vendo nas aulas e o que foi privilegiado pelo docente responsável.

Na pesquisa realizada por Duval (2006), as atividades eram aplicadas após uma sequência de aulas, mas isso não ocorreu no nosso caso. Por isso, é importante considerar essa heterogeneidade entre as escolas quando olhamos apenas para a quantidade de respostas em cada categoria, como geralmente acontece quando é feita uma avaliação por uma pessoa de fora daquele contexto escolar. Cada professor opta por priorizar parte do currículo conforme a realidade da sua prática docente.

Foi muito importante, portanto, o contato com os professores de matemática das turmas envolvidas, pois foi a partir da conversa com eles que essas peculiaridades puderam ser notadas e compreendidas. Quando os professores puderam justificar as escolhas realizadas a partir da condição das turmas e do modo como os anos escolares foram se desenrolando, uma vez que todos os professores pesquisados haviam ministrado aulas para as turmas em pelo menos um ano anterior.

Os estudantes solicitaram em vários momentos que explicássemos os enunciados das questões, pois não conseguiam entender o que era para ser feito. Às vezes a explicação era feita através da leitura conjunta, entre mim e o grupo, do texto apresentado, o que era suficiente para alguns alunos seguirem resolvendo a questão enquanto outros percebiam que não tinham a menor ideia de como começar a resolução. Em outros momentos, os alunos entendiam o enunciado, mas genuinamente tinham dúvidas quanto ao processo de resolução. Como o elemento pesquisado envolvia justamente as resolução que os alunos dariam às perguntas propostas, não podíamos explicar à eles como resolver, então optei por responder à essas dúvidas sempre com outras perguntas que pudessem ajudar a direcionar seus pensamentos, e percebi que os professores titulares também seguiam esse procedimento ao me ver fazendo.

As principais observações relacionadas a atividade aplicada estão descritas a seguir, juntamente com a tabela que indica o que os alunos responderam em cada pergunta, demonstradas separadamente por escola e no total.

1) Pedro foi à feira e comprou x pacotes de legumes de R$3,50 e pagou R$21. Quanto vale x? Explique sua resolução.

Tabela 5.1: resultados observados na pergunta 1

Resolução	A		B		C		Total	
Somou várias vezes 3,5 e/ou justificou com multiplicação	11	39,3%	24	44,4%	28	54,90%	63	47,4%
Divisão	8	28,6%	18	33,3%	10	19,61%	36	27,1%
Regra de três	5	17,9%	0	0,0%	3	5,88%	8	6,0%
Equação	2	7,1%	7	13,0%	9	17,65%	18	13,5%
Sem resposta conclusiva	1	3,6%	1	1,9%	1	1,96%	3	2,3%
Em branco	1	3,6%	4	7,4%	0	0,00%	5	3,8%
Total de respostas	28	100,0%	54	100,0%	51	100,00%	133	100%

Fonte: produzido pela autora

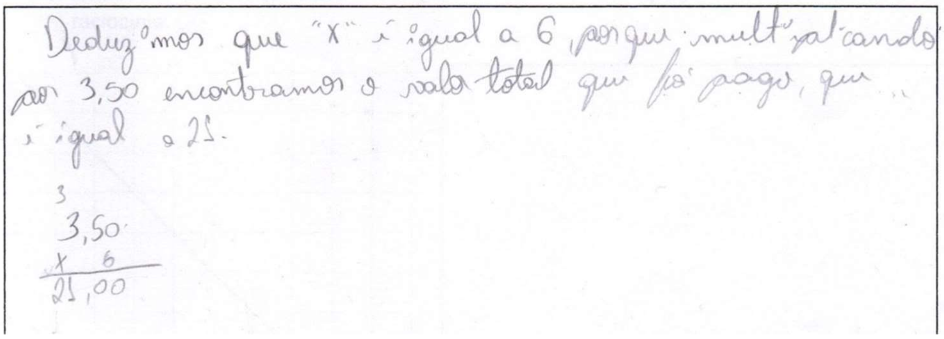
A primeira questão foi vista como muito simples pela maioria dos alunos, principalmente porque era possível resolver utilizando operações intuitivas, seja pelo seu contexto simples e familiar como a facilidade em operar com os números propostos, mesmo sendo decimais. A grande maioria dos alunos resolveu essa questão pelo que eles chamaram de "completar a multiplicação de cabeça", ou seja, descobrir, implicitamente, o valor que satisfaz$3,5x = 21$através da soma de diversas parcelas ou de testes com multiplicações por 3,5.

Alguns alunos resolveram por regra de três e outros dividiram $(21/3,5)$, alguns grupos indicaram que haviam efetuado $(3,5/21)$ e chegaram no mesmo resultado, indício da dificuldade que muitos alunos têm expressar seus pensamentos e seus argumentos que o levaram a concluir pela sua resposta. Em terceiro lugar, com 13% das respostas, foi escolhida a resolução por uma equação explicitamente.

É interessante ver que, na resolução da atividade, essa questão deu certo ânimo aos alunos, que sentiram ser possível resolver as perguntas da pesquisa através da constatação de que sabiam a primeira questão.

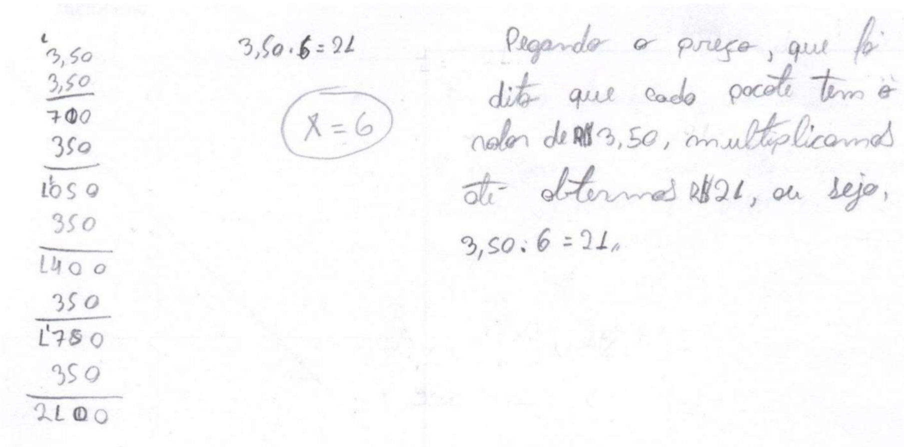
Também é importante observar a dificuldade que os alunos apresentam ao se expressar pelos símbolos algébricos, demonstrando que parte dos erros neste conteúdo se dá por erros na compreensão da linguagem na qual aquele conteúdo está sendo operado. Exemplos dessas respostas estão a seguir.

Figura 5.1.1: resolução apresentada, grupo da escola C



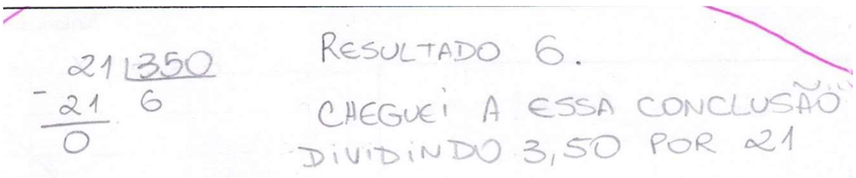
Fonte: reprodução de resposta coletada

Figura 5.1.2: resolução apresentada, grupo da escola C



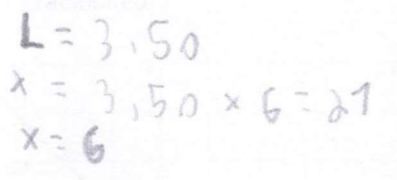
Fonte: reprodução de resposta coletada

Figura 5.1.3: resolução apresentada, grupo da escola B



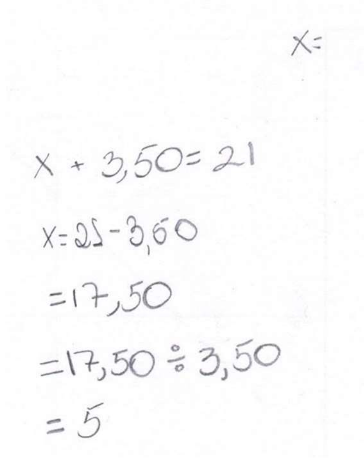
Fonte: reprodução de resposta coletada

Figura 5.1.4: resolução apresentada, grupo da escola A



Fonte: reprodução de resposta coletada

Figura 5.1.5: resolução apresentada, grupo da escola C



Fonte: reprodução de resposta coletada

Nas figuras 5.1.1 a 5.1.4, as respostas estão corretas, mas com alguma dificuldade na expressão das ideias, por vezes utilizando termos errados para explicar seus pensamentos (multiplicação no lugar de soma) ou utilizando simbologia confusa e incorreta do ponto de vista matemático. Na figura 5.1.5 ocorrem erros na montagem (conversão) e na resolução da equação (transformação).

2) Desenhe um gráfico que represente a seguinte situação: um carro sai de uma cidade até outra com velocidade constante, percorrendo 240 km numa viagem que demora 3h. Faça um gráfico de tempo (t) por espaço (S), e explique como você chegou a esse desenho.

Tabela 5.2: resultados observados na pergunta 2

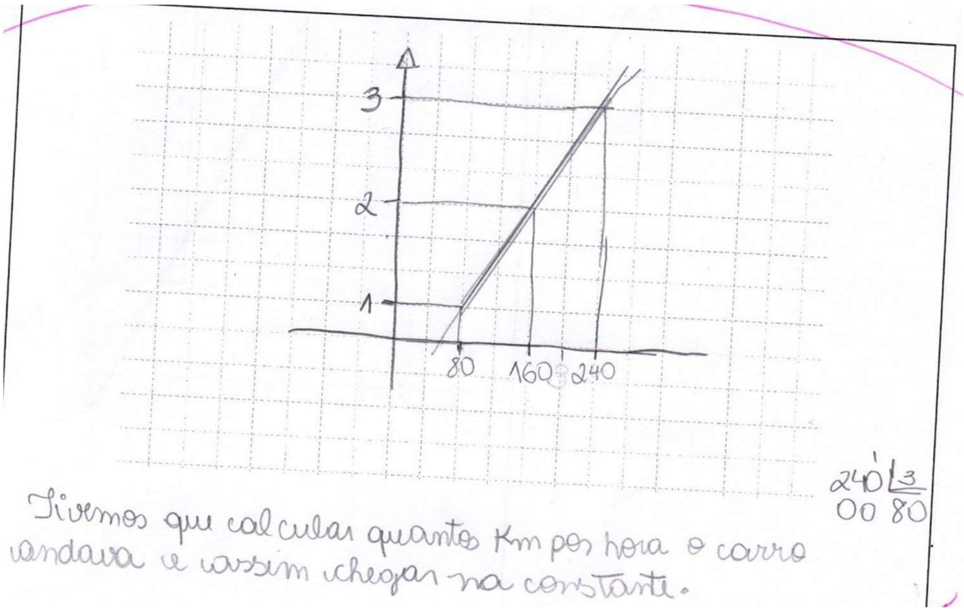
Resolução	A		B		C		Total	
Marcou os pontos das horas cheias e traçou	4	14,3%	21	38,9%	5	9,80%	30	22,6%
Marcou os pontos das horas cheias	1	3,6%	0	0,0%	4	7,84%	5	3,8%
Marcou o ponto final da viagem e traçou corretamente	4	14,3%	14	25,9%	6	11,76%	24	18,0%
Traçou certo, mas indicou os pontos errados	3	10,7%	4	7,4%	0	0,00%	7	5,3%
Calculou coeficiente angular (v)	0	0%	0	0%	7	13,73%	7	5,3%
Calculou coeficiente e também fez a reta	0	0%	0	0%	3	5,88%	3	2,3%
Marcou só o ponto (240;3)	5	17,9%	4	7,4%	4	7,84%	13	9,8%
Traçou uma reta decrescente	6	21,4%	3	5,6%	12	23,53%	21	15,8%
Reta que representa uma função crescente	2	7,1%	0	0,0%	0	0,00%	2	1,5%
Inconclusivo	1	3,6%	0	0,0%	1	1,96%	2	1,5%
Em branco	2	7,1%	8	14,8%	5	9,80%	15	11,3%
Gráfico de barras	0	0%	0	0%	2	3,92%	2	1,5%
Esquema de representação	0	0%	0	0%	2	3,92%	2	1,5%
Total	28	100,0%	54	100%	51	100%	133	100%

(Fonte: produzido pela autora)

Na segunda questão, montar o gráfico se demonstrou bem mais difícil do que o esperado por mim, apesar de grande parte dos alunos compreender que se tratava de uma reta. 45,9% chegou ao resultado correto, marcando os pontos referentes às horas cheias do trajeto e traçando a reta a partir deles.

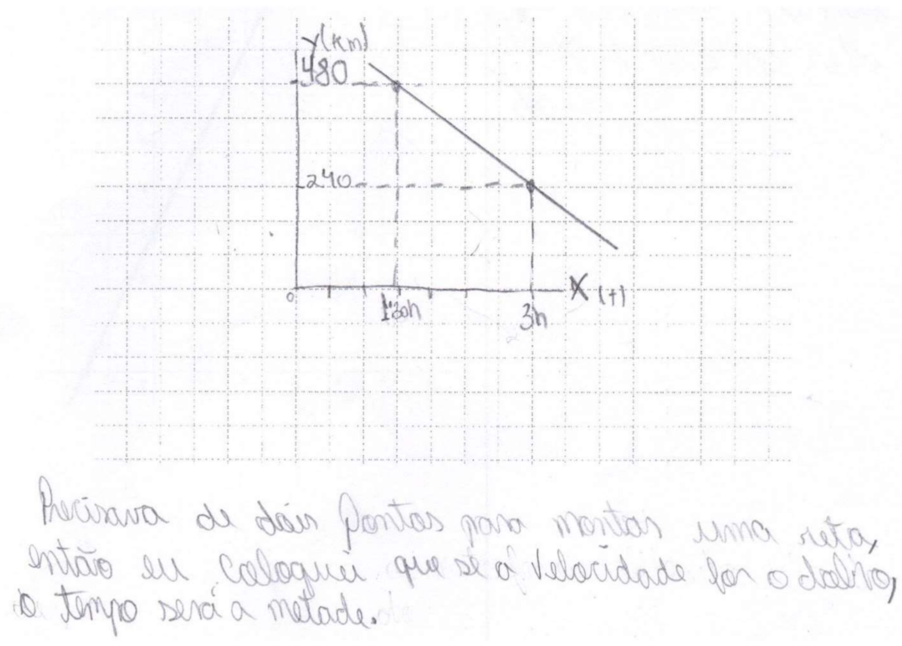
Dentre os erros, algumas dificuldades com a preservação da escala (como na figura 5.2.1), mas principalmente uma confusão entre as grandezas envolvidas: espaço, tempo e velocidade, que era também o coeficiente angular da reta. Na figura 5.2.2, por exemplo, o aluno descreve "precisava de dois pontos para montar uma reta, então eu coloquei que se a velocidade for o dobro, o tempo será metade", o que do ponto de vista físico está correto, mas vem de uma interpretação errada do enunciado apresentado: aqui, os alunos consideraram que o carro tem velocidade 240, mesmo que o eixo y indique estar em quilómetros, portanto para um mesmo percurso, se a velocidade dobra, o tempo de viagem diminui pela metade, o que explica os pontos assinalados proporcionalmente (480,1h30) e (240,3h).

Figura 5.2.1: resolução apresentada, grupo da escola A



Fonte: reprodução de resposta coletada

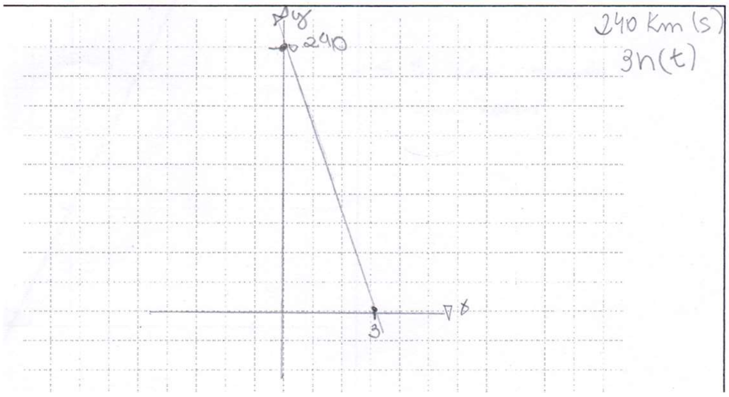
Figura 5.2.2: resolução apresentada, grupo da escola A



Fonte: reprodução de resposta coletada

Além disso, 15,8% dos alunos traçaram a reta que passa pelos pontos (0;3) e (240;0), como podemos observar no exemplo da figura 5.2.3. Além da falta de criticidade sobre sua resposta, por se tratar de uma função decrescente em uma situação onde as grandezas são diretamente proporcionais, uma possível explicação para essa resposta é o conhecimento impreciso sobre a representação dos pontos num plano cartesiano, que possui duas coordenadas. Em diversos momentos os alunos se referiam aos pontos como apenas um número, demonstrando não compreender como esse objeto geométrico pode ser utilizado para indicar localização num plano ou espaço a partir de suas coordenadas, o que também foi possível observar nas suas respostas escritas em outras questões, reforçado pela compreensão e domínio parciais sobre os sistemas de representação da linguagem algébrica desse objeto.

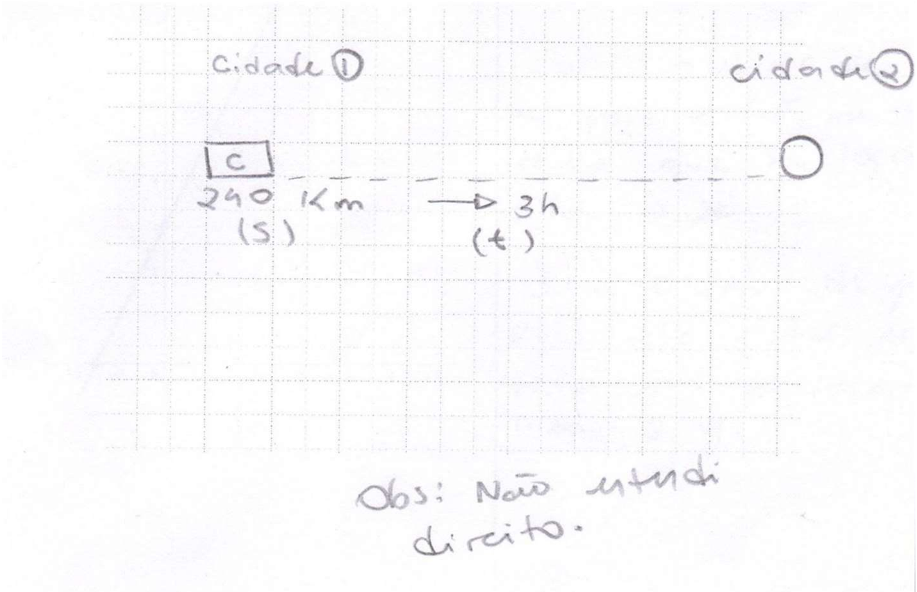
Figura 5.2.3: resolução apresentada, grupo da escola B



Fonte: reprodução de resposta coletada

Na escola C, a atividade foi desenvolvida com estudantes do 1º ano do Ensino Médio que, seguindo a professora comunicou, ainda não haviam estudado a construção de gráficos de funções naquela série, então alguns alunos não conseguiram realizar a tarefa proposta. Por conta disso, surgiram alguns desenhos esquemáticos do trajeto, como apresentado na figura (5.2.4) abaixo.

Figura 5.2.4: resolução apresentada, grupo da escola C

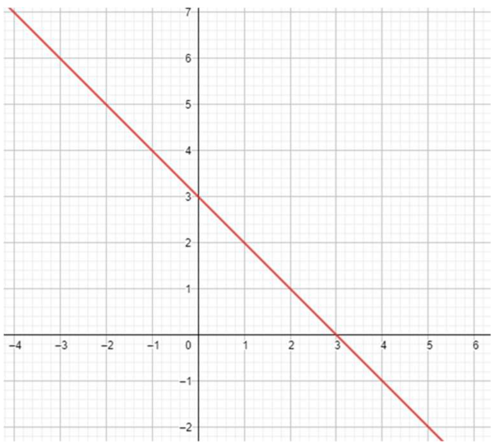


Fonte: reprodução de resposta coletada

Outros alunos, porém, como haviam aprendido sobre a construção de gráficos no ciclo anterior, conseguiram realizar o que foi solicitado.

3) Escreva a função que descreve o gráfico abaixo. Não esqueça de deixar explícito seu raciocínio

Figura 5.3: gráfico 1



Fonte: produzido pela autora

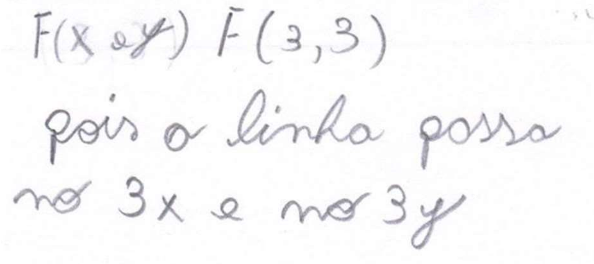
Tabela 5.3: resultados observados na pergunta 3

Resolução	A		B		C		Total	
Em branco	7	25,0%	22	40,7%	10	19,6%	39	29,3%
x=3 e y=3	2	7,1%	1	1,9%	5	9,8%	8	6,0%
(3;3) pois passa pelos pontos 3 e 3	1	3,6%	1	1,9%	12	23,5%	14	10,5%
Notação errada 3(y)=x; x,f=3,3, etc					4	7,8%	4	3,0%
f(x)=algo envolvendo 3	10	35,7%	11	20,4%	12	23,5%	33	24,8%
Método certo com pontos errados	1	3,6%	0	0,0%	1	2,0%	2	1,5%
Identificou pontos certos	4	14,3%	3	5,6%	3	5,9%	10	7,5%
$f(x) = -x + 3$	3	10,7%	16	29,6%	4	7,8%	23	17,3%
Identificou que é decrescente	3	10,7%	10	18,5%		0,0%	13	9,8%
Identificou coef. linear		0,0%	4	7,4%		0,0%	4	3,0%
Identificou coef. angular =-b/a	1	3,6%	4	7,4%		0,0%	5	3,8%
Identificou que “vai caindo de 1 em 1”		0,0%	3	5,6%	3	5,9%	6	4,5%
total	28	100,0%	54	100,0%	51	100,0%	133	100,0%

Fonte: produzido pela autora

Na terceira questão, dentre os alunos que responderam, o maior grupo disse que $f(x) = 3x + 3$ou outras leis envolvendo o número 3, pois segundo esses alunos, são estes números que aparecem no gráfico uma vez que o gráfico cruza o eixo x em $(3; 0)$e o eixo y em $(0; 3)$. Alguns alunos responderam que $f(x) = (3; 3)$, pois é o ponto pelo qual essa reta passa ou, como na observado na imagem 5.3.1, os alunos concluem “F(3,3) pois a linha passa no 3x e no 3y”. Por raciocínio semelhante, outros alunos disseram que $x = 3ey = 3$, esses dois grupos somados são 16,5% dos pesquisados, sendo que 17,3% deles responderam corretamente $f(x) = -x + 3$, por diversos métodos.

Figura 5.3.1: resolução apresentada, grupo da escola C

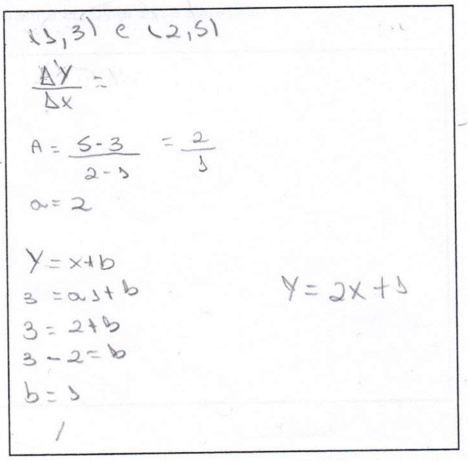


Fonte: reprodução de resposta coletada.

Foi possível observar, então, que os alunos conseguiam identificar os pontos pelos quais a reta passa, mas se confundiam quando da expressão de sua observação; embora a grande maioria dos alunos compreenda que, num sistema cartesiano, “o x vem primeiro” (fala de uma aluna da escola B), a comunicação formal, através da identificação de pontos com dupla coordenada se mostrou um desafio.

Em alguns casos, como na figura 5.3.2, o aluno realizou o procedimento correto para encontrar a lei de formação dessa reta, mas como havia selecionado pontos errados, a resposta não foi correta.

Figura 5.3.2: resolução apresentada, grupo da escola A


(1,3) e (2,5)

$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

$A = \frac{5-3}{2-1} = \frac{2}{1}$

$a = 2$

$y = x + b$

$3 = a1 + b$

$3 = 2 + b$

$3 - 2 = b$

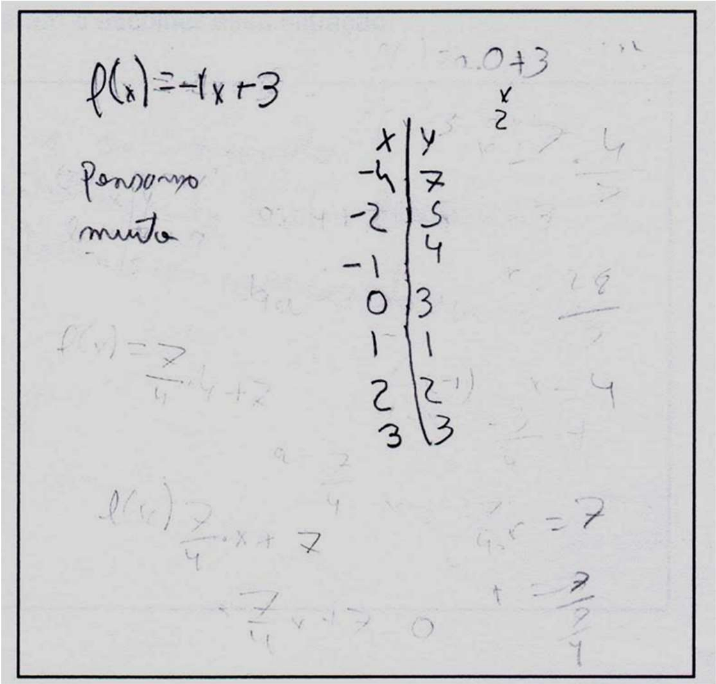
$b = 1$

$y = 2x + 1$

Fonte: reprodução de resposta coletada.

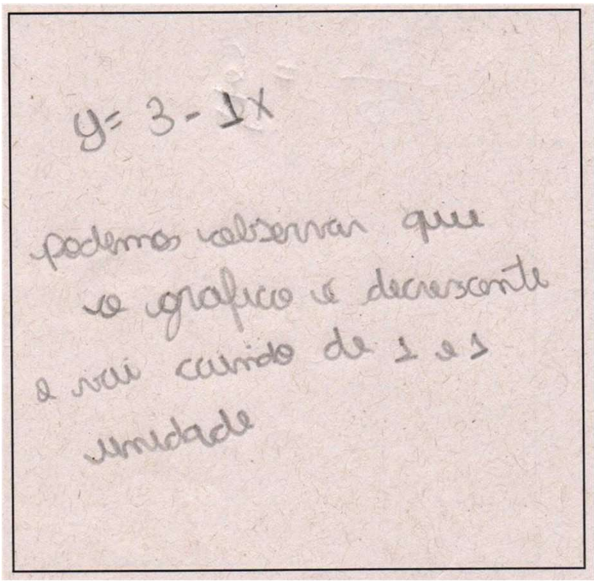
Poucos alunos (4,5%) conseguiram observar a regularidade da função, como por exemplo que ela “vai caindo de 1 em 1” unidade. A figuras 5.3.3 e 5.3.4 mostram dois exemplos de resolução que não utilizam os procedimentos formais que são em geral estudados para a obtenção da lei da função a partir do gráfico. Na primeira, é possível perceber uma grande quantidade de anotações mal apagadas cujo conteúdo não é possível identificar com clareza, mas que é bastante coerente com a justificativa dada, “pensamos muito”.

Figura 5.3.3: resolução apresentada, grupo da escola C



Fonte: reprodução de resposta coletada

Figura 5.3.4: resolução apresentada, grupo da escola B



Fonte: reprodução de resposta coletada

A maioria dos grupos que acertou a equação que descreve a reta chegou ao resultado recorrendo a esse tipo de método intuitivo de resolução, e ao mesmo tempo que se sentiam inseguros quanto a validade de sua resolução, como procedimento não formal, tinham muita dificuldade em explicar seu raciocínio, o que indica que seria interessante aprimorar esse tipo de pensamento lógico, aplicando situações didáticas que aprimoram as habilidades e o validam como ferramenta de aprendizagem.

4) Descreva o gráfico 2 (figura 4.3)

Tabela 5.4: resultados observados na pergunta 4

Questão 4	A		B		C		Total	
Em branco	5	17,9%	8	14,8%	4	7,8%	17	13,0%
É exponencial	0	0,0%	1	1,9%	0	0,0%	1	0,8%
É 1º grau ou uma reta	1	3,6%	7	13,0%	16	31,4%	24	18,2%
y=3 e x=-2 ou x=-1,5	0	0,0%	14	25,9%	3	5,9%	17	13,0%
Passa pelo -2x e pelo 3y	0	0,0%	4	7,4%	0	0,0%	4	3,1%
f(x)=2x+3 ou outras leis envolvendo esses números	8	28,6%	11	20,4%	4	7,8%	23	17,7%
Passa pelo (-2;3)	2	7,1%	1	1,9%	1	2,0%	4	3,1%
x= alguma combinação de -2 e 3	0	0,0%	3	5,6%	11	21,6%	14	10,6%
Decrescente	0	0,0%	1	1,9%	0	0,0%	1	0,8%
Crescente	3	10,7%	30	55,6%	11	21,6%	45	33,6%
Calculou a lei (errado)	1	3,6%	0	0,0%	0	0,0%	1	0,8%
Parte do -2x	0	0,0%	2	3,7%	0	0,0%	2	1,5%
Vai do negativo para o positivo (ou da esquerda para a direita)	3	10,7%	2	3,7%	1	2,0%	6	4,6%
y>0 e x<0	1	3,6%	2	3,7%	0	0,0%	3	2,3%
“Passa pelo -2 horizontal e cresce até a reta do ponto 10, passando pelo 3 vertical”	3	10,7%	0	0,0%	8	15,7%	11	8,4%
A cada 0,5 no eixo x, cresce 1 no eixo y	1	3,6%	0	0,0%	1	2,0%	2	1,5%

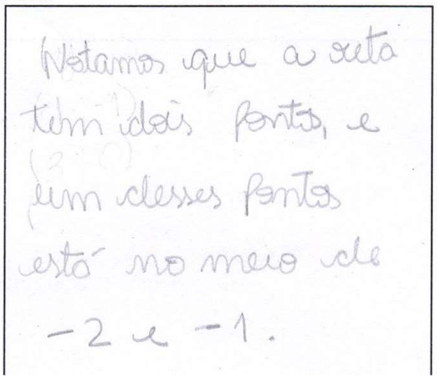
Fonte: produzido pela autora

Na quarta questão fizemos uma análise considerando que os alunos poderiam se enquadrar em mais do que uma opção, dependendo da quantidade de elementos que eles destacassem em sua descrição.

A característica com maior incidência foi “crescente”, com 44 respostas, e também ser uma função de 1º grau ou uma reta, 24 respostas. No total, 37 respostas continham alguma simbologia do tipo $f(x) =\ldots$ ou $x =\ldots$, propondo leis de formação envolvendo os números -2 e 3.

A quantidade de respostas que associava a função com o número -2, pelo fato da reta supostamente passar pelo ponto (-2;0) nos faz acreditar que talvez os alunos tenham pouca experiência com a manipulação de números que estão fora do conjunto dos inteiros. Outro indício dessa pouca familiarização está no exemplo abaixo (figura 5.4.1), onde a aluna identifica que um dos pontos que a reta "tem" está no meio de -2 e -1, mas não identifica qual.

Figura 5.4.1: resolução apresentada, grupo da escola C

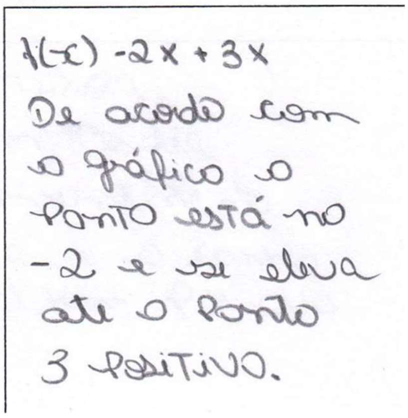


Fonte: reprodução de resposta coletada

No recorte acima fica clara a compreensão parcial que a aluna possui do conceito de reta, pois não concebe a imagem apresentada como representação de um objeto matemático contínuo e infinito, uma vez que só considera os pontos das interseções com os eixos coordenados.

Outras caracterizações atribuídas ao gráfico diziam respeito à seu crescimento, onde observamos uma interpretação dinâmica da reta, que é formada pela movimentação de um ponto que atravessa o plano cartesiano. Seis grupos escreveram que a função vai do negativo para o positivo ou da esquerda para a direita, enquanto 11 grupos descrevem que o gráfico percorre um caminho do tipo observado na resposta abaixo "o ponto está no -2 e se eleva até o ponto 3 positivo", o que também aponta uma compreensão imprecisa dos conceitos de ponto no gráfico e de função crescente, o que também impede uma maior precisão de linguagem na explicação.

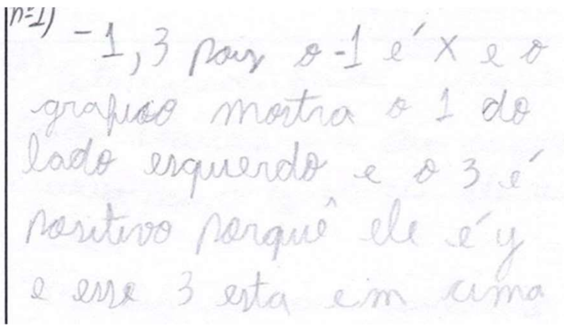
Figura 5.4.2: resolução apresentada, grupo da escola A


f(-x) -2x + 3x
De acordo com
o gráfico o
PONTO está no
-2 e se eleva
ate o ponto
3 POSITIVO.

Fonte: reprodução de resposta coletada.

Na resposta abaixo (figura 5.4.3), a descrição dada é “-1,3 [notação utilizada para um par ordenado], pois o -1 é x e o gráfico mostra o 1 do lado esquerdo, e o 3 é positivo por que ele é y e esse 3 está em cima”. Aqui, o aluno demonstra identificar a variável atribuída a cada eixo e seu sentido de crescimento, sendo os valores relacionados a pontos de cruzamento do gráfico com os eixos, mas também se confunde de forma a demonstrar compreensão parcial.

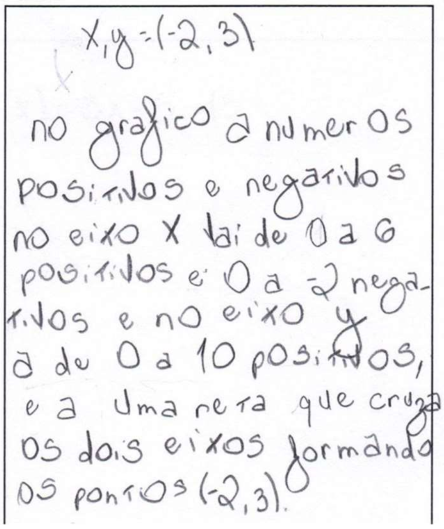
Figura 5.4.3: resolução apresentada, grupo da escola C


n=1) -1,3 pois o -1 é x e o
grafico mostra o 1 do
lado esquerdo e o 3 é
positivo porquê ele é y
e esse 3 esta em cima

Fonte: reprodução de resposta coletada.

Na imagem abaixo podemos observar uma resposta em duas partes, a aluna escreve $x, y = (-2{,}3)$ na parte de cima, e depois explica “no gráfico a números positivos e negativos no eixo x vai de 0 ao 6 positivos e 0 a -2 negativos e no eixo y a de 0 a 10 positivos, e a uma reta que cruza os dois eixos formando os pontos (-2,3)”. Aqui, observamos uma aplicação explícita de um conhecimento impreciso, como já pudemos perceber em outras respostas, que não identifica a imagem apresentada como um recorte do gráfico, que, por definição, se estende infinitamente, enquanto os números de referência dos eixos coordenados são confundidos com números do gráfico, passando a ser todos relevantes na observação da função, enquanto o par ordenado destacado não pertence de fato à essa reta.

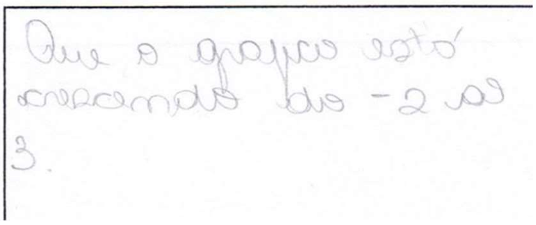
Figura 5.4.4: resolução apresentada, grupo da escola C


X,y=(-2,3)
no grafico à numeros
positivos e negativos
no eixo X vai de 0 a 6
positivos e 0 a -2 nega-
tivos e no eixo y
à de 0 a 10 positivos,
e a uma reta que cruza
os dois eixos formando
os pontos (-2,3).

Fonte: reprodução de resposta coletada.

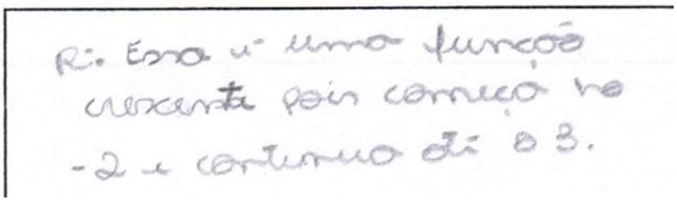
Abaixo temos a resposta de dois grupos, que descrevem, na figura 5.4.5, que o gráfico cresce entre o -2 e o 3, e na figura 5.4.6, a função é crescente pois começa no -2 e continua até o 3.

Figura 5.4.5: resolução apresentada, grupo da escola A


Que o grafico está
crescendo do -2 ao
3.

Fonte: reprodução de resposta coletada.

Figura 5.4.6: resolução apresentada, grupo da escola A


R: Essa é uma função
crescente pois começa no
-2 e continua até o 3.

Fonte: reprodução de resposta coletada.

São exemplos de uma característica que foi possível perceber nas aplicações, muitos alunos consideram apenas o gráfico no intervalo entre as intersecções com os eixos, sendo assim muitos dos gráficos desenhados nas outras questões estavam contidos em apenas um dos quadrantes. Da mesma forma como na resposta anterior, não possuem a discernimento quanto ao fato de a representação apresentada ser apenas parte de um gráfico que é contínuo e infinito, além de uma utilização inexata da propriedade de ser crescente.

5) Crie uma situação que possa ser representada pelo gráfico 2 (ou parte dele), e explique quais características do gráfico te levaram a escolher essa situação.

Tabela 5.5: resultados observados na pergunta 5

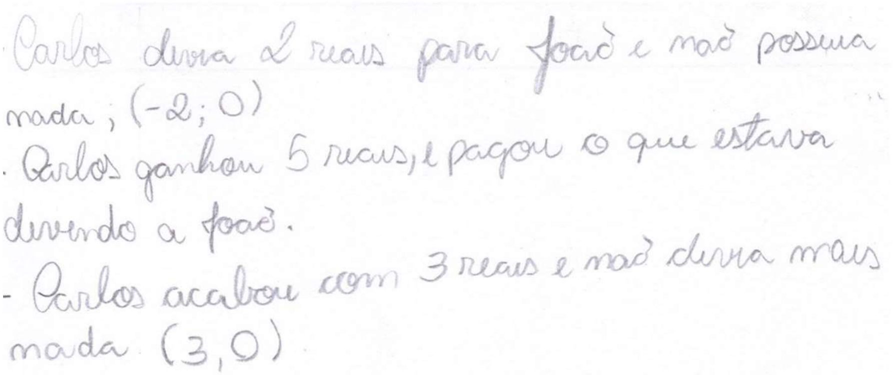
Questão 5	A		B		C		Total	
Em branco	15	53,6%	32	59,3%	20	39,2%	67	50,4%
Não é possível avaliar		0,0%	2	3,7%		0,0%	2	1,5%
Situação crescente mas sem sentido		0,0%	1	1,9%	1	2,0%	2	1,5%
Crescente com sentido mas não preciso	4	14,3%	1	1,9%	6	11,8%	11	8,3%
Crescente e adequado (proporção)	3	10,7%	8	14,8%	2	3,9%	13	9,8%
Situação envolvendo -2 (ou 2) e 3	5	17,9%	6	11,1%	8	15,7%	19	14,3%
Proporção certa mas não é função		0,0%	1	1,9%		0,0%	1	0,8%
x=tempo e coisas adiantadas com proporção adequada	1	3,6%	3	5,6%		0,0%	4	3,0%
Pergunta matemática (com ou sem sentido)		0,0%		0,0%	13	25,5%	13	9,8%
Carro de ré		0,0%		0,0%	1	2,0%	1	0,8%
Total	28	100,0%	54	100,0%	51	100,0%	133	100,0%

Fonte: produzido pela autora

A maior parte dos alunos deixou essa questão em branco e, dentre os que responderam, poucos deixaram alguma explicação de sua resolução. Acredito que foi uma questão difícil principalmente por ser diferente de perguntas que os alunos geralmente tem que responder. Talvez pela complexidade de compreender o que era pedido, muitos alunos tenham pulado e preferido responder apenas a pergunta 6, que tem menos respostas em branco do que essa.

Foram muito comuns situações envolvendo os números 3 e -2 ou 2, como no exemplo abaixo, em que o aluno tenta justificar utilizando os pares ordenados.

Figura 5.5.1: resolução apresentada, grupo da escola C


Carlos devia 2 reais para João e não possuia nada ; (-2; 0)
. Carlos ganhou 5 reais, e pagou o que estava devendo a João.
- Carlos acabou com 3 reais e não devia mais nada (3,0)

Fonte: reprodução de resposta coletada.

É possível relacionar o gráfico apresentado a uma situação de saldo (eixo x) por ganho de uma determinada atividade (eixo y). Inicialmente se deve 1,5 (saldo -1,5) e, conforme uma certa atividade produtiva acontece, da qual obtenho metade da arrecadação, o saldo aumenta, chegando a zero quando ganho vale 3, e assim por diante.

No exemplo observado abaixo, o aluno não relaciona nenhuma característica de continuidade na alteração dos valores em sua situação, tanto que seu saldo aumenta num evento esporádico, enquanto quando tratamos de funções no plano cartesiano, os pontos estão relacionados por uma lei de dependência entre os valores.

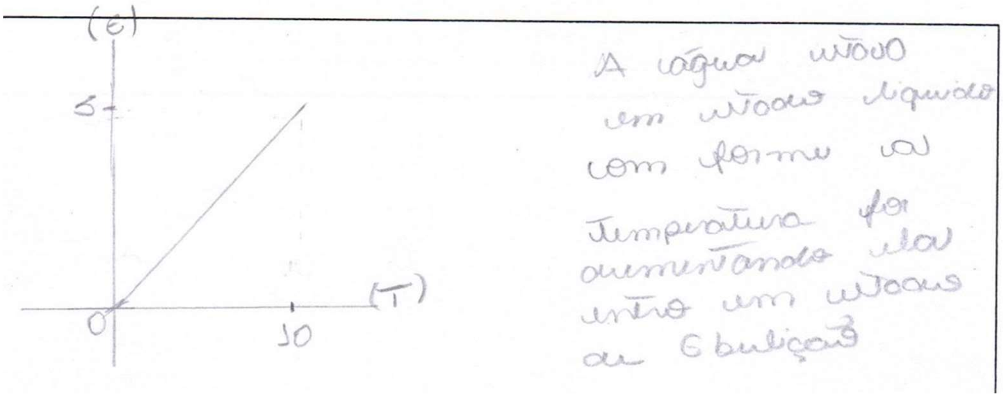
Esse exemplo corrobora com a afirmação de Barbosa, que expõe

> "um mesmo fato é suscetível de interpretação por meio de diferentes códigos, e, ainda nesse particular, o código linguístico se mostra mais abrangente, pois mesmo que a codificação de uma mensagem não tenha significante linguístico, seu significado e sua decodificação poderão sê-los" (Barbosa, 1981, p. 25)

Isso porque o aluno utiliza uma representação que não é a linguagem algébrica formal na representação, enquanto traduz seu pensamento estruturado em forma de símbolo para a linguagem natural, que o auxilia a relacionar e a decodificar a mensagem como um todo.

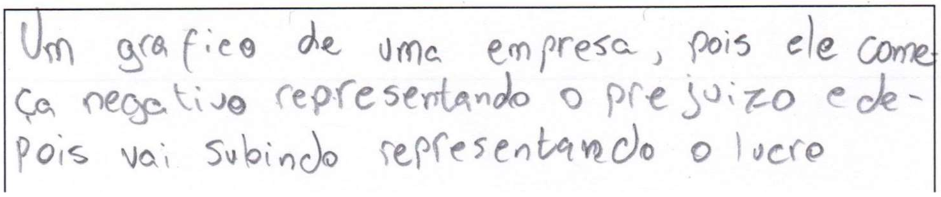
Outra solução bastante comum foram situações que se referiam à natureza crescente do gráfico, mesmo que a proporção entre as variáveis relacionadas não estivesse correta. Na figura abaixo 5.5.2, um exemplo, onde o grupo diz que “a água estava em estado líquido conforme a temperatura for aumentando, ela entra em estado de ebulição” e apresenta um gráfico crescente, situação que não associa nenhum dos valores ou relação entre as variáveis que aparece no gráfico de referência. O grupo da resolução apresentada na figura 5.5.3 é um exemplo de um conjunto de respostas que, além de observar a característica crescente da função, também percebe que ela não está contida totalmente no primeiro quadrante, por ela “começar no negativo” faz sentido que a situação adequada tenha relação com valor negativos, nesse caso representando o prejuízo de uma empresa.

Figura 5.5.2: resolução apresentada, grupo da escola A



Fonte: reprodução de resposta coletada.

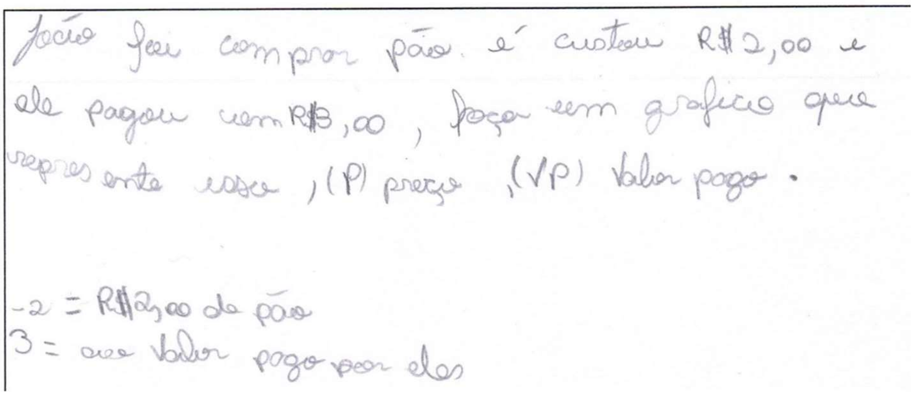
Figura 5.5.3: resolução apresentada, grupo da escola C



Fonte: reprodução de resposta coletada.

Aqui (figura 5.5.4) o grupo relacionou os valores vistos no gráfico com uma situação-problema que não indica continuidade nem a relação entre as quantidades, e pedem que se faça o gráfico que se represente essa situação, sendo os eixos o preço do pão e o valor pago no total. Provavelmente baseados na segunda questão, o gráfico pedido não pode ser realizado com base nas informações apresentadas.

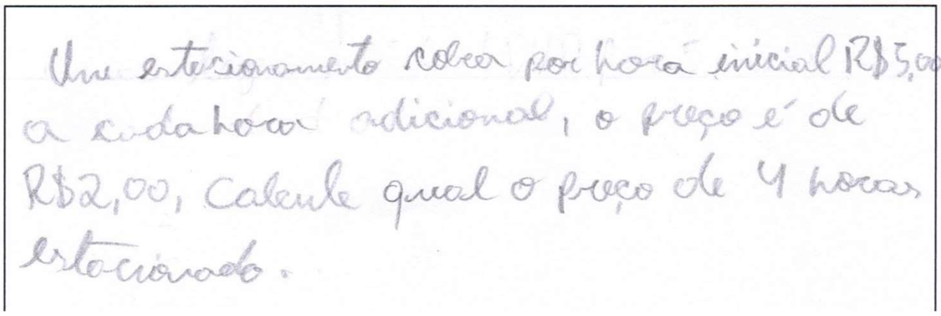
Figura 5.5.4: resolução apresentada, grupo da escola B


João foi comprar pão. e custou R$ 2,00 e ele pagou com R$ 3,00, faça um gráfico que represente esse, (P) preço (VP) valor pago.

-2 = R$ 2,00 do pão
3 = ao valor pago por eles

Fonte: reprodução de resposta coletada.

Figura 5.5.5: resolução apresentada, grupo da escola C


Um estacionamento cobra por hora inicial R$ 5,00 a cada hora adicional, o preço é de R$ 2,00, Calcule qual o preço de 4 horas estacionado.

Fonte: reprodução de resposta coletada.

Na figura 5.5.5, um exemplo de grupo que conseguiu realizar parcialmente a tarefa proposta, uma vez que a situação além de se adequar à característica crescente do gráfico, tinha outros pontos correspondentes, nas horas cheias da parte positiva do eixo x. A questão não solicitava que fosse criada uma situação-problema, um enunciado de contexto com uma pergunta sobre a situação, mesmo assim muitos grupos elaboraram assim sua resposta para esse item, como é o caso aqui.

6) Escreva uma situação que possa ser representado pela função $f(x) = 3x - 5$. Por que você optou por essa situação? Faça o gráfico dela.

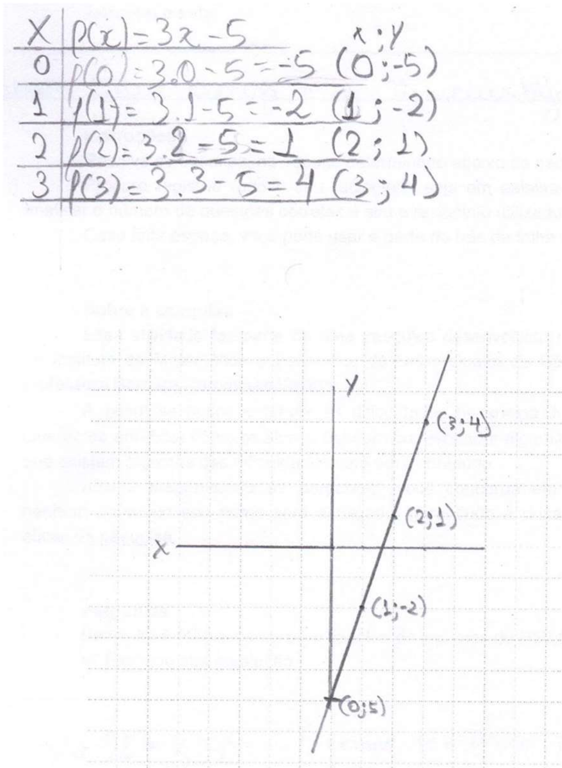
Tabela 5.6: resultados observados na pergunta 6

Questão 6 (gráfico)	A		B		C		Total	
Reta que representa uma função crescente		0,0%	1	1,9%		0,0%	1	0,75%
f(x)=x		0,0%		0,0%	1	2,0%	1	0,75%
Atribuiu valores para determinar os pontos	3	10,7%	10	18,5%	2	3,9%	15	11,28%
Calculou pontos errados		0,0%	3	5,6%	3	5,9%	6	4,51%
Calculou certo e marcou errado		0,0%		0,0%	6	11,8%	6	4,51%
Calculou coeficiente =-b/a		0,0%	7	13,0%		0,0%	7	5,26%
Acertou o gráfico calculando os pontos	3	10,7%	9	16,7%	10	19,6%	22	16,54%
Ligou (0;-5) e (3;0)	8	28,6%	4	7,4%	5	9,8%	17	12,78%
Ligou (0;0) com (3;-5)		0,0%		0,0%	5	9,8%	5	3,76%
Marcou só um ponto	3	10,7%	1	1,9%	1	2,0%	5	3,76%
Resposta divergente		0,0%	1	1,9%	0	0,0%	1	0,75%
Utilizou métodos de determinação do gráfico para equações do segundo grau (delta, vértice, etc)	7	25,0%	0	0,0%	0	0,0%	7	5,26%
Em branco	4	14,3%	18	33,3%	18	35,3%	40	30,08%
Total	28	100,0%	54	100,0%	51	100,0%	133	100,0%

Fonte: produzido pela autora

Nessa questão não obtivemos respostas suficientes para analisar a parte que solicitava a elaboração de uma situação cotidiana com comportamento semelhante ao da função, por isso decidimos não classificá-las numericamente, ao mesmo tempo que muitas das observações dessa parte da resposta são semelhantes às destacadas na questão 5. Já quanto à elaboração do gráfico, pudemos observar características semelhantes à questão 2, que também solicitava que se realizasse uma conversão em que o sistema semiótico final é a linguagem gráfica.

Figura 5.6.1: resolução apresentada, grupo da escola C

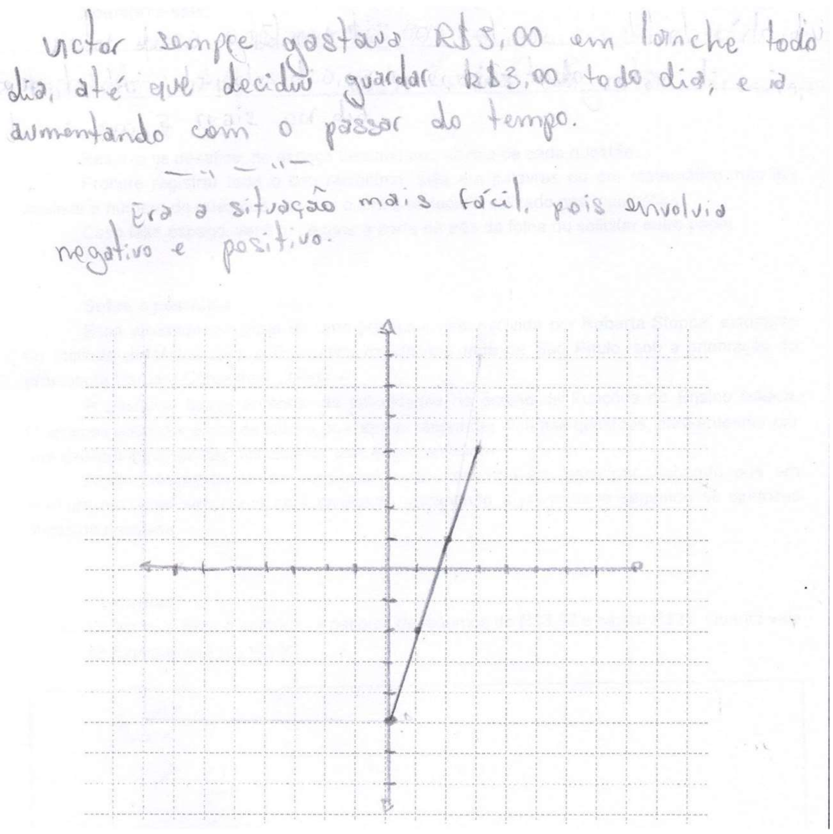


Fonte: reprodução de resposta coletada.

Dentre os alunos que se aproximaram da resposta correta, tivemos 15 (11,3%) grupos cuja resposta utiliza a lei fornecida para determinar pares ordenados, atribuindo valores para uma variável e calculando a outra coordenada corretamente, além disso, outros 22 (16,5%) grupos desenharam o gráfico corretamente a partir do cálculo de pares ordenados, como na imagem 5.6.1 acima, enquanto 5 (3,8%) respostas calculam corretamente apenas 1 ponto, impedindo a determinação de uma reta.

Na imagem abaixo, podemos observar que a parte desenhada do gráfico está correta, embora seja possível dizer que a reta está incompleta, uma vez que se limita aos quadrantes 1 e 4, e em relação à situação proposta é possível observar uma noção de continuidade, pois o grupo coloca que “ia aumentando com o passar do tempo”, porém escolhe os valores que são os parâmetros apresentados na expressão algébrica dessa função, justificando que “envolvia negativo e positivo”.

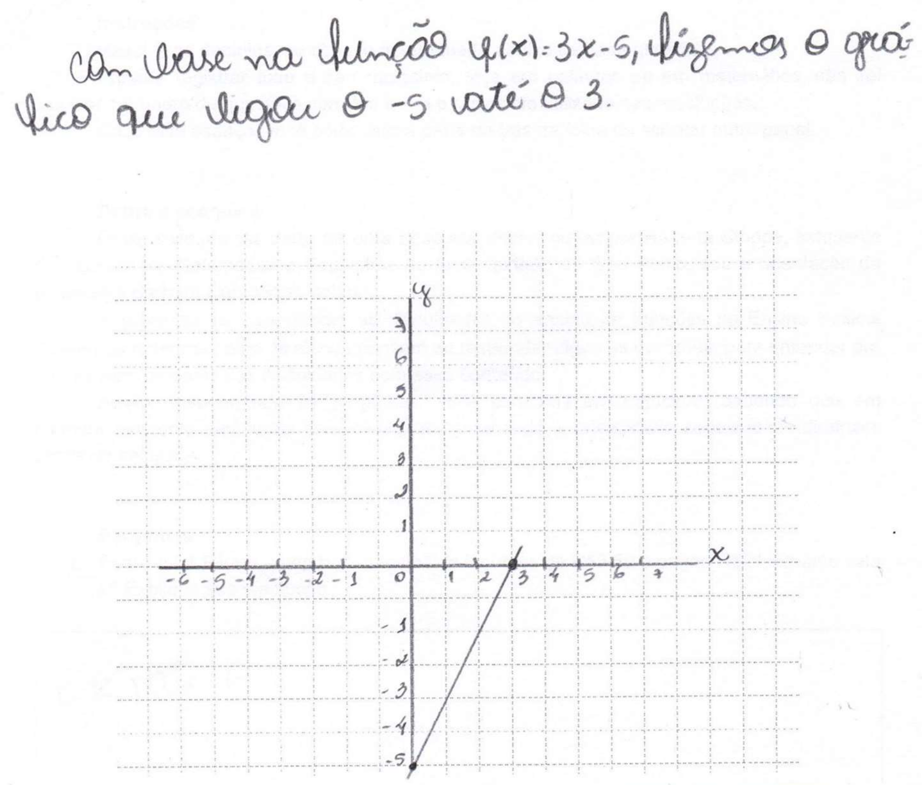
Figura 5.6.2: resolução apresentada, grupo da escola A



Fonte: reprodução de resposta coletada.

Uma resposta muito comum na construção do gráfico foi a função decrescente que atravessa (0;-5) e (3;0), também justificada por serem esses os parâmetros explícitos pela lei da função, que foi a resolução de 17 grupos, enquanto outros 5 grupos traçaram uma reta que representa uma função crescente, passando por (3;-5) e pela origem. Abaixo, a reprodução da resposta de um desses grupos, que diz estar ligando o -5 até o 3, sem explicar como foi determinado a qual eixo pertence cada valor. Posteriormente, quando foram questionados sobre sua resposta, durante a discussão feita com a turma, foi justificado oralmente que “na fórmula, o 3 está com o x, então ele tem que estar no eixo x”

Figura 5.6.3: resolução apresentada, grupo da escola A



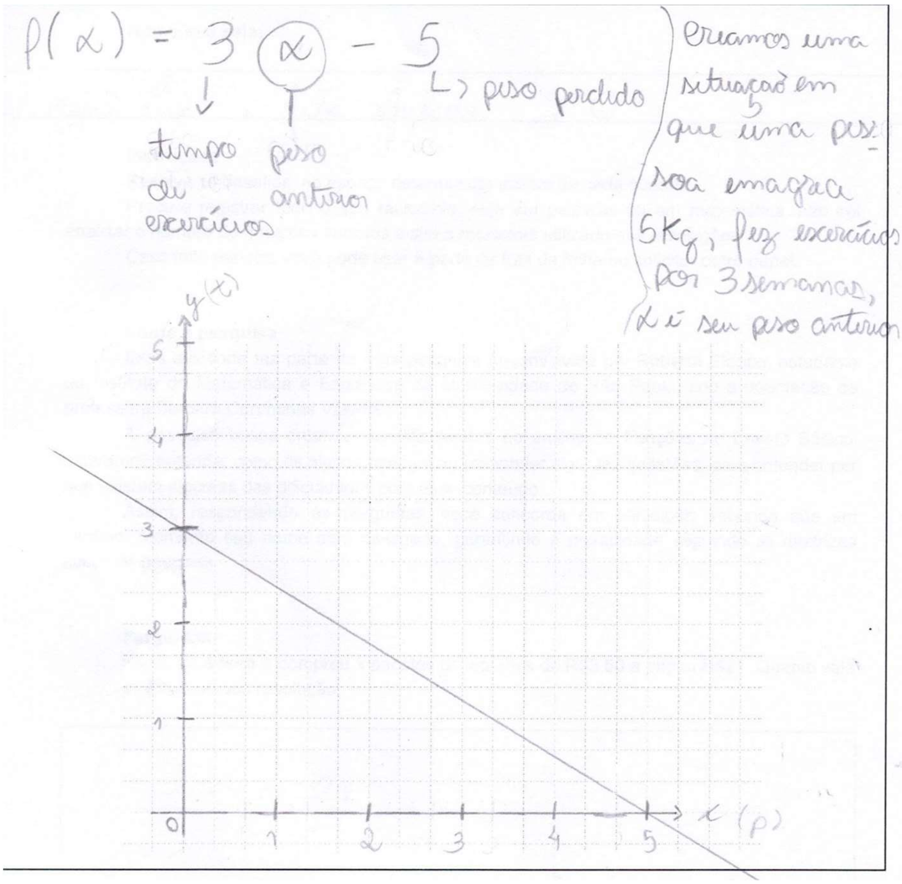
Fonte: reprodução de resposta coletada.

No exemplo abaixo, figura 5.6.4, observamos que, além da confusão quanto aos coeficientes da reta como no exemplo anterior, uma vez que as interseções com os eixos se dão nos pontos em que uma das coordenadas é parâmetro da função, o aluno tenta justificar a escolha da sua situação através de atribuir significados incoerentes aos símbolos da equação.

Por exemplo, uma função que relaciona emagrecimento por tempo de exercício não tem como variável independente, a, o peso anterior ao programa de perda de peso. Assim, em termos gerais a ideia faz sentido, ao supor uma relação entre o tempo de exercício e a perda de peso, mas parece que há pouco aprofundamento nos conceitos que envolvem a elaboração de uma expressão algébrica para uma função, que relaciona uma grandeza variável com outros parâmetros. Uma elaboração mais precisa desse exemplo também precisa levar em conta que a relação entre as grandezas perda de peso e tempo de exercício não é linear, sendo influenciada por diversas peculiaridades individuais.

Duval (1993) atribui essa dificuldade de identificação à falta de experiência com exemplos de funções que tenham características diversas, ressaltando que a oposição visual é uma experiência que deve ser realizada exaustivamente para que se identifique as características principais dos grupos de função através da comparação.

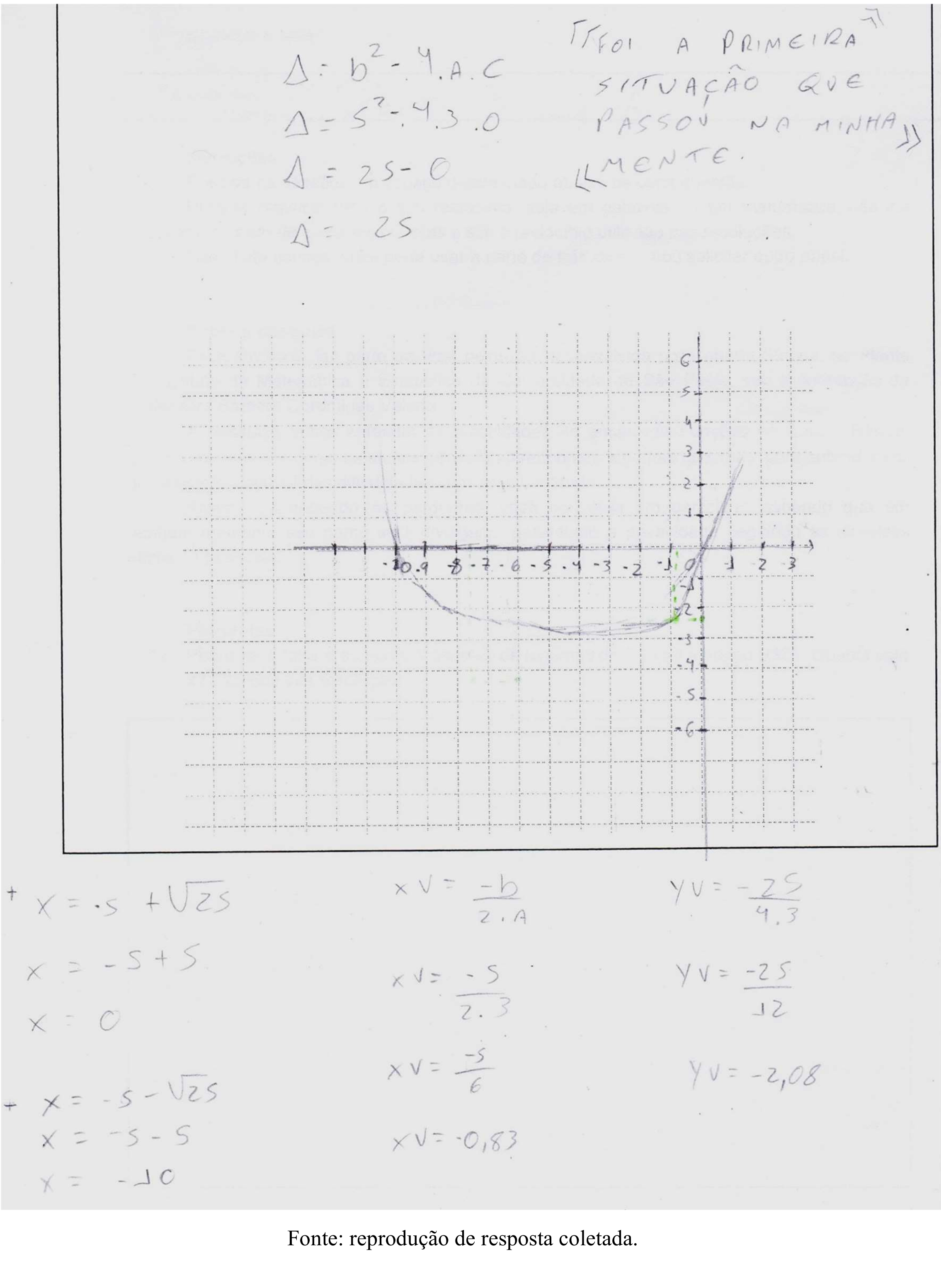
Figura 5.6.4: resolução apresentada, grupo da escola C



Fonte: reprodução de resposta coletada.

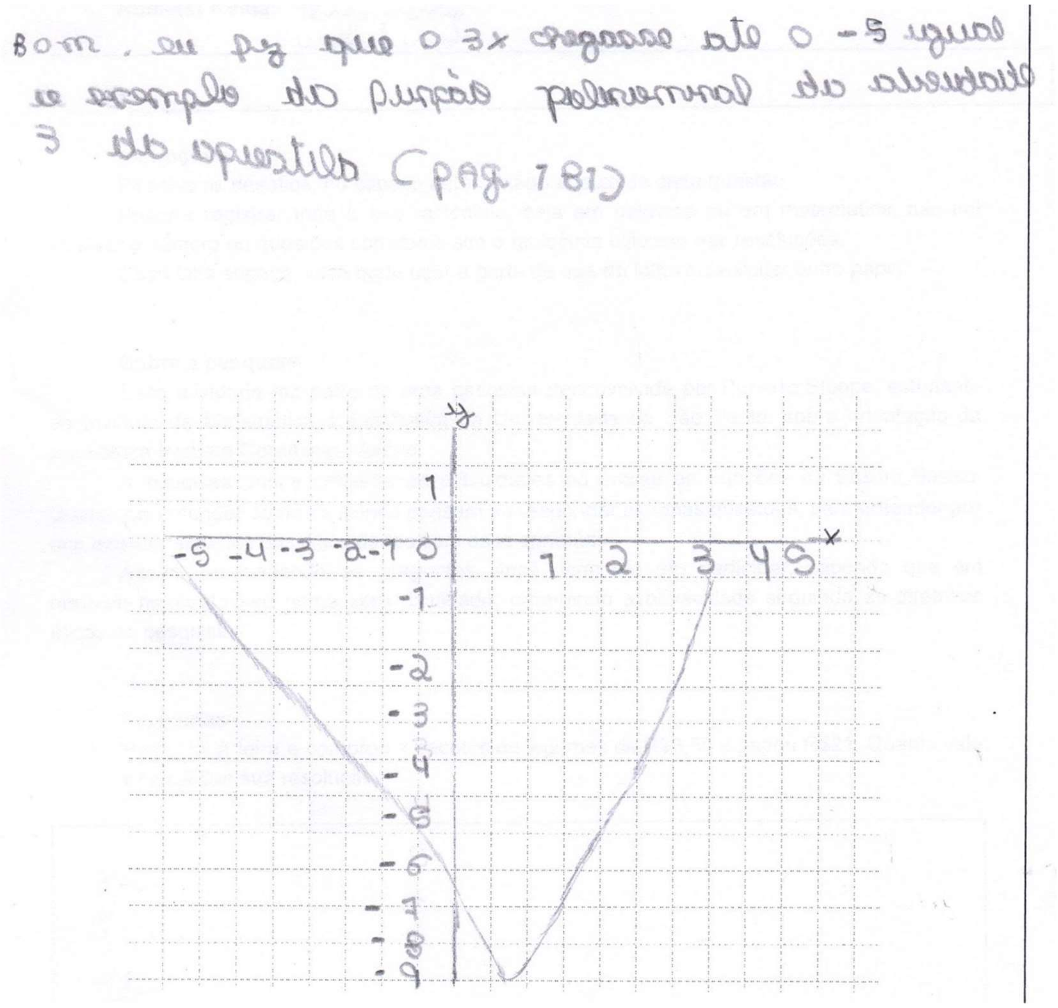
Na escola A os alunos do 3º ano estavam estudando funções do segundo grau, no período da pesquisa, o que pode justificar que 7 (25%) dos grupos respondeu a questão aplicando métodos de determinação do gráfico para função quadrática, como por exemplo encontrar o vértice pela lei da função, sem perceber justamente que naquele caso não existiria um vértice por ser uma função afim.

Figura 5.6.5: resolução apresentada, grupo da escola A



Fonte: reprodução de resposta coletada.

Figura 5.6.6: resolução apresentada, grupo da escola A



Fonte: reprodução de resposta coletada.

Na figura 5.6.5, o aluno justifica “foi a primeira situação que passou pela minha mente”, junto com um cálculo utilizando a fórmula de Báskara, e de forma semelhante, em 5.6.6, “bom, eu fiz que 3x chegasse até o -5 igual o exemplo da função polinomial da atividade 3 da apostila (p. 181)”, mostrando que estão apenas repetindo a fórmula apresentada sem criticidade sobre seus procedimentos.

6 - Conclusões

Analisando os resultados obtidos com a aplicação da atividade e considerando também as conversas com os alunos durante a aplicação da mesma, é possível destacar alguns tópicos que permearam as respostas coletadas e que apareceram em diversos momentos. Estes pontos destacados podem ajudar a compreender como os alunos escrevem e interpretam em sua linguagem natural o que está representado em outras linguagens, e os obstáculos enfrentados ao realizar outras conversões que preservem a congruência entre as linguagens algébrica, gráfica e natural.

Tínhamos como objetivo, ao aplicar a atividade, entender como diferentes enunciados podem ajudar ou não a compreensão do que é pedido, mas logo constatamos que seria difícil avaliar esse ponto considerando que a atividade não podia ser muito grande.

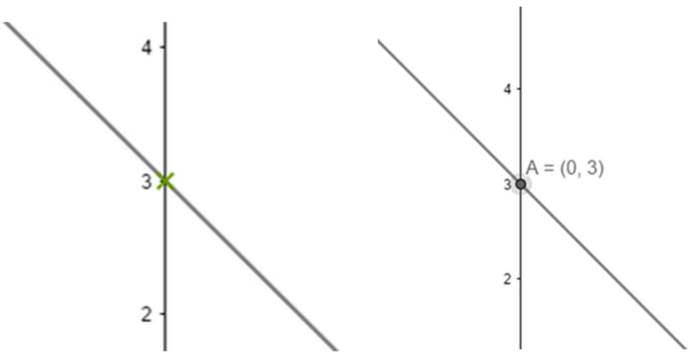
Além dessa limitação temporal, percebemos que, quando um aluno pede explicação sobre a pergunta apresentada, é realizada uma reformulação do texto para que essa ideia seja expressa de outra forma. Portanto, durante a aplicação da atividade foram realizadas algumas alterações espontâneas do enunciado, quando foi possível perceber que a solicitação de descrição da questão 4 foi um comando interpretado de diversas formas, alguns alunos escolhendo utilizar códigos matemáticos e outros utilizavam o código linguístico em língua natural, enquanto na questão 3 quase todos os alunos responderam utilizando linguagem simbólica de alguma forma.

Nos interessava estudar as causas das dificuldades nas conversões de linguagem, que são comumente apontadas no estudo do conteúdo, e pelas observações apontadas foi possível perceber que um grande obstáculo na consolidação dessa habilidade de comunicação se encontra na compreensão parcial dos conceitos daquilo que se representa, o que torna dúbio o julgamento sobre a congruência ou não entre representações que são realizadas em diferente sistemas semióticos.

Conforme apontado por Duval (1993), a conversão de registros entre diferentes sistemas semióticos no ensino de matemática geralmente se utiliza de uma linguagem intermediária para estruturação do pensamento, o que observamos em sala durante a aplicação dessa atividade foi que, na grande maioria das vezes, é a língua natural a utilizada na ordenação do raciocínio. Acontece que o código linguístico é às vezes impreciso em suas representações, ocorrendo assim alguma alteração significativa no encadeamento de desvios do significado original.

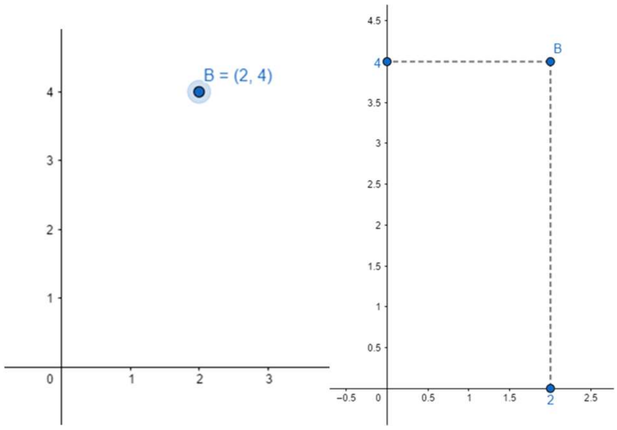
Dessa forma, “3x” e “3y” passam a representar os pontos de interseção da reta que representa a função $f(x) = -x + 3$ no plano, uma vez que esses são os números que se vêem perto do ponto de interseção, que é apontado como relevante e geralmente ressaltado em aula. Essa interpretação equivocada justifica a atenção dada pelos alunos aos números indicados nos eixos cartesianos, como símbolos (significante) e o interesse em justificar a presença desses números "relevantes" aos gráficos em suas respostas algébricas.

Durante o estudo de um gráfico apresentado, é comum que os estudantes e professores façam marcações, principalmente em relação a pontos de interesse. Abaixo, à esquerda, uma representação do ponto de interseção da reta com o eixo y que pode induzir a erro, e à direita uma que pode facilitar na compreensão do conceito apontado. Na primeira, o ponto geométrico é ressaltado, enquanto na representação da direita também fica anotado o par ordenado que representa algebricamente esse ponto. Essa diferença de marcação pode explicar a grande quantidade de alunos que escreve pontos relacionando-os com apenas um valor numérico.



Fonte: produzido pela autora.

Não conhecemos com qual forma de notação os alunos do grupo analisado entraram em contato, mas dentre os gráficos desenhados por eles, há pouca indicação de pontos relevantes, mesmo os pontos das interseções. Dentre os exemplos apresentados aqui, apenas uma aluna indica os pontos do gráfico pelo par ordenado, sendo muito mais comum a indicação das coordenadas através da ligação entre o ponto e o eixo, paralelamente, não necessariamente demonstrando compreender como representar esse ponto algebricamente ou que se trata de uma dupla ordenada.



Fonte: produzido pela autora.

Para conseguir representar um dado lugar geométrico no plano cartesiano, é necessário compreender a maneira como esse sistema semiótico se organiza: a um ponto estão associados dois valores ordenados, que no caso das funções se comportam seguindo uma lei de dependência de um valor em relação ao outro. Quando argumenta pelas atividades de variações comparativas para identificação das unidades significantes, Duval (2006) defende uma proposta de metodologia para o aprimoramento da habilidade de conversão que consiste em comparações sucessivas. Essa prática consiste na modificação um determinado objeto, que se encontra representado em um sistema de registros, e observar de que maneira essa modificação também alterou a representação do objeto em outro registro, assim "a discriminação das unidades significantes que constituem uma representação de um registro está estritamente ligada a atividade de conversão" (p. 286).

Para o autor, não podemos assumir que os estudantes percebam naturalmente as discriminações qualitativas através da aquisição do conceito de função linear ou do traçado e leitura de gráficos, mas sim defende que através da oposição visual é possível aos alunos identificar as características visuais do gráfico e as características semânticas da equação que se relacionam e como esses atributos se afetam mutuamente, afirmando que "é através dessa rede de características visuais distintas que os alunos podem converter de maneira fácil e significativa gráficos e equações" (Duval, 2006, p. 152)

Através dessa oposição visual entre as formas de registro, o autor defende que é possível desenvolver um ensino mais significativo que consiga atingir as dificuldades apresentadas pelos estudantes de seconde (equivalente ao 1º ano do Ensino Médio) que sua publicação retrata. Pelas similaridades observadas entre as dificuldades apresentadas no trabalho de Duval e as apresentadas pelos alunos pesquisados nesse trabalho, sua metodologia pode atingir também a esse último grupo.

Outro ponto que chama atenção, nas respostas obtidas com os alunos que trabalhamos, é em relação à continuidade e a característica de serem infinitas as retas que representam as funções dadas, conceitos que sabidamente causam dúvidas aos alunos, e geralmente são bem pouco trabalhados explicitamente, apesar de estarem presentes o tempo todo, no trabalho com os números reais.

Quando falam do processo de ensino-aprendizagem, Torres e Torres pontuam que o desenvolvimento de habilidades utilizadas no ensino de matemática, e de seus processos cognitivos associados, é possível com a existência de um ambiente que possibilite a exploração dos conhecimentos através de um contexto rico de estímulos.

> “Para isso, o professor deve ter a possibilidade de propor aos alunos um contexto enriquecido de situações que eles possam explorar, fazer representações, fazer abstrações, realizar o processo de modelagem matemática, entre outras possibilidades.” (MEN, 1998 apud TORRES, TORRES, 2019 p. 3)

Aqui existe um indicativo de como abordar as habilidades em que foram observadas dificuldades no presente trabalho, de forma que seja possível aumentar a fluidez natural entre os diferentes sistemas de representação da matemática. Através de um grande número de experiências de representação e comunicação, com a condução mais cuidadosa pela conceituação de alguns conhecimentos no estudo da matemática, aprimorando a forma de expressar seus conhecimentos e habilidades matemáticas através de processos relacionados à investigação.

A maneira como foi organizada a aplicação da atividade não permitiu que fosse avaliado a percepção dos alunos a respeito do caráter dual da matemática. Após a coleta das respostas, não houve espaço para que os estudantes pudessem falar sobre suas compreensões do conjunto de habilidades movimentadas nesta atividade, e a falta desse diálogo com os alunos impediu uma devolutiva sobre as resposta apresentadas, o que limitou algumas impressões sobre os processos de metacognição, ao ficarem contidos no que foi escrito e no que foi falado durante a aplicação, sem que existisse um espaço específico destinado à essa expressão.

Ao fim desse trabalho, é possível concluir que a forma como os alunos expressaram o conhecimento matemático sobre funções sinaliza sobre os processos cognitivos empregados na resolução de determinadas atividades propostas. As resoluções analisadas nos mostraram que, de forma geral, a confusão a respeito de alguns conceitos, que são geralmente abordados de maneira tangencial no currículo, dificulta a conversão de linguagem, ao diminuir a precisão na interpretação dos objetos representados.

Apesar de várias perguntas levantadas terem ficado sem resposta conclusivas, o desenvolvimento do trabalho foi muito enriquecedor. Também se percebe que realmente é necessário que o trabalho com funções seja revisto, visto a semelhança das dificuldades apresentadas por grupos de alunos tão distintos temporal e geograficamente: os estudantes franceses estudados por Duval em sua publicação de 1993 e os alunos de escolas estaduais de São Paulo em 2019.

Nos processos de ensino e aprendizagem, o conhecimento é construído pelos alunos considerando também a maneira como ele é representado, pelo estudante e pelo docente, então se temos interesse em aprimorar o desenvolvimento da habilidade de conversão, é necessário desenvolver situações de ensino e de aprendizagem que possibilitem aos estudantes entrar em contato com uma diversidade maior de exemplos, comparando-os entre si a fim de construir o seu conhecimento considerando uma variedade maior.

> “A codificação do universo natural pelo homem não é outra coisa senão a visão particular que dele têm, como indivíduo ou como grupo, de forma que esse universo passa a existir para eles seguindo o modelo com que foi estruturado e não pela natureza intrínseca, física e fisiológica” (BARBOSA, 1981, p. 21)

7 - Bibliografia

BARBOSA, Maria Aparecida. **Língua e discurso: contribuição aos estudos semânticos-sintáxicos**. 2ª edição revisada, São Paulo, Global, 1981.

BARROS, Diana Luz Pessoa de. **Teoria Semiótica do Texto.** 2ª edição. Ática, São Paulo, 1994.

BRASIL. Secretaria da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNC C_20dez_site.pdf. Acesso em: 14 de outubro de 2019.

BRASIL . Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais : matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília : MEC/SEF, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em 16 de outubro de 2019.

DUVAL Raymond. **Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée**. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. p. 37- 64. Strasbourg: IREM - ULP, 1993. Tradução: Méricles Thadeu Moretti

DUVAL, Raymond. **Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación.** La Gaceta de la RSME: Sección Educación, Espanha, v. 9.1, p. 143-168, 2006.

GREIMAS, Algirdas Julien; COURTÉS, Joseph. **Dicionário de Semiótica**, São Paulo, Editora Cultrix, 1979.

MAGGIO, Deise Pedroso; NEHRING, Cátia Maria. **Processo de ensino de funções e representações semióticas.** In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XIII., 2011, Recife, Brasil.

PEIRCE, C. S. **Semiótica**, trad. José Teixeira Coelho Neto. 3ªed. São Paulo: Perspectiva. Tradução de: The Collected Paper sof Charles Sanders Peirce. 1999

ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro, Zahar, 2012

SKOVSMOSE, Ole. **Cenários para Investigação.** Bolema. Rio Claro, n. 14, p. 66-91. 2000.

TORRES, Jhonatan Elias Posso; TORRES, Ligia Amparo. **Aspectos característicos del pensamiento variacional en la modelación de fenómenos a través de la función cuadrática**. In: CIAEM - CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, XV., 2019, Medellín - Colombia. Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle: Colombia, 2019.

8 - Anexo

Atividade - tema: funções

Nome(s) e sala:

Instruções

Resolva os desafios, no espaço determinado abaixo de cada questão.

Procure registrar todo o seu raciocínio, seja em palavras ou em matemática, não irei analisar o número de questões corretas e sim o raciocínio utilizado nas resoluções.

Caso falte espaço, você pode usar a parte de trás da folha ou solicitar outro papel.

Sobre a pesquisa

Essa atividade faz parte de uma pesquisa desenvolvida por Roberta Stoppe, estudante do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, sob a orientação da professora Barbara Corominas Valério.

A pesquisa busca entender as dificuldades no ensino de Funções no Ensino Básico. Queremos entender como os alunos pensam ao responder algumas questões, para entender por que existem algumas das dificuldades com esse conteúdo.

Assim, respondendo às perguntas, você concorda em participar, sabendo que em nenhum momento seu nome será divulgado, garantindo a privacidade seguindo as diretrizes éticas da pesquisa.

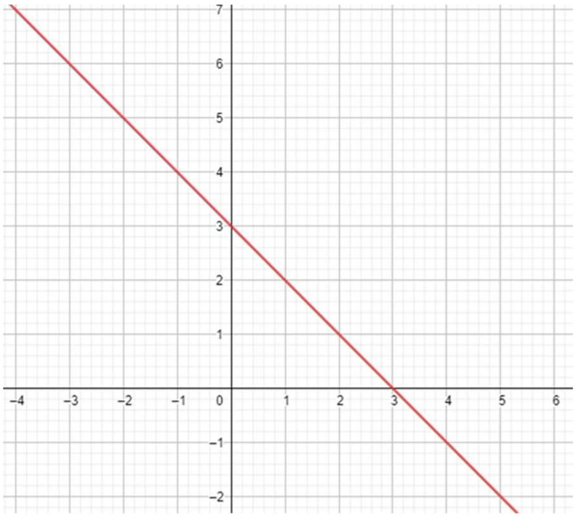
Perguntas

1. Pedro foi à feira e comprou x pacotes de legumes de R$3,50 e pagou R$21. Quanto vale x? Explique sua resolução.

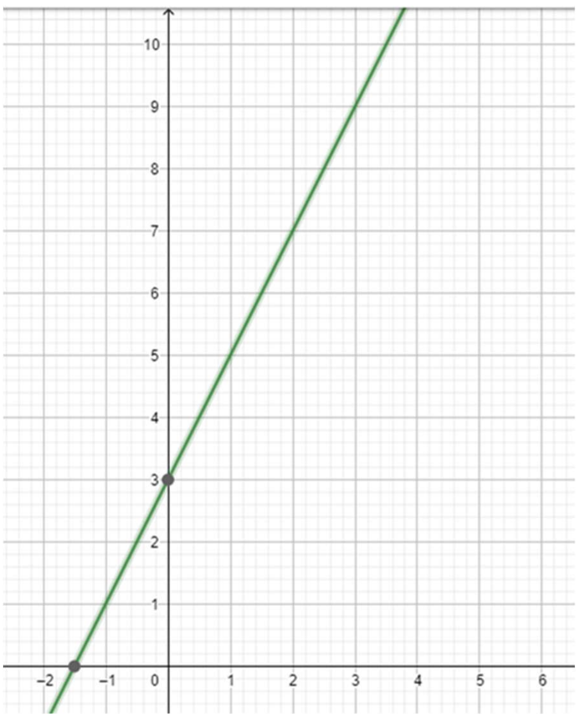
2. Desenhe um gráfico que represente a seguinte situação: um carro sai de uma cidade

até outra com velocidade constante, percorrendo 240 km numa viagem que demora 3h. Faça um gráfico de tempo (t) por espaço (S), e explique como você chegou a esse desenho

3. Escreva a função que descreve o gráfico abaixo. Não esqueça de deixar explícito seu raciocínio.



4. Descreva o gráfico 2 (abaixo)



5. Crie uma situação que possa ser representada pelo gráfico 2 (ou parte dele), e explique quais características do gráfico te levaram a escolher essa situação.

6. Escreva uma situação que possa ser representado pela função $f(x) = 3x - 5$. Por que

você optou por essa situação? Faça o gráfico dela.