

KEVIN TORRES RIBEIRO

**ESTUDO DA ÓRBITA DE UM EIXO ATRAVÉS DE UM  
DISPOSITIVO LASER**

São Carlos

2011

KEVIN TORRES RIBEIRO

# **ESTUDO DA ÓRBITA DE UM EIXO ATRAVÉS DE UM DISPOSITIVO LASER**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à  
Escola de Engenharia de São Carlos da  
Universidade de São Paulo  
Curso de Engenharia Mecatrônica

Área de concentração: Engenharia Mecatrônica

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Nicoletti

São Carlos

2011

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento  
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

Ribeiro, Kevin Torres.

R484e      Estudo da órbita de um eixo através de um dispositivo laser. / Kevin Torres Ribeiro ; orientador Rodrigo Nicoletti -- São Carlos, 2011.

Monografia (Graduação em Engenharia Mecânica com ênfase em Mecatrônica) -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2011.

1. Laser. 2. Órbita de um eixo. 3. Metrologia. I. Título.

## Folha de Avaliação

**Candidato:** Kevin Torres Ribeiro

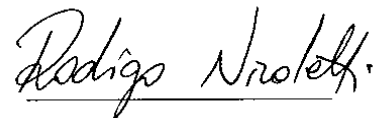
**Título:** Estudo da órbita de um eixo através de um dispositivo LASER

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à  
Escola de Engenharia de São Carlos da  
Universidade de São Paulo  
Curso de Engenharia Mecatrônica

### Banca examinadora

Prof. Dr. Rodrigo Nicoletti (orientador)

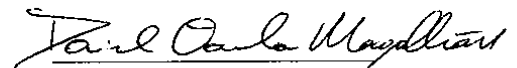
Nota atribuída: 9,0 ( nove )



(assinatura)

Prof. Dr. Daniel Varela Magalhães

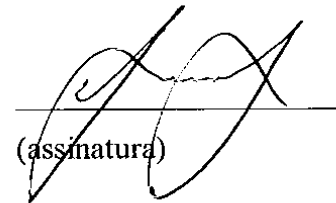
Nota atribuída: 9,0 ( nove )



(assinatura)

Prof. Dr. Leopoldo P. R. de Oliveira

Nota atribuída: 9,0 ( nove )



(assinatura)

Média: 9,0 ( nove )

Resultado: Aprovado

Data: 29/11/2011

Dedico este trabalho a minha família,  
minha primeira fonte de educação,  
pelo apoio em todos os momentos.

## **Agradecimentos**

Aos meus pais e irmã, Cecília e Cláudio e Mariana, que sempre estiveram ao meu lado, ainda que distantes fisicamente, que me ensinaram o essencial para a vida.

Aos meus avos e tia, que sempre me trataram com muito carinho e atenção.

Aos meus amigos e colegas de turma, pela amizade que construímos ao longo de nossa graduação.

Agradeço também ao meu professor e orientador, Rodrigo Nicolleti, pelo direcionamento do trabalho e atenção dada nos momentos de dúvida.

“Não existe um caminho para a felicidade.

A felicidade é o caminho.”

*Mahatma Gandhi*

## **Resumo**

RIBEIRO, K. T. **Estudo da órbita de um eixo através de um dispositivo LASER**. Trabalho de Conclusão de Curso. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2011. 60 p.

A metrologia é a ciência que estuda padrões e medidas e sua essência é a comparação. Este trabalho apresenta um estudo da órbita descrita por um eixo e a possibilidade de descrever esta órbita utilizando apenas um LASER comercial, cuja saída é a velocidade da superfície em relação a ele. Utilizando um acelerômetro, o movimento decomposto em diferentes direções é estudado a fim de garantir a viabilidade da utilização do LASER e o resultado da velocidade obtida com ele, comparando os seus resultados experimentais com as relações geométricas definidas. Com os resultados obtidos é possível concluir que não é possível separar o movimento em duas direções utilizando apenas o LASER comercial.

**Palavras-chave:** LASER, órbita de um eixo, metrologia.

## **Abstract**

RIBEIRO, K. T. **Study of a shaft's orbit using a LASER device.** Graduation Final Essay. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2011. 60 p.

Metrology is the science of measures and standards and its essence is the comparison. This paper presents a study of the orbit described by a shaft and the possibility to describe the same orbit using just a LASER device, whose output is the speed of the moving surface. Using an accelerometer, the movement decomposed in different directions is analyzed to ensure the viability of using just the LASER and the results of speed obtained with it, comparing the experimental results with the geometric relations defined. With the obtained results, the conclusion is that it is not possible to separate the movement in different directions using just a LASER device.

**Keywords:** LASER, shaft's orbit, metrology.



## Lista de Figuras

|  |    |
|--|----|
| Figura 1: Exemplo de uma função periódica.....   | 20 |
| Figura 2: Aproximação de onda triangular através de uma série de Fourier. ....   | 26 |
| Figura 3: Exemplo de um excitador eletrodinâmico.....  | 28 |
| Figura 4: Acelerômetro piezoelétrico .....   | 29 |
| Figura 5: Sensor de posição.....   | 31 |
| Figura 6: Esquemático de montagem para aquisição dos dados do eixo se movendo na direção transversal ao feixe de laser. O movimento ocorre na direção indicada pela seta abaixo do eixo.....                   | 33 |
| Figura 7: Relação entre o movimento horizontal (H) e vertical (x).....   | 35 |
| Figura 8: Alinhamento do feixe de LASER com o eixo. ....   | 40 |
| Figura 9: Esquemático de montagem para aquisição de dados do eixo se movendo na direção paralela ao feixe de laser. O movimento ocorre na direção indicada pela seta ao lado do eixo.....                      | 41 |
| Figura 10: Esquemático de montagem para aquisição dos dados do eixo se movendo com um ângulo de $60^\circ$ em relação ao feixe do LASER. O movimento ocorre na direção indicada pela seta abaixo do eixo. .... | 45 |
| Figura 11: Decomposição do movimento na direção horizontal e vertical. ....  | 46 |
| Figura 12: Esquemático do experimento. Foram mostrados separados o LASER e sensores para facilitar compreensão, mas no experimento foram utilizados simultaneamente. ....                                      | 49 |

## Lista de gráficos

|   |    |
|---|----|
| Gráfico 1: Resultado do eixo se movendo na direção transversal ao feixe de LASER. ....  | 34 |
| Gráfico 2: Dados obtidos do acelerômetro fixado ao eixo se movendo na horizontal. ....  | 34 |
| Gráfico 3: Frequência de vibração do <i>shaker</i> -eixo – 20,2Hz.....  | 37 |
| Gráfico 4: Frequência do movimento na direção vertical (x).....   | 37 |
| Gráfico 5: Velocidade obtida com laser e velocidade teórica (obtida numericamente). ....  | 38 |
| Gráfico 6: Relação entre deslocamento vertical e horizontal. Ordem de grandeza na horizontal<br>é 1000 vezes maior que vertical. ....                   | 39 |
| Gráfico 7: Resultado do eixo se movendo na direção transversal ao feixe de LASER. ....  | 42 |
| Gráfico 8: Dados obtidos do acelerômetro fixado ao eixo se movendo na vertical. ....  | 42 |
| Gráfico 9: Comparação entre a velocidade adquirida através do LASER (azul) e da velocidade<br>obtida a partir dos dados do acelerômetro (vermelho)..... | 43 |
| Gráfico 10: Composição dos movimentos horizontais e verticais.....  | 44 |
| Gráfico 11: Deslocamento vertical resultante do movimento horizontal. ....  | 47 |
| Gráfico 12: Componente vertical do movimento a 60°. ....  | 48 |
| Gráfico 13: Órbita descrita pelo eixo. Dados obtidos com os dois sensores de posição, um<br>posicionado na horizontal e outro na vertical. ....         | 50 |
| Gráfico 14: Frequência encontrada utilizando a função FFT do MATLAB. ....   | 50 |
| Gráfico 15: Velocidade. Azul: medição do LASER. Vermelho: Aproximação por Fourier. ..   | 51 |
| Gráfico 16: Comparação entre a contribuição do movimento vertical e horizontal para o total<br>de deslocamento na direção vertical. ....                | 52 |
| Gráfico 17: Comparação entre as velocidades na direção vertical. ....   | 54 |

# Sumário

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Introdução.....</b>                             | <b>14</b> |
| 1.1. Objetivo.....                                    | 14        |
| 1.2. Conteúdo .....                                   | 15        |
| <b>2. Metrologia .....</b>                            | <b>16</b> |
| 2.1. Breve histórico.....                             | 16        |
| 2.2. Principais conceitos .....                       | 17        |
| 2.3. O LASER .....                                    | 18        |
| <b>3. Métodos e ferramentas matemáticas .....</b>     | <b>20</b> |
| 3.1. Funções periódicas.....                          | 20        |
| 3.2. Séries de Fourier .....                          | 22        |
| 3.3. Método numérico: caso discreto.....              | 25        |
| 3.4. Derivada numérica.....                           | 26        |
| 3.5. Matlab .....                                     | 27        |
| <b>4. Materiais .....</b>                             | <b>28</b> |
| 4.1. Excitador eletrodinâmico ( <i>shaker</i> ) ..... | 28        |
| 4.2. Acelerômetro .....                               | 29        |
| 4.3. LASER .....                                      | 29        |
| 4.4. Amplificador.....                                | 30        |
| 4.5. Sensor de posição capacitivo.....                | 30        |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>5. Experimento.....</b>              | <b>32</b> |
| 5.1. Eixo fixado ao <i>Shaker</i> ..... | 32        |
| 5.1.1. Transversal.....                 | 32        |
| 5.1.2. Paralelo.....                    | 40        |
| 5.1.3. Composição de movimentos.....    | 44        |
| 5.1.4. Movimento com ângulo de 60°..... | 45        |
| 5.2. Eixo em rotação.....               | 48        |
| <b>6. Resultados e discussões.....</b>  | <b>52</b> |
| <b>7. Conclusão.....</b>                | <b>55</b> |
| <b>Referências bibliográficas.....</b>  | <b>56</b> |
| <b>APÊNDICE A.....</b>                  | <b>58</b> |
| <b>ANEXO A.....</b>                     | <b>60</b> |

## 1. Introdução

Em algumas aplicações, a tolerância dimensional dos componentes mecânicos deve ser o mais baixa possível, da ordem de micrometros ou mesmo nanômetros. Isso significa que as medidas do componente real devem ser mais próximas quanto possível do ideal especificado.

Metrologia é a ciência que estuda medidas e padronizações de grandezas. O desenvolvimento deste ramo trouxe grandes contribuições para a indústria de manufatura, bem como para requisitos de qualidade. Segundo Silva (2002), o nível do desenvolvimento industrial de um país pode ser medido de acordo com a sua evolução no ramo da metrologia.

Para Rabinovich (2009), a comparação é o elemento chave do processo de medição e está presente no pensamento humano desde muito tempo atrás. Porém, este trabalho trará uma abordagem um pouco diferente: a comparação será feita entre dois instrumentos de medida diferentes, não importando a medição em si, mas sim se os métodos apresentam resultados semelhantes e se a utilização apenas de um LASER (do inglês, *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation* – Amplificação da Luz por Emissão Estimulada de Radiação) comercial é viável.

Métodos de cálculo numérico foram utilizados como ferramenta para avaliar os resultados obtidos e possibilitar a comparação entre o resultado obtido por dois sensores de posição e o LASER.

### 1.1. Objetivo

Ao longo deste trabalho o objetivo será obter a órbita descrita por um eixo em rotação utilizando apenas um dispositivo LASER. Como o resultado desta medida é a velocidade de

um ponto, o foco é encontrar uma relação entre a geometria do eixo e o possível deslocamento, para encontrar a trajetória descrita a partir da velocidade.

Além do LASER, também serão utilizados dois sensores de posição e um acelerômetro, com a finalidade de comparar o resultado obtido com o LASER e análise dos resultados.

## **1.2. Conteúdo**

O trabalho será apresentado de modo que informações teóricas sobre os componentes utilizados, modelos e ferramentas matemáticas e qualquer fundamento necessário para realização do experimento seja entendido previamente, nas seções anteriores ao procedimento prático.

Após os fundamentos, será apresentada a maneira como foram realizadas as medições que resultaram nos dados utilizados para desenvolver o trabalho. O tratamento destes dados e consequentes discussões serão tratados logo em seguida, baseados nas teorias da seção anterior e medidas obtidas com os sensores de posição.

Por fim, a conclusão sobre o trabalho e viabilidade de se utilizar o LASER para encontrar a órbita traçada pelo eixo, em comparação com resultado obtido através dos sensores de posição.

## **2. Metrologia**

### **2.1. Breve histórico**

Por metrologia entende-se a ciência responsável pelo estudo de medidas e padronizações e seus instrumentos. As atividades metrológicas mais antigas podem ser encontradas em tempos pré-históricos, segundo Silva (2002).

No Egito antigo, padrões de medida eram utilizados para suas construções e ficava sob responsabilidade de membros religiosos manterem estes padrões. Um exemplo de padrão de medida era o cúbito real, equivalente a distância do cotovelo até a ponta dos dedos do faraó. Outros povos como os sumérios e civilizações da Babilônia contribuíram para o desenvolvimento da ciência em períodos posteriores.

Já em tempos modernos, esta ciência contribuiu para a produção em massa. A compreensão e desenvolvimento da metrologia foram fundamentais para possibilitar a produção de equipamentos cujas peças podem ser produzidas separadamente e montadas posteriormente. As linhas de montagem como conhecemos hoje em dia só são viáveis devido à utilização do conceito de tolerância de medida.

Esta característica de ser intercambiável também permite que uma peça com falha possa ser substituída por outra, pois os lotes produzidos respeitam uma tolerância que possibilita a montagem do equipamento independente de quando foi produzido.

Além desta abordagem voltada para a indústria de manufatura, estes conceitos de padronização hoje em dia também são utilizados para garantir padrão de qualidade de produtos para consumidores finais.

Laboratórios e equipamentos dos mais diversos são utilizados para identificar desvios e avaliar as tolerâncias das peças e produtos. Na próxima seção alguns conceitos básicos de metrologia serão apresentados.

## 2.2. Principais conceitos

Por medição entende-se o processo de determinar o valor de certa quantidade experimentalmente, utilizando técnicas e instrumentos próprios para este fim, de acordo com Rabinovich (2009).

Este valor representa uma propriedade e deve ser acompanhado de uma unidade de medida, que representa uma métrica adotada para aquela propriedade específica. Como exemplo, no Sistema Internacional (SI), a unidade de medida para comprimento é o metro e para massa é o quilograma. Sem a unidade o número encontrado não possui representatividade alguma.

Usualmente, o valor utilizado para definir certa característica de um objeto é chamado de valor nominal. Representa um valor aproximado para aquela característica, o mais próximo possível do real. Em contrapartida, o valor real representa a quantidade real, podendo ser maior ou menor que o valor nominal estabelecido.

A diferença entre estes dois valores é chamada de desvio ou erro. De acordo com o projeto, este desvio pode ser maior ou menor para garantir a qualidade e funcionalidade do equipamento. Este intervalo permitido é chamado de tolerância.

Encontrar o valor exato para certa quantidade é uma tarefa difícil, senão impossível. Quanto mais precisão se deseja obter, mais sofisticado deverá ser o equipamento utilizado para realizar a medição, pois o mesmo deverá ser capaz de detectar pequenas variações, tão pequenas quanto se queira.

Dentre os possíveis desvios que podem existir em uma peça usinada, este trabalho tem um interesse especial nos chamados desvios geométricos, que são caracterizados pelo erro de forma e posição da peça, que podem ocorrer devido a erros no processo de fabricação.

Segundo Palma (2006), desvio de forma pode ser definido como a variação das superfícies reais com relação aos sólidos geométricos que as definem. Podem ser classificadas em microgeométricos (rugosidade superficial) ou macrogeométricos (retilidade, circularidade).

O mesmo também define desvio de posição como o grau de variação dentre as diversas superfícies entre si, em relação ao posicionamento teórico. Por fim, desvios compostos são aqueles constituídos por desvios de forma e posição, como o desvio de batida.

Quando se fala em medição e instrumentos de medida, alguns termos importantes e muito utilizados são exatidão, precisão e resolução. Deve-se atentar ao significado de cada um, pois muitas vezes são confundidos ou usados como sinônimos.

Como exatidão entende-se o quão próximo do valor real é o valor encontrado através do instrumento de medição. Já a precisão se refere a dispersão dos resultados quando se realiza diversas vezes a medição. E, por fim, resolução se refere à diferença entre os dois menores valores possíveis detectáveis pelo instrumento, segundo Leach (2009).

Estes conceitos apresentados são suficientes como base sobre metrologia para compreensão deste trabalho. Para maior profundidade nos assuntos mencionados nesta seção, as referências indicadas sobre este assunto podem ser consultadas.

### **2.3. O LASER**

De acordo com Leach (2009), a invenção do LASER nos anos 60 teve um impacto significativo na metrologia. A própria definição do metro envolve a utilização destes dispositivos. Dentro os tipos de LASER, o mais comum utilizado na área da metrologia são os de hélio-neon (He-Ne).

Este tipo de LASER é formado por um tubo que contém uma mistura de gases, com aproximadamente oito partes de He para uma parte de Ne, a uma pressão de poucos milibars. Em cada uma das extremidades encontra-se um espelho, e este espaço entre eles é denominado cavidade ótica. O gás no tubo é excitado com uma descarga entre 1,5 kV até 2,5kV, com uma corrente que pode variar de 5 mA a 6 mA. Esta descarga provoca a emissão de radiação em vários comprimentos de onda diferentes. Alguns elétrons dos átomos de He passam para um estado de excitação maior, e as colisões destes com os átomos de Ne transferem energia para os elétrons de Ne passarem a um estado de excitação maior.

O aumento do número de átomos de Ne com um nível de energia maior é chamado de excitação seletiva ou inversão da população. O comprimento total da cavidade, ou seja, o espaço entre os espelhos deve ser de modo que as ondas refletidas por eles estejam em fase, para a emissão estimulada ocorrer.

### 3. Métodos e ferramentas matemáticas

Nas seções seguintes serão tratados conceitos, métodos e ferramentas matemáticas utilizadas tanto para a aquisição dos dados do experimento quanto para a análise e tratamento dos mesmos.

#### 3.1. Funções periódicas

Segundo Boyce e Diprima (2010), uma função  $f$  é dita periódica se existe um número  $T$ , período de  $f$ , tal que

$$f(x + T) = f(x) \quad (3.1)$$

para todo  $x$  pertencente ao domínio de  $f$ . Desta definição segue também que se  $T$  é um período da função, então  $2T$  e qualquer outro múltiplo de  $T$  também é um período da função  $f$ . O menor valor de  $T$  é chamado de período fundamental. A Figura 1 mostra um exemplo de função periódica.

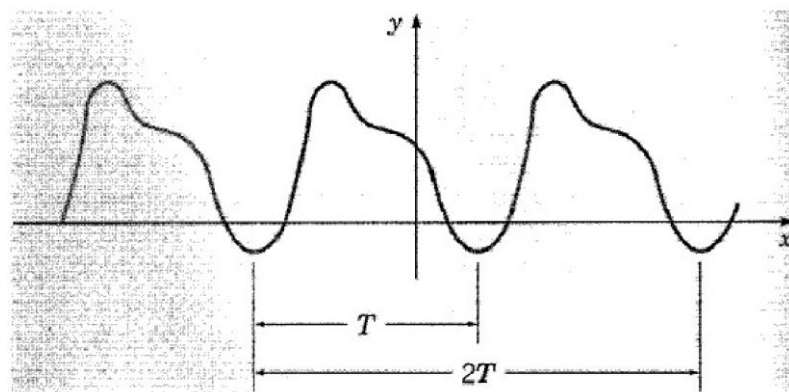


Figura 1: Exemplo de uma função periódica.

Uma propriedade das funções periódicas é que sendo  $f$  e  $g$  duas funções periódicas de mesmo período  $T$ , então o produto entre elas e qualquer combinação linear  $c_1f + c_2g$  também são periódicas com período  $T$ .

Além disso, a frequência  $F$  de uma função periódica é definida como o inverso de seu período fundamental, ou seja,

$$F = \frac{1}{T} \quad (3.2)$$

e significa o número de repetições que ocorre em cada intervalo unitário em  $x$ . Também é importante definir a velocidade angular  $\omega$  como

$$\omega = 2\pi F = \frac{2\pi}{T} \quad (3.3)$$

As funções seno e co-seno são periódicas, e o período fundamental de ambas é  $2\pi$ , portanto as propriedades de funções periódicas são válidas para as duas funções.

Outra propriedade das funções seno e co-seno é a ortogonalidade. Generalizando o conceito de ortogonalidade de vetores, pode-se dizer que o produto interno  $(u, v)$  de duas funções reais  $u$  e  $v$  no intervalo  $\alpha \leq x \leq \beta$  é definido como

$$(u, v) = \int_{\alpha}^{\beta} u(x)v(x)dx \quad (3.4)$$

As funções  $u$  e  $v$  serão ortogonais neste intervalo se o resultado do produto interno entre elas for nulo, ou seja, se o resultado da integral acima for igual a zero. Um conjunto de funções é chamado de conjunto ortogonal se cada par de funções diferentes deste grupo é ortogonal. Sendo assim, as funções seno e co-seno formam um conjunto ortogonal. Para

conferir a prova de que as funções seno e co-seno formam um conjunto ortogonal, consultar Boyce e Diprima (2010), no capítulo referente a séries de Fourier.

As relações que podem ser estabelecidas a partir desta definição são as seguintes, segundo Santos (2004), chamadas de relações de ortogonalidade:

$$\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi mx}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ \frac{T}{2}, & \text{se } m = n \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi mx}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ \frac{T}{2}, & \text{se } m = n \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi mx}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx = 0, \forall m, n \quad (3.7)$$

Sendo  $m$  e  $n$  inteiros positivos. A prova destas relações são apresentadas na seção 1.2 de Santos (2004), mas também podem ser verificadas em Boyce e Diprima (2010).

### 3.2. Séries de Fourier

Toda função periódica pode ser representada por uma soma de senos e co-senos. Essas séries trigonométricas são chamadas de Séries de Fourier, em homenagem a Joseph Fourier. A série pode ser expressa na forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right) + b_m \sin\left(\frac{2m\pi x}{T}\right) \quad (3.8)$$

Se o valor destas parcelas converge para os valores representados por uma função qualquer  $f(x)$ , então esta é série de Fourier para  $f(x)$  e  $a_0$ ,  $a_m$  e  $b_m$  são chamados de

coeficientes de Fourier. Sendo  $T$  o período fundamental, note que  $\frac{2\pi}{T}$  é a frequência fundamental,  $\omega_0$ , e pode-se escrever a função  $f$  como

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(m\omega_0 x) + b_m \sin(m\omega_0 x) \quad (3.9)$$

Para determinar os coeficientes de Fourier, serão utilizadas as relações de ortogonalidade apresentadas na seção anterior. Primeiramente, integra-se ambos os membros no intervalo  $[0, T]$ :

$$\begin{aligned} \int_0^T f(x) dx &= \int_0^T \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(m\omega_0 x) + b_m \sin(m\omega_0 x) \right] dx \\ &= \int_0^T \frac{a_0}{2} dx + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^T a_m \cos(m\omega_0 x) dx + \int_0^T b_m \sin(m\omega_0 x) dx \\ &= \left[ \frac{a_0}{2} x \right]_0^T + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{a_m}{m\omega_0} \sin(m\omega_0 x) \right]_0^T - \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{b_m}{m\omega_0} \cos(m\omega_0 x) \right]_0^T \\ &= \left[ \frac{a_0}{2} T \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m\omega_0} [\sin(m\omega_0 T) - \sin(0)] - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{m\omega_0} [\cos(m\omega_0 T) - \cos(0)] \\ &= \left[ \frac{a_0}{2} T \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m\omega_0} [\sin(2\pi m) - 0] - \frac{b_m}{m\omega_0} [\cos(2\pi m) - 1] = \frac{a_0}{2} T \end{aligned}$$

Sendo que  $\sin(2\pi m) = 0$  e  $\cos(2\pi m) = 1$  para qualquer  $m$  pertencente aos inteiros positivos. Uma observação importante é que uma série de funções pode ser integrada termo a termo somente se for uniformemente convergente, e este é o caso da série de Fourier. Desta maneira, o coeficiente procurado é dado por

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx \quad (3.10)$$

Para encontrar os coeficientes  $a_m$ , primeiramente multiplicam-se os membros da equação (3.9) por  $\cos(m\omega_0x)$  e integra-se novamente no intervalo  $[0,T]$ .

$$\begin{aligned} \int_0^T f(x) \cos(m\omega_0x) dx &= \int_0^T \left[ \frac{a_0}{2} \cos(m\omega_0x) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(m\omega_0x) \cos(m\omega_0x) + b_m \sin(m\omega_0x) \cos(m\omega_0x) \right] dx \\ &= \int_0^T \frac{a_0}{2} \cos(m\omega_0x) dx \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_0^T \cos(m\omega_0x) \cos(m\omega_0x) dx + b_m \int_0^T \sin(m\omega_0x) \cos(m\omega_0x) dx \end{aligned}$$

Retomando as equações das relações de ortogonalidade, de acordo com a equação (3.7) a segunda integral do somatório é nula. Do mesmo modo, pela equação (3.5) a primeira integral do somatório é 0 para  $m \neq n$  e  $\frac{T}{2}$  para  $m = n$ . Desta forma, resolvendo:

$$\begin{aligned} \int_0^T f(x) \cos(m\omega_0x) dx &= \frac{a_0}{2m\omega_0} [\sin(m\omega_0x)]_0^T + a_m \frac{T}{2} = \frac{a_0}{2m\omega_0} [\sin(m\omega_0T) - \sin(0)] + a_m \frac{T}{2} \\ &= \frac{a_0}{2m\omega_0} [\sin(2m\pi) - 0] + a_m \frac{T}{2} = a_m \frac{T}{2} \end{aligned}$$

Sendo  $\sin(2m\pi) = 0$  para qualquer  $m$  pertencente aos inteiros positivos, então o coeficiente procurado é dado por

$$a_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(m\omega_0x) dx \quad (3.11)$$

Do mesmo modo, pode-se determinar o coeficiente  $b_m$  multiplicando-se os membros de (3.9) por  $\sin(m\omega_0x)$  e integrando no intervalo  $[0,T]$ . Seguindo o mesmo raciocínio utilizado para determinar o coeficiente  $a_m$  o resultado é

$$b_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(m\omega_0 x) dx \quad (3.12)$$

Desta maneira, os coeficientes estão determinados para uma função periódica  $f$  de período  $T$ .

### 3.3. Método numérico: caso discreto

Na seção anterior foi mostrado como é possível representar uma função periódica  $f$  por uma soma de senos e co-senos, supondo-se que a função é conhecida. Existem casos em que a expressão para  $f$  não é conhecida, mas seus valores  $f(x)$  em determinados pontos sim.

Uma maneira de se encontrar os coeficientes desta série é definida por Franco (2006) no capítulo 8. Os coeficientes são dados por:

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x_k) \quad (3.13)$$

$$a_j = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N f(x_k) \cos(jx_k) \quad (3.14)$$

$$b_j = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N f(x_k) \sin(jx_k) \quad (3.15)$$

$$x_k = \frac{2k\pi}{N} \quad (3.16)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, L$$

Esta será a aproximação utilizada neste trabalho futuramente, dado que não será conhecida a expressão da função, mas sim os valores em determinados pontos. A Figura 2 ilustra a aproximação de uma onda triangular utilizando a série de Fourier.

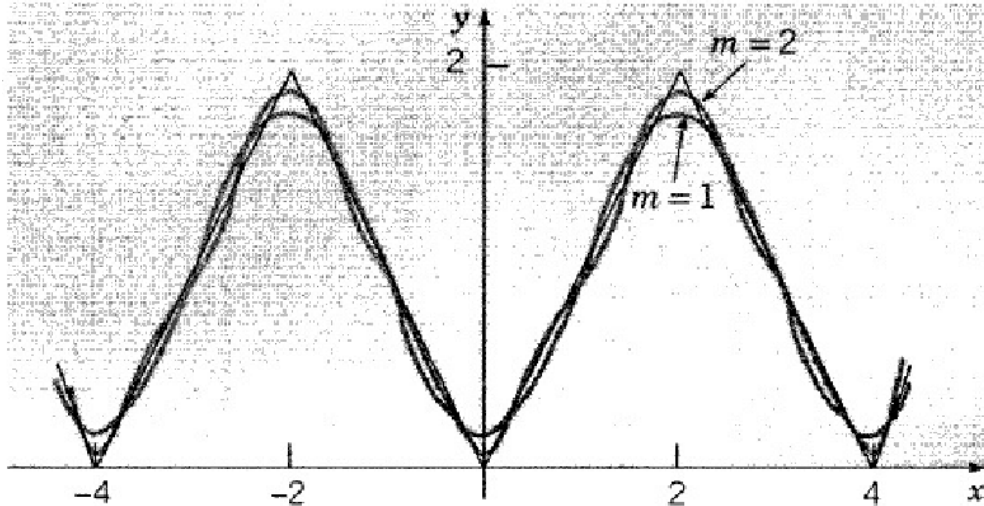


Figura 2: Aproximação de onda triangular através de uma série de Fourier.

### 3.4. Derivada numérica

Esta seção aborda como calcular a derivada de uma função numericamente, ou seja, como encontrar a derivada a partir de pontos conhecidos da função ao longo do tempo, mesmo desconhecendo a expressão da função. Não será aqui definido o conceito de derivada de uma função, que pode ser encontrado em livros de fundamentos de cálculo.

Segundo Guidi (2007), a aproximação da derivada por diferenças finitas pode ser encontrada a partir da seguinte expressão:

$$x'(t) = \frac{x(t+h) - x(t-h)}{2h} \quad (3.17)$$

Ou seja, a derivada no ponto  $t$  pode ser encontrada subtraindo-se o valor da função em um ponto imediatamente anterior ( $t - h$ ) do valor da função em um ponto imediatamente posterior ( $t + h$ ) e dividindo este resultado por duas vezes o intervalo entre os pontos ( $2h$ ).

### 3.5. Matlab

O MATLAB (*MATrix LABORatory*) é um *software* voltado para desenvolvimento de algoritmos, visualização e análise de dados, e computação numérica. Sua biblioteca possui diversas funções matemáticas, estatísticas suficientes para suportar operações comuns ao universo da engenharia e ciência.

Dentre as funções oferecidas pelo *software*, vale citar a *Fast Fourier Transform*, utilizada para decompor o sinal em suas componentes em frequência.

O próprio *software* oferece ajuda e explicações sobre cada função, mas o mesmo também pode ser encontrado em <http://www.mathworks.com/help/techdoc>.

## 4. Materiais

Nesta seção serão apresentados os materiais utilizados para realização do experimento, tais como *shaker*, LASER, acelerômetro. O funcionamento de cada um será explicado sucintamente, de maneira que possibilite a compreensão do experimento.

### 4.1. Excitador eletrodinâmico (*shaker*)

O objetivo de um excitador eletrodinâmico (também chamado de *shaker*) é converter um sinal elétrico em movimento, de maneira controlada. Ao passar corrente elétrica por um enrolamento de comprimento  $L$  uma força  $F$  é gerada, proporcional a corrente e fluxo magnético, resultando no movimento (aceleração) da base do excitador.

A frequência de vibração da base é determinada de acordo com o sinal elétrico aplicado no enrolamento. A Figura 3 mostra um *shaker*.



Figura 3: Exemplo de um excitador eletrodinâmico

## 4.2. Acelerômetro

Um acelerômetro, como o próprio nome sugere, é um instrumento utilizado para medir a aceleração de um objeto. Para este trabalho, será considerado um acelerômetro do tipo piezoelétrico.

Um material piezoelétrico é normalmente constituído de uma cerâmica polarizada artificialmente. Ao ser acionado mecanicamente, este material gera uma carga elétrica que é proporcional a força aplicada.

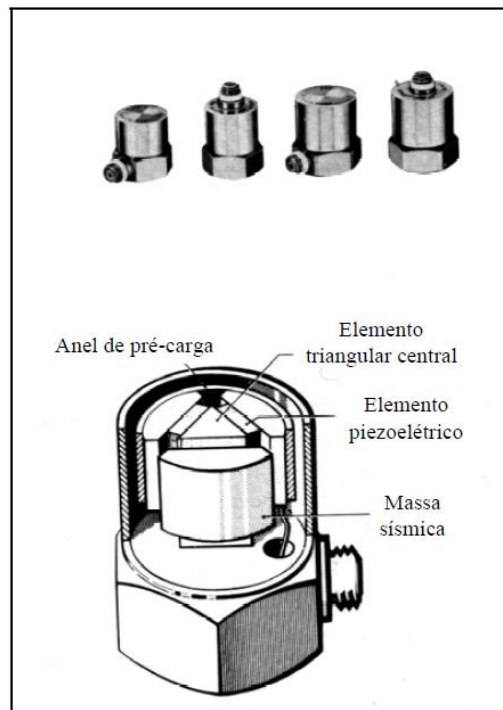


Figura 4: Acelerômetro piezoelétrico

## 4.3. LASER

Para determinar a velocidade de deslocamento do eixo em uma determinada direção, foi utilizado um LASER comercial, cujo resultado é a velocidade da superfície que se desloca.

Seu princípio de funcionamento está baseado no efeito Doppler. O feixe de LASER é direcionado para a superfície que se deseja medir a velocidade. Este raio irá percorrer a

distância entre o LASER e o objeto, será refletido pela superfície do objeto e irá retornar para o LASER. Como a superfície estará em movimento em relação ao LASER, a frequência da onda que retorna será diferente da emitida, por efeito Doppler. De acordo com a diferença de frequência da onda que retorna para o dispositivo em relação à frequência emitida, a velocidade de deslocamento do corpo em questão é determinada.

Existe um indicador no próprio LASER para verificar a qualidade do sinal que está retornando para o mesmo, de acordo com o foco. A posição do LASER em relação ao eixo e o foco devem ser ajustados de modo que o máximo deste sinal seja capturado.

#### **4.4. Amplificador**

O amplificador operacional é um dispositivo utilizado para amplificação, controle e geração de formas de ondas senoidais ou não em frequências. Suas aplicações estão principalmente voltadas para a área de instrumentação, sistemas de controle, processamento de sinais.

Os amplificadores operacionais são amplificadores de acoplamento direto, de alto ganho, que usam realimentação para controle de suas características. São formados por amplificadores transistorizados ligados em série.

#### **4.5. Sensor de posição capacitivo**

Sensores de proximidade, deslocamento ou posição são aqueles capazes de indicar a distância entre um objeto e o sensor posicionado a uma distância pré-definida. Dentre os tipos existentes, pode-se citar o indutivo e capacitivo.

Sensores capacitivos, de acordo com Leach (2009), funcionam com a mudança de capacitância induzida pelo objeto que se aproxima ou afasta do sensor. Seu campo de detecção está relacionado com a constante dielétrica do corpo que se aproxima, e é capaz de detectar materiais metálicos e não-metálicos, diferente do sensor indutivo que detecta apenas materiais metálicos.

Já o funcionamento do sensor indutivo está baseado na variação da indutância, relacionada à proximidade de um material metálico. Como já dito, materiais metálicos não podem ser identificados por este tipo de sensor, pois não são capazes de causar variação na indutância.



Figura 5: Sensor de posição.

## 5. Experimento

Os experimentos descritos a seguir foram realizados no Laboratório de Dinâmica da Escola de Engenharia de São Carlos, um dos laboratórios do Departamento de Engenharia Mecânica.

Em uma segunda etapa, foi realizada a medição em um eixo em rotação, fixado a um motor. Neste caso, além dos dados referentes à velocidade, medidos com o LASER, também se obteve dados referentes ao deslocamento em duas direções, obtidos com dois sensores capacitivos.

### 5.1. Eixo fixado ao *Shaker*

Em um primeiro momento, foram realizados testes com um pedaço de eixo fixado a um shaker, simulando a movimentação do eixo (vibração) em uma única direção – transversal ao feixe emitido pelo LASER ou paralelo ao mesmo.

#### 5.1.1. Transversal

Nesta configuração, um pequeno pedaço de eixo foi fixado à ponta da base vibratória do *shaker*, que recebeu um sinal elétrico de modo que vibrasse a uma frequência teórica de 20Hz. O conjunto foi montado de modo que o eixo vibre transversalmente ao feixe emitido pelo LASER, portanto o deslocamento será apenas na direção horizontal.

Apesar do deslocamento do eixo ocorrer apenas na direção horizontal, devido a sua curvatura a medição captada pelo LASER indica que há um deslocamento vertical, ou seja, o conjunto se afastou/aproximou do LASER. Caso não houvesse esta movimentação, os dados obtidos seriam constantes.

O LASER foi montado em um tripé e posicionado acima do conjunto *shaker*-eixo e seu foco foi ajustado para que o máximo de sinal possível retorne ao mesmo. Além disso, um acelerômetro foi fixado ao conjunto, para medir a aceleração na direção do movimento. A Figura 6 é um desenho esquemático de como foi feita esta primeira medição. Neste desenho, estão representados o *shaker*, LASER e eixo – o tripé foi omitido, pois não é necessário para a compreensão do experimento.

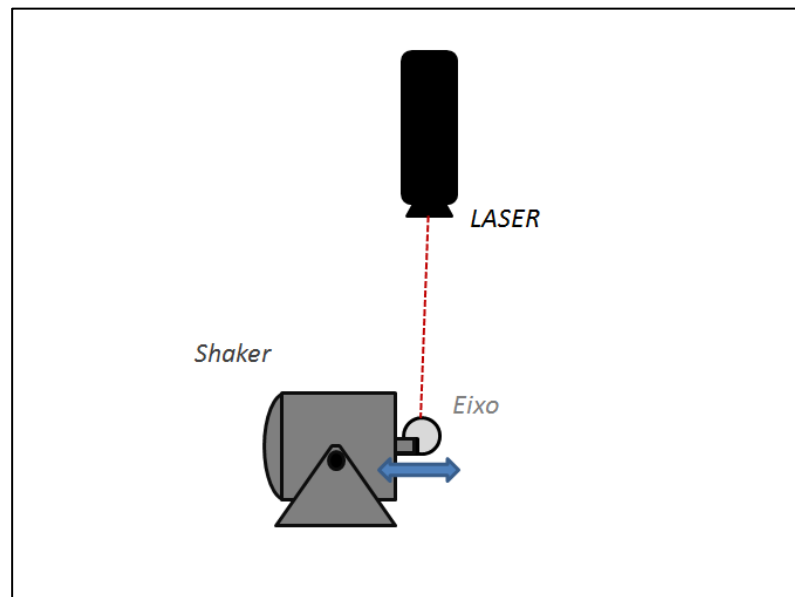


Figura 6: Esquemático de montagem para aquisição dos dados do eixo se movendo na direção transversal ao feixe de laser. O movimento ocorre na direção indicada pela seta abaixo do eixo.

A aquisição dos dados foi feita através da placa NI PCI 6229 e com um programa desenvolvido anteriormente pelo professor orientador Rodrigo Nicoletti, utilizando o software MATLAB, versão 7.6.0 (R2008a). Detalhes sobre o código do programa se encontram no ANEXO A.

A taxa de aquisição de dados utilizada é de 1000 Hz e o período de 5 segundos, ou seja, foram obtidas 5000 posições do eixo nesses 5 segundos. Com estes dados em mãos e ainda utilizando o MATLAB, pode-se observar o resultado através de um gráfico de (velocidade x

tempo). Para melhor visualização, o Gráfico 1 mostra os valores no intervalo de 2.2 até 2.7 segundos.

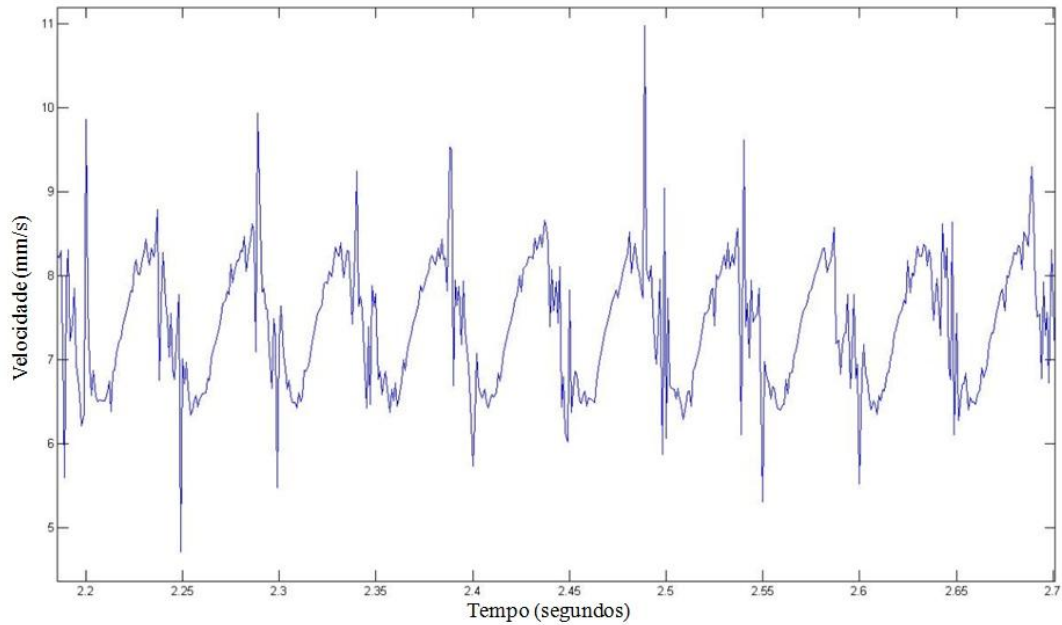


Gráfico 1: Resultado do eixo se movendo na direção transversal ao feixe de LASER.

Observe que o eixo vertical do gráfico mede a velocidade de deslocamento do ponto do eixo e não o deslocamento em si daquele ponto.

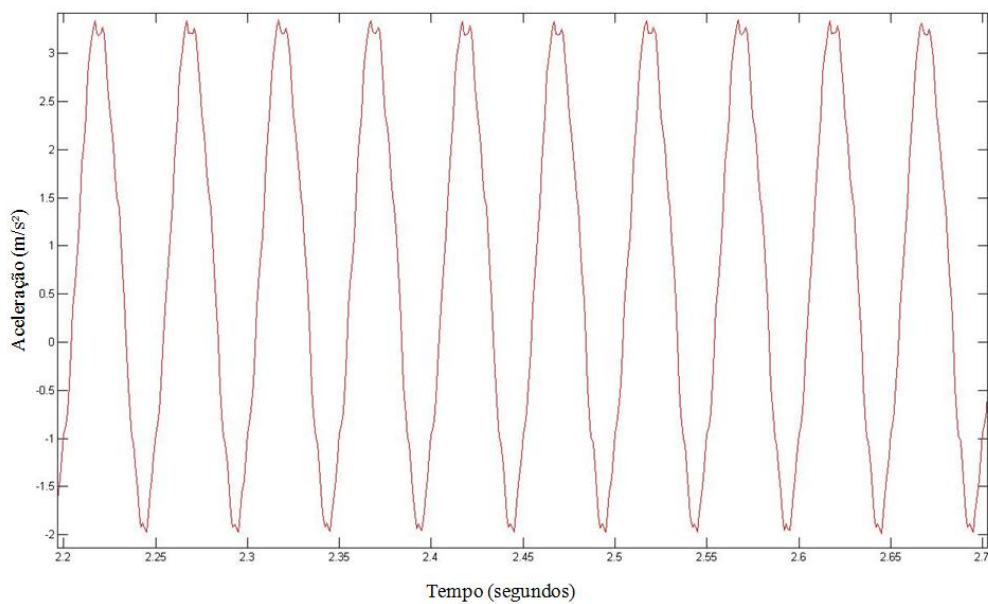


Gráfico 2: Dados obtidos do acelerômetro fixado ao eixo se movendo na horizontal.

Já o Gráfico 2 mostra o resultado da aceleração do eixo ao longo do tempo, obtido através do acelerômetro. A curva apresentada neste gráfico não está oscilando em torno de zero (0), é então necessário encontrar um valor de *offset*, que pode ser obtido encontrando-se a média entre dois picos consecutivos. Um resultado aproximado obtido é de 0,701. Este valor será usado futuramente, quando for necessário utilizar os dados de aceleração.

No caso deste movimento horizontal (transversal ao feixe), é necessário encontrar uma relação entre o movimento horizontal e a contribuição deste movimento para a leitura do LASER, ou seja, o movimento vertical.

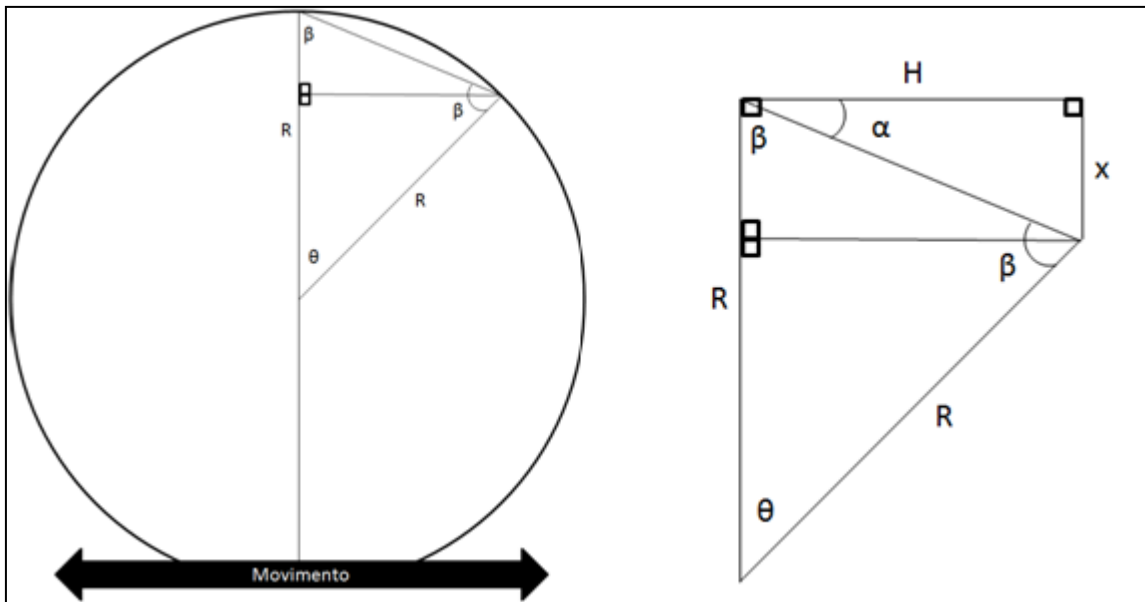


Figura 7: Relação entre o movimento horizontal (H) e vertical (x).

Como o ângulo  $\theta$  será sempre pequeno, pode-se aproximar a curvatura do eixo por uma reta, como mostrado na Figura 7. A partir destas considerações, as seguintes relações podem ser estabelecidas:

$$\sin(\theta) = \frac{H}{R} \rightarrow \theta = \sin^{-1} \frac{H}{R} \quad (5.1)$$

$$\beta = \frac{(180 - \theta)}{2} \rightarrow \beta = 90 - \left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (5.2)$$

$$\alpha = 90 - \beta = 90 - \left(90 - \left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \rightarrow \alpha = \left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (5.3)$$

$$\tan(\alpha) = \left(\frac{x}{H}\right) \rightarrow x = \tan(\alpha) * H \quad (5.4)$$

Sendo que H é o deslocamento na horizontal, que pode ser obtido utilizando os dados adquiridos através do acelerômetro (d) e da velocidade angular, em cada instante do tempo.

$$\omega = 2 * \pi * f \quad (5.5)$$

$$H = \left(\frac{d}{\omega^2}\right) \quad (5.6)$$

Todas as relações são dependentes de H e f, que são valores conhecidos. A primeira é variável com o tempo e a segunda é fixa. Vale ressaltar que d é constituído pelos dados obtidos pelo acelerômetro menos o valor de 0,701 discutido anteriormente (*offset*).

A frequência estabelecida para vibração do *shaker* é de 20 Hz, entretanto é possível verificar através da função *fft* do MatLAB que é um pouco diferente deste valor. Utilizando os dados obtidos através do acelerômetro, por exemplo, é possível traçar um gráfico com o seguinte comando no MatLAB:

$$\text{plot}([1/5:1/5:1000], \text{abs}(\text{fft}(b(:,3))))$$

Sendo *b(:,3)* a terceira coluna do conjunto de dados obtidos, ou seja, as medidas do acelerômetro. Os dois pontos (:) indicam que todas as linhas daquela coluna serão utilizadas. O resultado deste comando encontra-se no Gráfico 3.

Analisando seção do eixo representado na Figura 7, é possível notar que em um movimento completo do eixo atinge seu valor máximo e mínimo apenas uma vez, ou seja, no extremo direito tem seu valor máximo e no extremo esquerdo seu valor mínimo, e a frequência deste movimento são os 20,2Hz apresentados.

Para este mesmo movimento a frequência do movimento vertical é duas vezes esta frequência. Basta observar que neste movimento do eixo até o extremo direito, depois até o extremo esquerdo e retornando para o centro, o valor de  $x$  atinge seu máximo e mínimo duas vezes. Utilizando novamente o comando `fft` é possível observar a frequência deste movimento, mostrado no Gráfico 4.

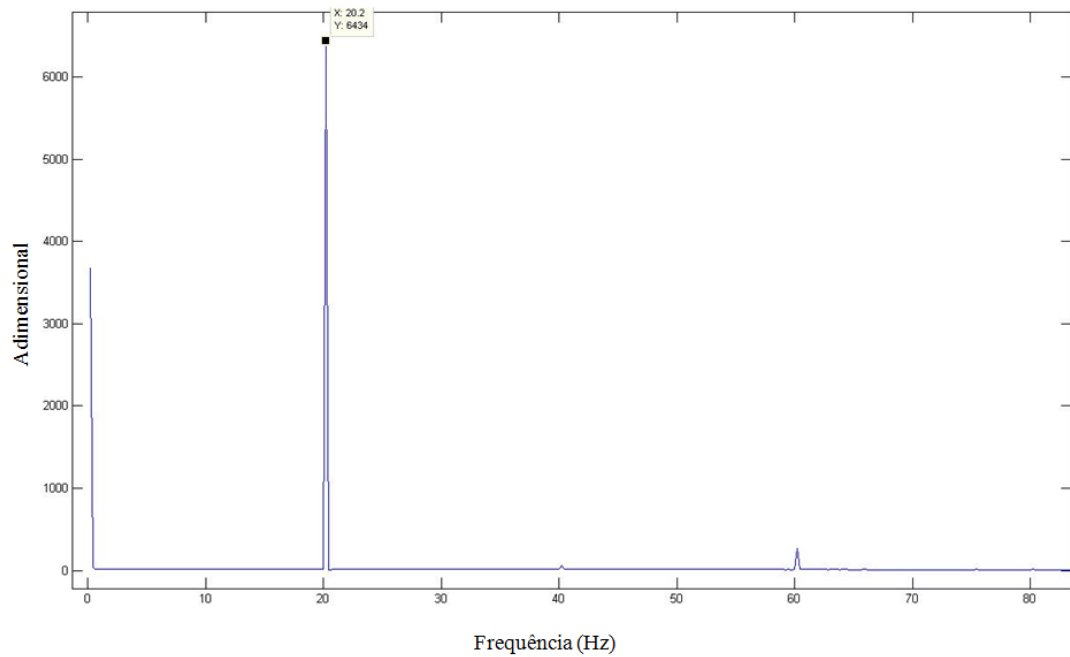


Gráfico 3: Frequência de vibração do *shaker*-eixo – 20,2Hz.

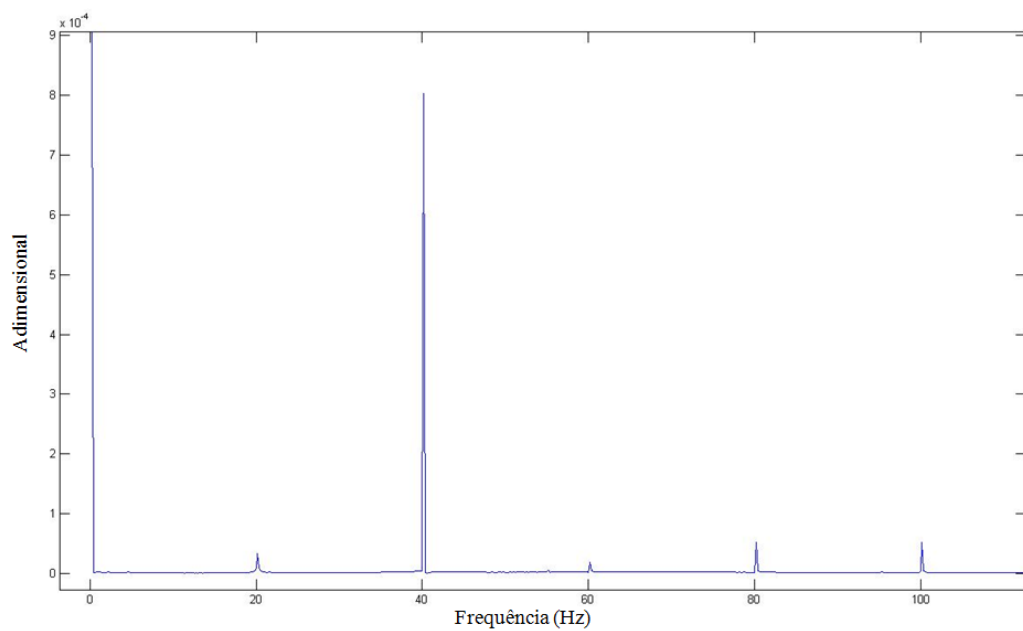


Gráfico 4: Frequência do movimento na direção vertical ( $x$ ).

Com o valor do deslocamento na direção vertical ( $x$ ), é possível determinar a velocidade nesta direção, com a finalidade de comparar com o sinal obtido pelo LASER.

Calculando numericamente, com o método mostrado na seção 3.4, o resultado obtido foi mostrado em um gráfico juntamente com os dados obtidos pelo LASER e pode ser observado a seguir.

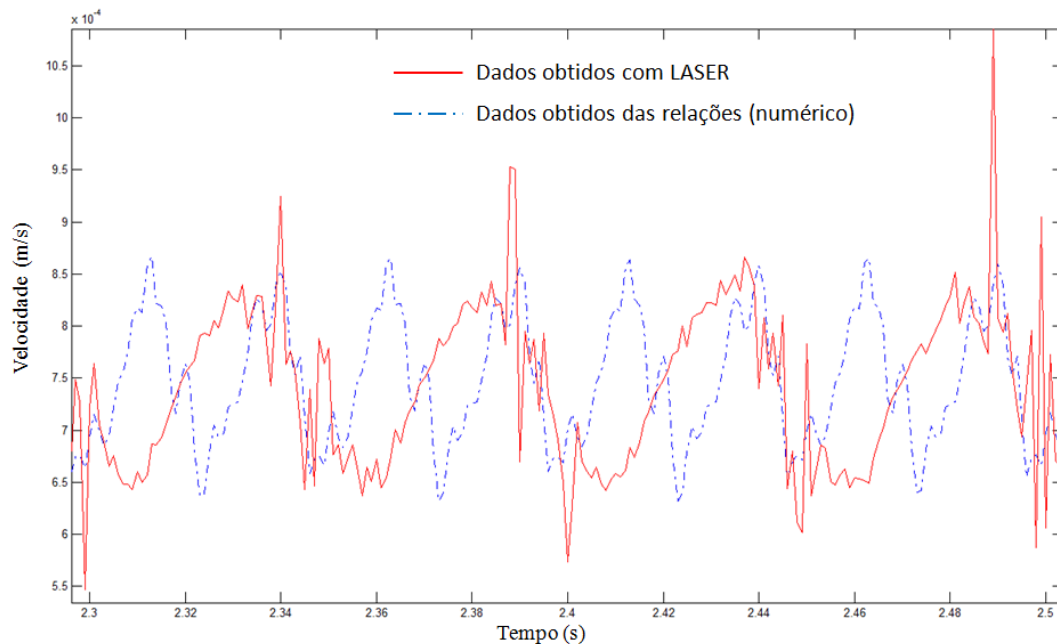


Gráfico 5: Velocidade obtida com laser e velocidade teórica (obtida numericamente).

Além disso, é interessante verificar a relação entre o movimento vertical e horizontal, graficamente. O Gráfico 6 mostra a relação entre o movimento nas duas direções, a contribuição na vertical ( $x$ ) é dada apenas pela curvatura do eixo, uma vez que não existe outra movimentação nesta direção.

É possível notar que a frequência da onda azul é duas vezes a da onda vermelha, ou seja, a frequência obtida das relações é o dobro do que foi medido pelo LASER. Este fato é consequência do alinhamento do feixe de LASER com o centro do eixo. Toda a teoria para encontrar a relação foi baseada na premissa de que o feixe estivesse atingindo o centro, ou

mais próximo disso possível. O Gráfico 5 permite dizer que o feixe de LASER está percorrendo apenas um lado do eixo, e não passando do centro para o outro lado, o que resulta na frequência dos dados obtidos pelo LASER ser a mesma de movimentação do eixo, e não o dobro, como foi observado no resultado obtido das relações numéricas.

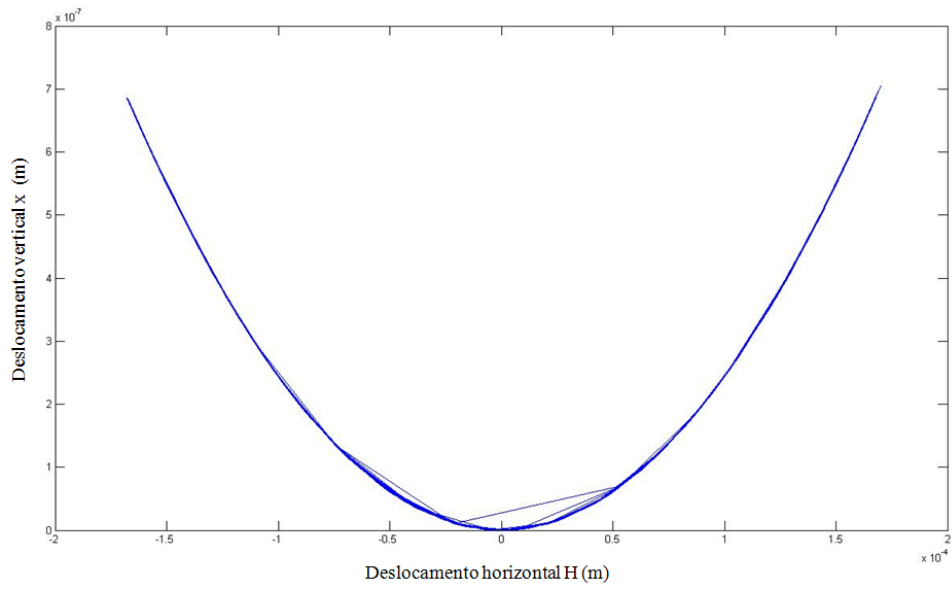


Gráfico 6: Relação entre deslocamento vertical e horizontal. Ordem de grandeza na horizontal é 1000 vezes maior que vertical.

Para adequar o cálculo, existem duas possibilidades: alinhar o feixe de LASER o mais próximo possível do centro do eixo, de modo que o mesmo percorra os dois lados do eixo ou encontrar o ângulo referente à distância mínima do feixe até o centro do eixo ( $\delta$ ). A Figura 8 apresenta o caminho percorrido pelo feixe de LASER (em vermelho), que não atinge os dois lados do eixo.

Esta é a razão pelo qual o Gráfico 5 não apresenta o resultado como esperado, ou seja, a frequência da leitura do LASER não é o dobro da frequência do movimento, como obtido através dos cálculos teóricos.

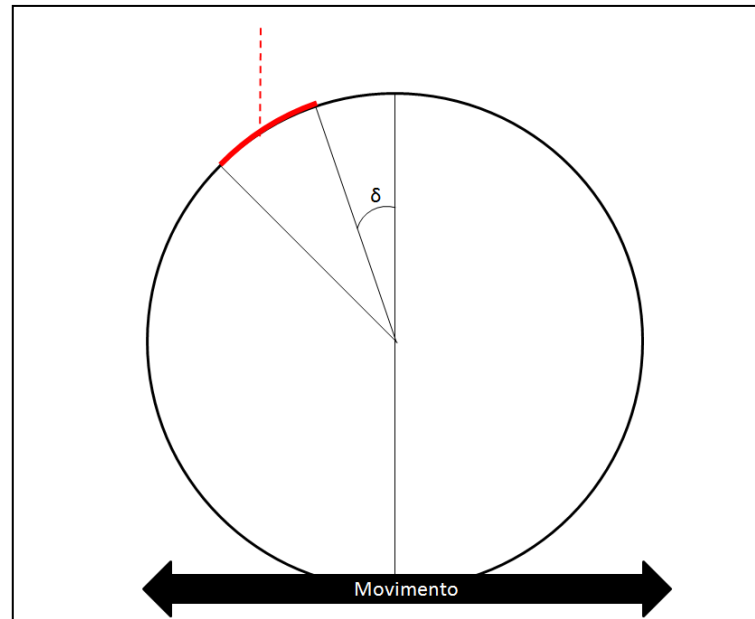


Figura 8: Alinhamento do feixe de LASER com o eixo.

### 5.1.2. Paralelo

Nesta nova configuração do conjunto, o movimento do eixo ocorre na direção paralela ao caminho percorrido pelo feixe de LASER. O conjunto *shaker*-eixo permanece fixado da mesma maneira, mas rotacionado de  $90^\circ$  no sentido horário, em relação à configuração anterior.

Todos os parâmetros permanecem inalterados: a frequência teórica de vibração permanece 20 Hz, taxa de aquisição de 1000Hz e período de 5 segundos. A Figura 9 mostra o esquemático desta segunda montagem.

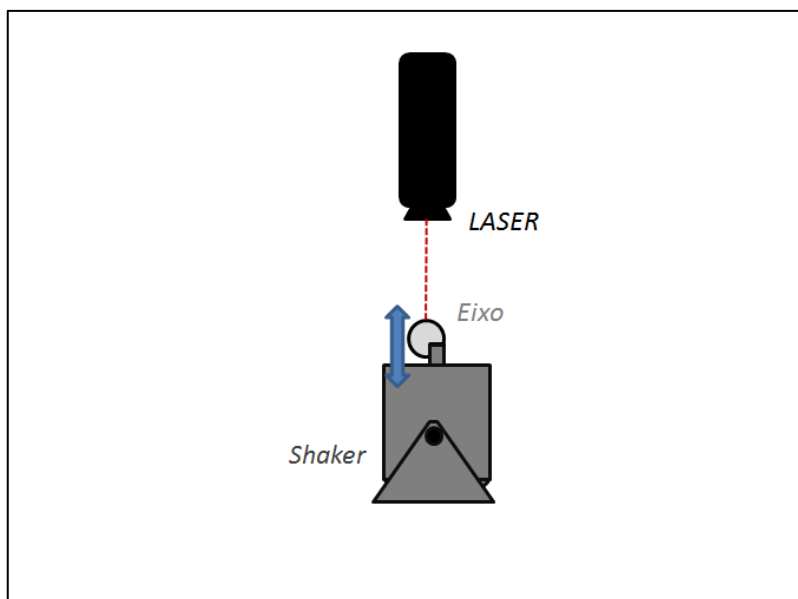


Figura 9: Esquemático de montagem para aquisição de dados do eixo se movendo na direção paralela ao feixe de laser. O movimento ocorre na direção indicada pela seta ao lado do eixo.

Com o eixo se movendo na direção paralela ao feixe de LASER, sua curvatura não tem influência alguma nos dados obtidos. O eixo está se aproximando e se afastando do LASER, como se pode observar no sentido indicado na figura esquemática.

Um novo gráfico da velocidade de deslocamento em função do tempo pode ser traçado utilizando o MATLAB. Para melhor visualização, foi considerado apenas o trecho de 2.2 a 2.7 segundos.

Com esta configuração, tanto o LASER quanto ao acelerômetro estão medindo grandezas em uma mesma direção, diferentemente do caso anterior, em que o LASER media a velocidade na direção vertical e o acelerômetro a aceleração na direção horizontal.

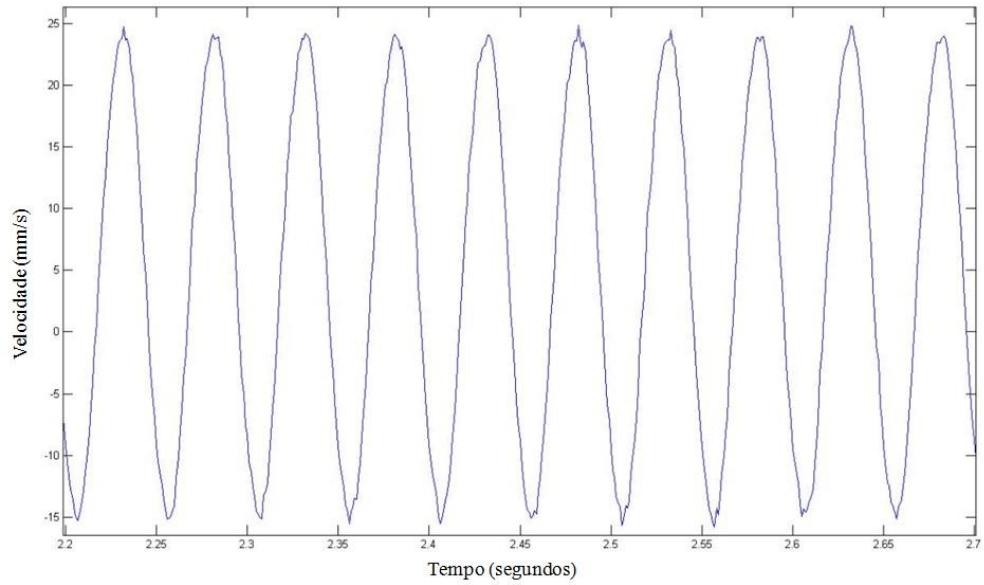


Gráfico 7: Resultado do eixo se movendo na direção transversal ao feixe de LASER.

Observe que neste caso a curva está mais suave em relação ao anterior, sem grandes oscilações (ruído).

O Gráfico 8, da mesma maneira que o experimento anterior, mostra o resultado dos dados de aceleração obtidos através do acelerômetro.

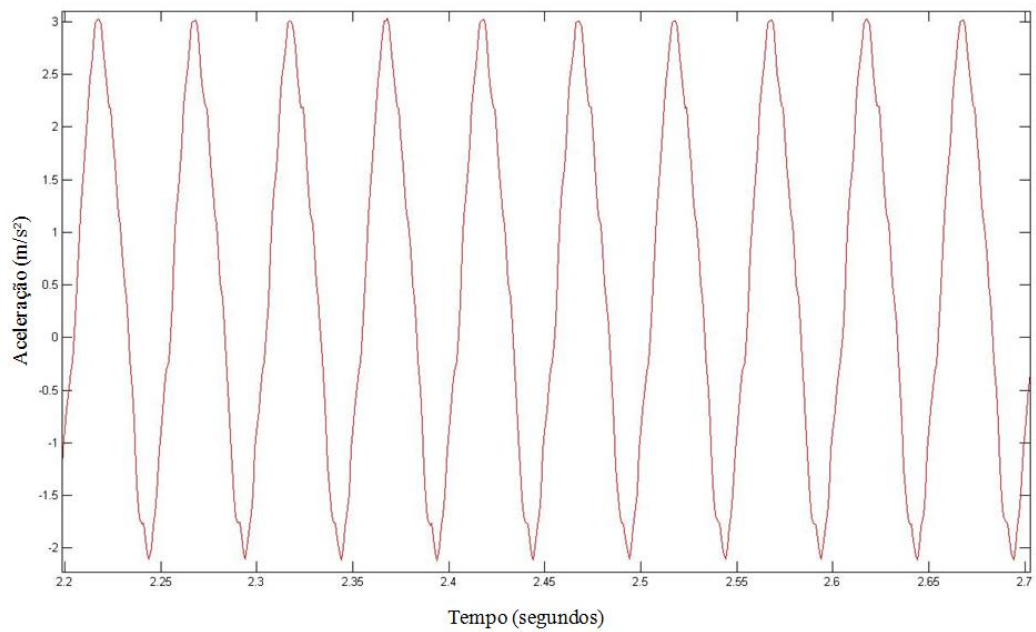


Gráfico 8: Dados obtidos do acelerômetro fixado ao eixo se movendo na vertical.

Neste experimento é possível comparar a velocidade medida com o LASER com a velocidade encontrada a partir dos dados do acelerômetro. Para obter a velocidade a partir dos dados do acelerômetro basta dividir o resultado em um determinado instante pela velocidade angular ( $\omega$ ). O Gráfico 9 apresenta esta comparação.

Note que as ondas não estão em fase, isto porque a aceleração e velocidade são defasadas de  $90^\circ$  e este valor não foi adicionado ao resultado de velocidade obtida a partir dos dados do acelerômetro. O importante neste ponto é verificar que a velocidade é a mesma, ou seja, as amplitudes e frequências são iguais.

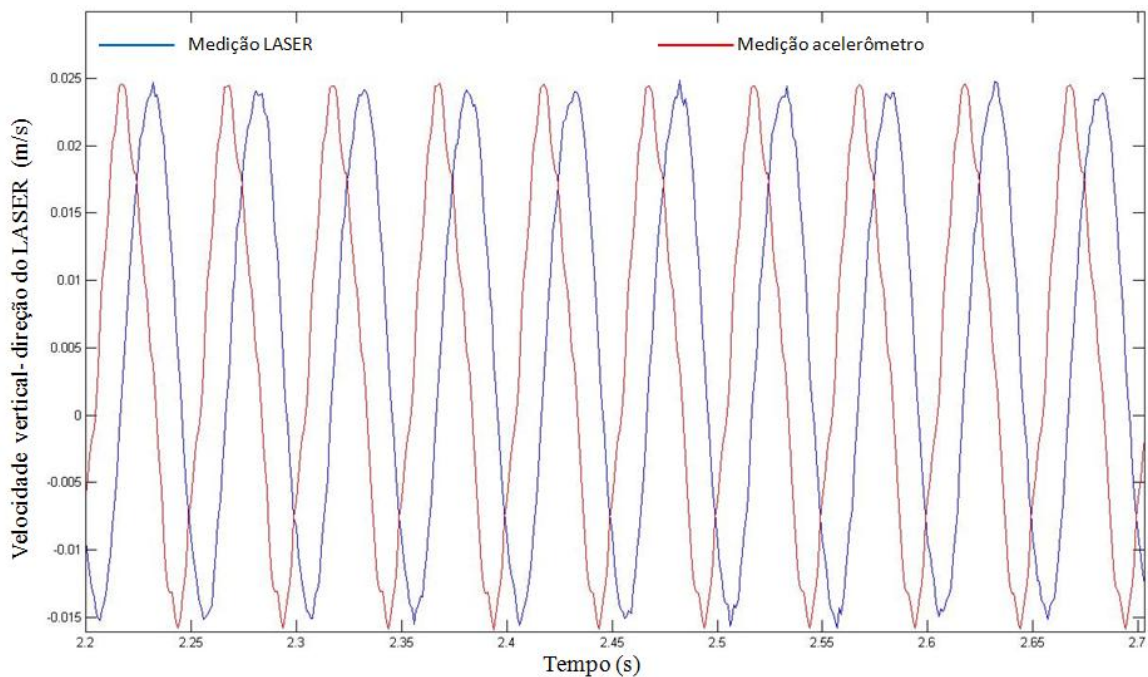


Gráfico 9: Comparação entre a velocidade adquirida através do LASER (azul) e da velocidade obtida a partir dos dados do acelerômetro (vermelho).

Este gráfico mostra que os dados obtidos tanto com o LASER quanto com o acelerômetro são coerentes com o esperado do movimento nesta direção, ou seja, existe apenas componente vertical neste movimento.

### 5.1.3. Composição de movimentos

Nas seções anteriores o eixo do experimento foi submetido a duas situações diferentes, uma na qual se deslocava apenas na direção horizontal e outra apenas na direção vertical. Em circunstâncias reais, um eixo em seu movimento de rotação terá movimentos nestas duas direções ocorrendo simultaneamente, devido a desvio na centralização do mesmo, que pode ocorrer como consequência do processo de fabricação.

Desta maneira, uma composição dos dois movimentos anteriores foi feita de modo a simular o deslocamento do eixo nas duas direções. Os dados de velocidade obtidos nas seções 5.1.1 e 5.1.2 foram somados, como se o eixo agora se movimentasse nas duas direções e não em uma única. O resultado pode ser observado no Gráfico 10.

Repare que o ruído que antes era bem visível para o movimento horizontal agora mal se pode ver. Isto porque a amplitude do ruído era pouco considerável em relação ao movimento como um todo, sua ordem de grandeza era muito menor em comparação com o movimento vertical.

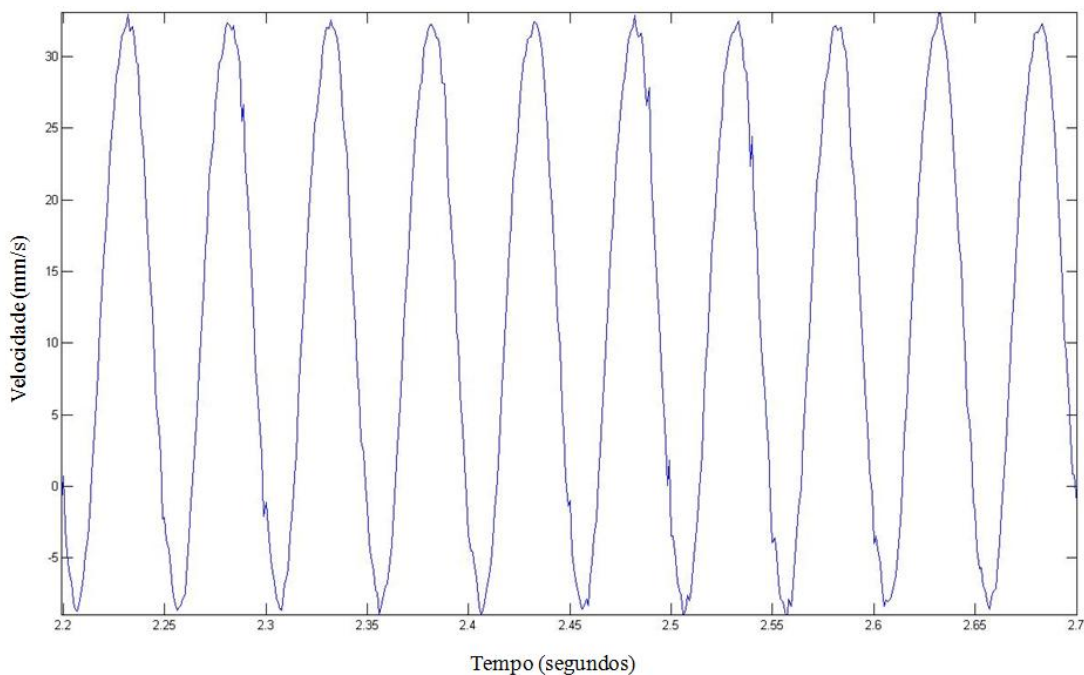


Gráfico 10: Composição dos movimentos horizontais e verticais.

#### 5.1.4. Movimento com ângulo de $60^\circ$

Na seção anterior foi mostrada a composição de movimentos na horizontal e vertical, utilizando os dados dos movimentos separados. Nesta seção será apresentado um movimento no qual o eixo se desloca com um ângulo de  $60^\circ$  em relação ao feixe de LASER, representando um movimento com componentes na horizontal e vertical.

O ângulo de  $60^\circ$  foi escolhido para que a contribuição do movimento horizontal seja maior. A Figura 10 mostra um esquema de como foram feitas as medidas.

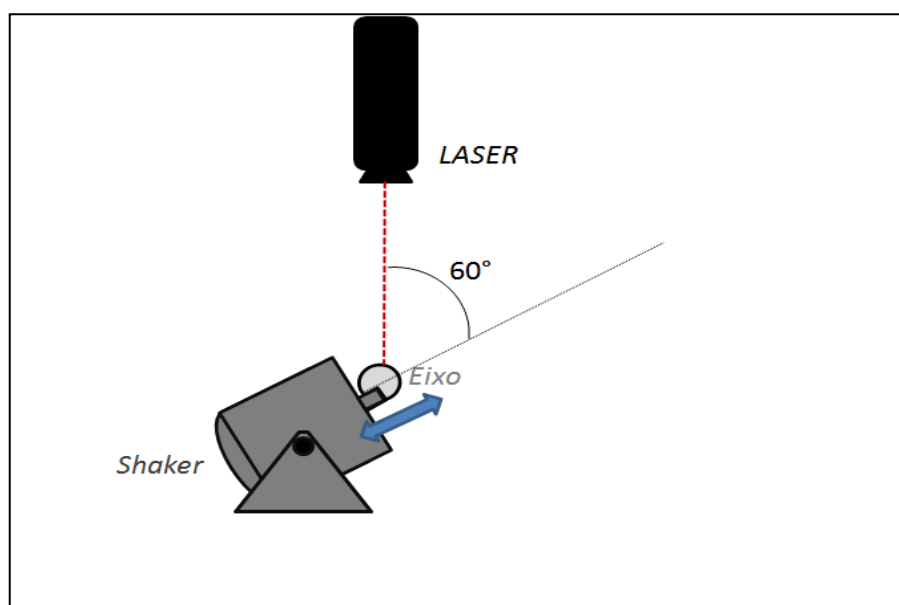


Figura 10: Esquemático de montagem para aquisição dos dados do eixo se movendo com um ângulo de  $60^\circ$  em relação ao feixe do LASER. O movimento ocorre na direção indicada pela seta abaixo do eixo.

O movimento nesta direção pode ser entendido como a combinação de dois movimentos separados, um na horizontal e outro na vertical. No caso do movimento horizontal, as relações encontradas na seção 5.1.1 serão utilizadas também para este experimento.

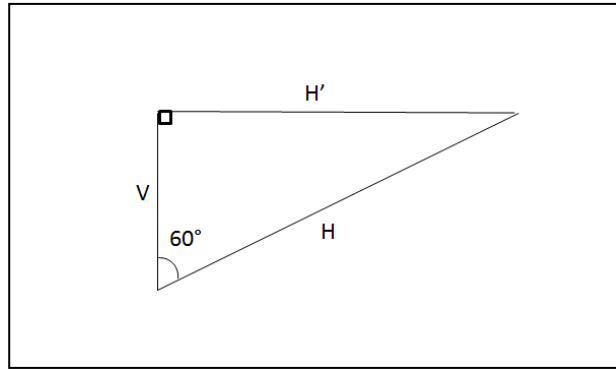


Figura 11: Decomposição do movimento na direção horizontal e vertical.

A Figura 11 mostra o movimento H decomposto na direção horizontal ( $H'$ ) e vertical ( $V$ ). Além deste termo  $V$ , o movimento vertical total também terá uma contribuição referente ao movimento horizontal, devido a curvatura do eixo. Este termo será encontrado do mesmo modo apresentado na seção 5.1.1. Deste modo, as componentes podem ser calculadas do seguinte modo:

$$H' = H * \sin(60^\circ) \quad (5.7)$$

$$V = H * \cos(60^\circ) \quad (5.8)$$

Sendo  $H$  definido da mesma maneira que em (5.6), resultado dos dados obtidos pelo acelerômetro divididos pela velocidade angular ao quadrado. O movimento total na vertical é dado por:

$$V_{total} = V + x \quad (5.8)$$

Onde  $x$  o deslocamento vertical proveniente do movimento horizontal (devido à curvatura do eixo). Este será encontrado da mesma maneira que no experimento com o movimento único e exclusivo na horizontal, transversal ao feixe de LASER.

O Gráfico 11 mostra o deslocamento vertical resultante da movimentação horizontal. Já o Gráfico 12 é referente à componente vertical do movimento, sem considerar a contribuição referente à curvatura do eixo.

A partir destes dois gráficos é possível afirmar que a contribuição do movimento horizontal com o deslocamento na direção vertical é irrelevante para a medição, dado a diferença na ordem de grandeza em cada uma das direções: deslocamento na vertical provocado pelo movimento horizontal é mil vezes menor que a componente vertical do movimento. Além disso, em casos no qual o ângulo é menor que  $60^\circ$  esta contribuição seria ainda menor.

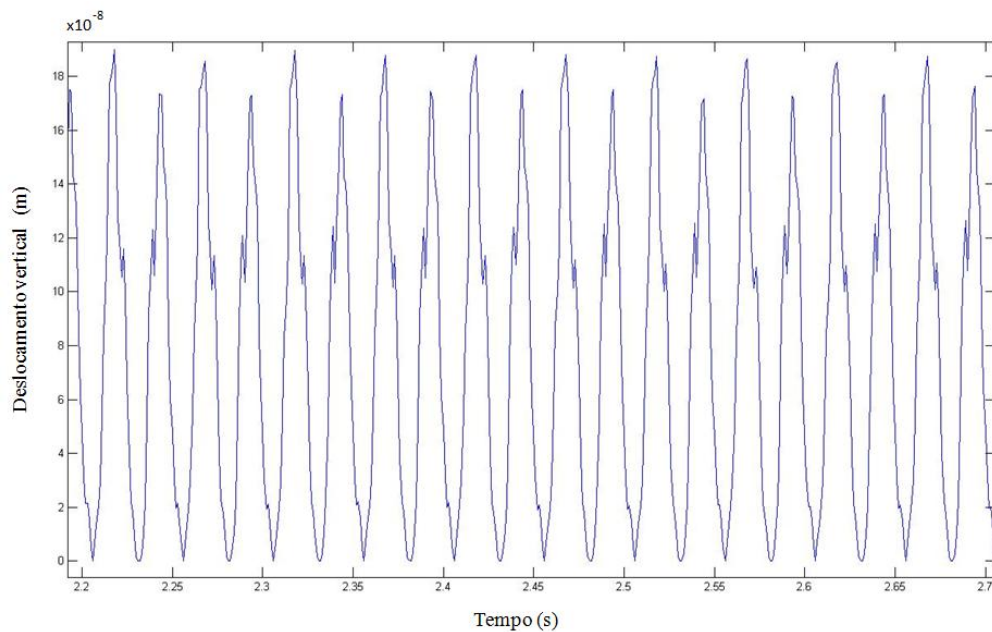


Gráfico 11: Deslocamento vertical resultante do movimento horizontal.

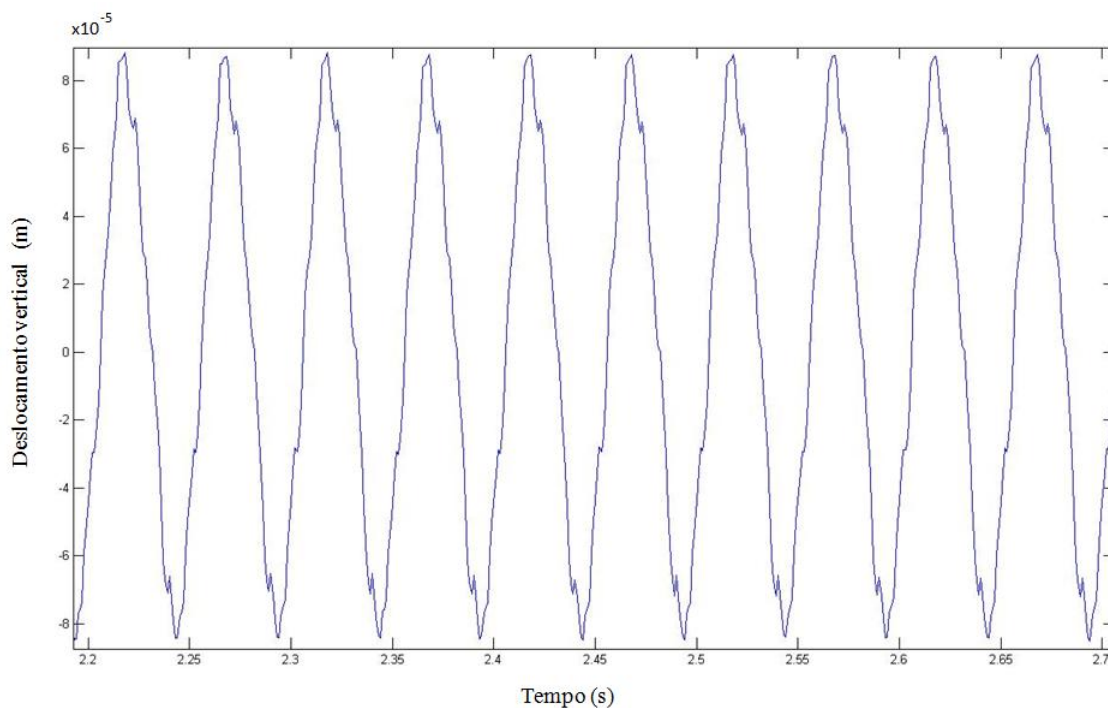


Gráfico 12: Componente vertical do movimento a 60°.

## 5.2. Eixo em rotação

Após as simulações de movimento do eixo, foi realizado outro experimento com um eixo girando realmente. O laser foi montado da mesma maneira que nos experimentos anteriores e além dele, dois sensores de posição. Estes sensores estavam posicionados de modo que um deles captava deslocamentos na direção horizontal e outro na vertical.

Com esta configuração, pode-se observar o que ocorre na realidade: um eixo conectado ao motor, girando a certa frequência, aparentemente em torno do centro do eixo. Para muitas aplicações esta precisão é suficiente. Os resultados obtidos através dos sensores de posição mostram que a órbita descrita pelo eixo não é exatamente circular, para outras aplicações que exigem maior precisão, este erro poderia não ser aceito.

A Figura 12 representa como foi montado o experimento.

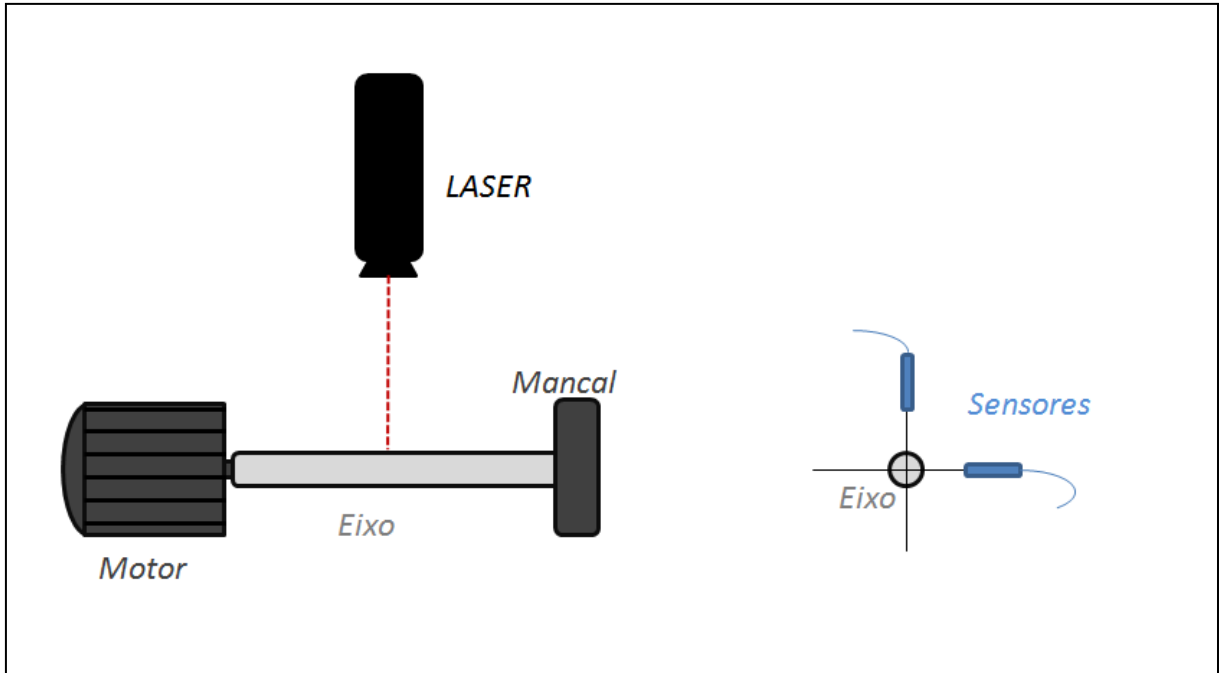


Figura 12: Esquemático do experimento. Foram mostrados separados o LASER e sensores para facilitar compreensão, mas no experimento foram utilizados simultaneamente.

A taxa de aquisição utilizada bem como o período de aquisição dos dados são os mesmos do experimento anterior, 1000 Hz e 5 segundos, respectivamente.

A frequência do campo girante é de 20Hz, mas devido ao escorregamento a frequência com que o motor (rotor) gira, e consequentemente o eixo, será um pouco menor. Para mais informações sobre máquinas elétricas, consultar Fitzgerald et al. (1975).

Desta maneira, ao tentar aproximar a onda resultante dos dados obtidos pelo LASER com uma série de senos e co-senos e com a frequência de 20 Hz, será observado que a curva real irá atrasar com o tempo, pois sua frequência é um pouco menor que estes 20 Hz.

Para encontrar a frequência real, podem-se utilizar os dados obtidos e a função numérica *Fast Fourier Transform*, ou FFT, para encontrar esta frequência. Com a ajuda do MATLAB, o gráfico pode ser traçado e visualmente verificar qual é a frequência.

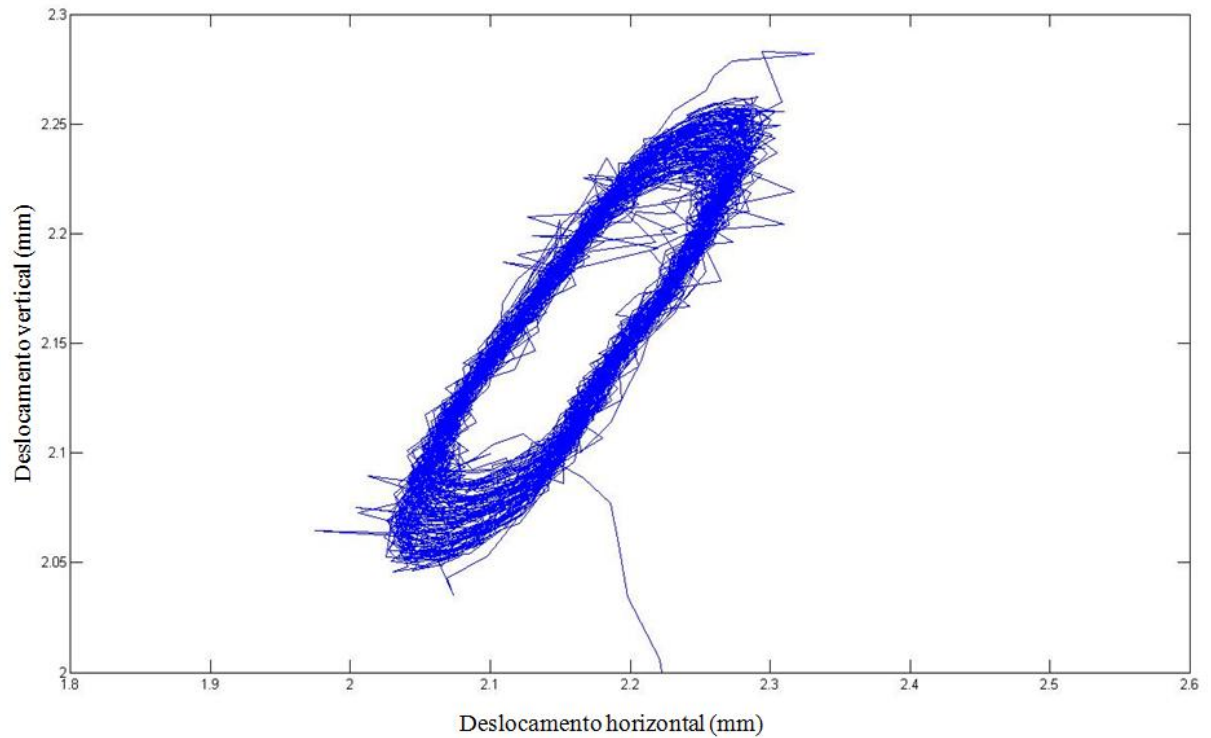


Gráfico 13: Órbita descrita pelo eixo. Dados obtidos com os dois sensores de posição, um posicionado na horizontal e outro na vertical.

Para encontrar a frequência, utilizando os dados obtidos pelo LASER, a função FFT do MATLAB foi utilizada. O resultado é o Gráfico 14, que mostra um foco no pico em que se encontra a frequência procurada. O valor encontrado é de 19,653 Hz.

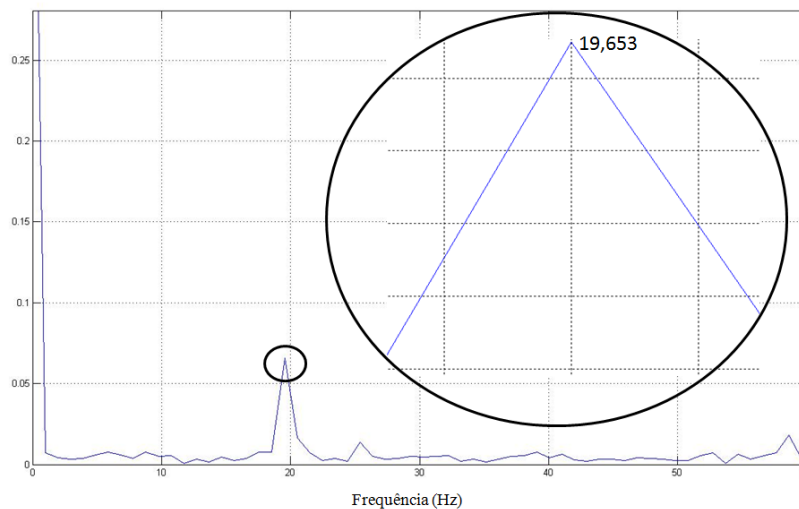


Gráfico 14: Frequência encontrada utilizando a função FFT do MATLAB.

A velocidade, medida pelo laser, pode ser vista no Gráfico 15 bem como a curva obtida pela série de Fourier. O método para obter esta aproximação foi descrito na seção 3.3 (Método numérico: caso discreto), utilizando como ferramenta para o cálculo o MatLAB.

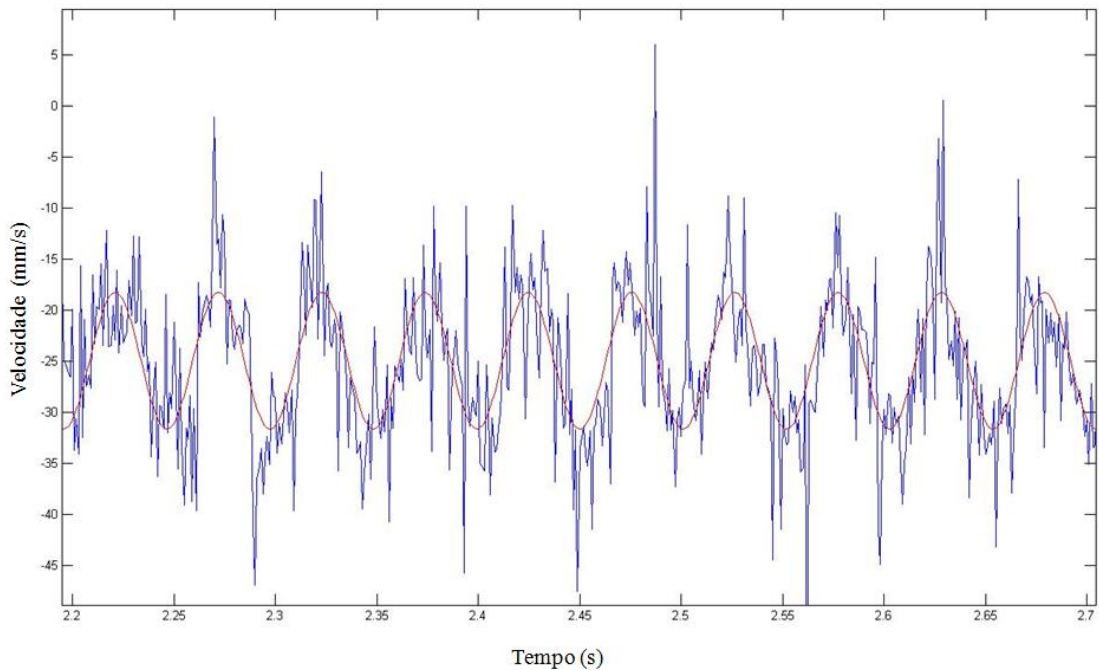


Gráfico 15: Velocidade. Azul: medição do LASER. Vermelho: Aproximação por Fourier.

O objetivo principal deste trabalho é verificar a possibilidade de encontrar a órbita descrita por um eixo, utilizando apenas o sinal obtido através de um LASER comercial. A aproximação dos dados obtidos é adequada, como pode ser visto no Gráfico 15. A meta é encontrar um gráfico semelhante ao Gráfico 13 utilizando apenas o LASER.

## 6. Resultados e discussões

Para verificar a possibilidade de utilizar o LASER para identificar a órbita descrita por um eixo, primeiramente foram analisados os movimentos em direções separadas e previamente conhecidas, descritos nas seções 5.1.1, 5.1.2 e 5.1.4.

Seja no movimento do eixo acoplado ao *shaker*, seja na rotação de um eixo, as vibrações que ocorrem nas direções horizontais e verticais possuem a mesma frequência. O que difere o movimento em uma direção da outra é a amplitude.

No caso do eixo se movimentando com um ângulo de  $60^\circ$  em relação à linha do feixe de LASER, é possível observar que a contribuição do movimento horizontal no deslocamento vertical é desprezível, pois a ordem de grandeza dos movimentos é muito diferente, como apresentado no Gráfico 16.

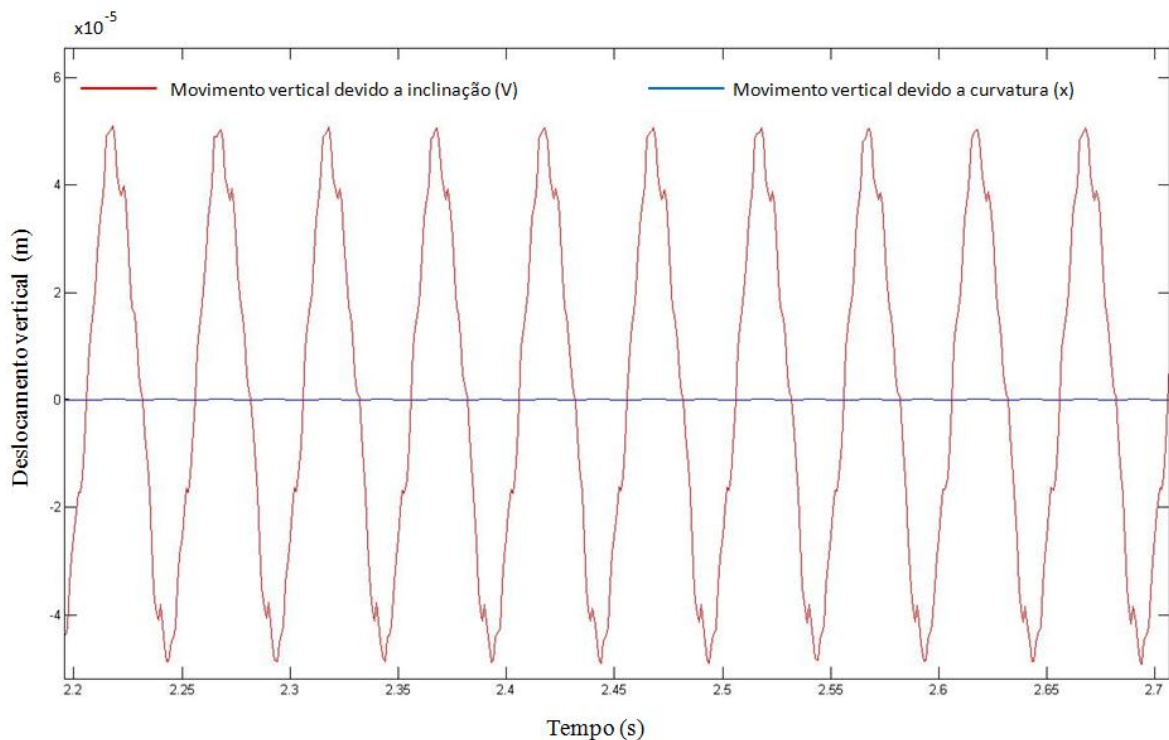


Gráfico 16: Comparação entre a contribuição do movimento vertical e horizontal para o total de deslocamento na direção vertical.

Neste caso, o movimento realizado pelo eixo é conhecido, e com os dados obtidos através de um acelerômetro é possível determinar o movimento em cada uma das direções. Mas apenas com os dados de velocidade, obtidos através do LASER comercial, não é possível determinar a posição nas duas diferentes direções, horizontal e vertical.

Outro resultado relevante é o alinhamento do LASER em relação ao eixo. Como observado no Gráfico 5, a velocidade obtida através do LASER e a velocidade obtida numericamente com os dados do acelerômetro possuem frequências diferentes. Este fato ocorre no caso em que o feixe de LASER percorre o eixo sem passar de um lado para o outro em relação ao seu centro, ou seja, a medida é feita apenas em um lado do eixo e dessa forma os dados do LASER não tem o dobro da frequência em relação ao movimento do eixo.

Existe um ângulo inicial caso o LASER não esteja alinhado com o centro do eixo. Determinar este ângulo, bem como alinhar o centro do eixo com o feixe de LASER acaba sendo uma tarefa que também requer certa precisão. Todo o cálculo estabelecido na seção 5.1.1 deveria considerar este ângulo inicial, caso o alinhamento não fosse próximo ao centro, de modo que o LASER percorra os dois lados do eixo (não necessariamente de maneira simétrica).

Por fim, o Gráfico 17 mostra a comparação entre a velocidade na direção do feixe de LASER (vertical) resultante do movimento na vertical e a contribuição, nesta mesma direção, do movimento na horizontal, para o movimento com ângulo de  $60^\circ$  em relação ao feixe de LASER.

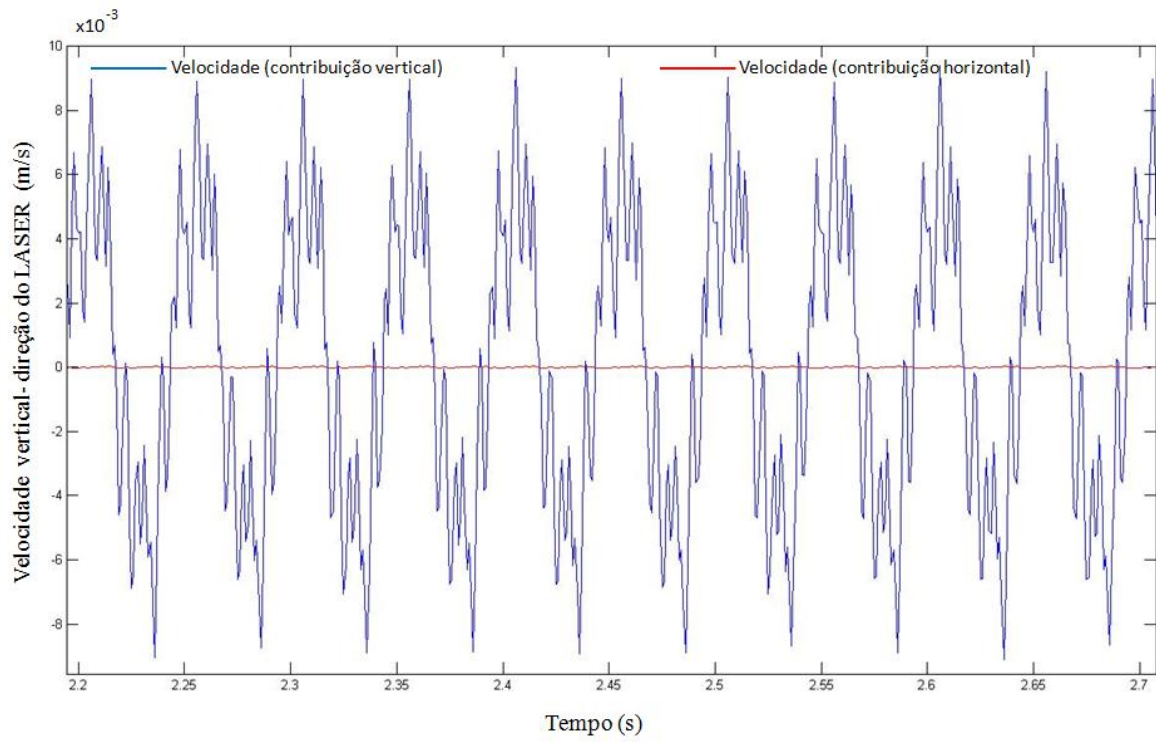


Gráfico 17: Comparação entre as velocidades na direção vertical.

## **7. Conclusão**

Com os resultados obtidos dos experimentos e analisados na seção anterior, ficou demonstrado que apenas com um LASER comercial não é possível determinar a órbita de um eixo em movimento, utilizando os dados de velocidade captados com este dispositivo.

Não é possível, portanto, obter um gráfico semelhante ao Gráfico 13 utilizando apenas o LASER comercial, uma vez que a separação das amplitudes dos movimentos de mesma frequência não é possível.

## Referências bibliográficas

DIPRIMA, R. C.; BOYCE, W. E. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Editora LTC, 2010. 624 p.

FITZGERALD, A.E.; KINGSLEY JR, C.; KUSKO, A. **Máquinas elétricas**. São Paulo: Ed. McGraw Hill, 1975. 321 p.

FRANCO, N. M. B. **Cálculo Numérico**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006. 520 p.

GUIDI, L. F. **Cálculo Numérico A: Notas de aula - Capítulo 06**, 2007. Disponível em: <<http://www.mat.ufrgs.br/~guidi/grad/MAT01032/MAT01032.html>>. Acesso em: 19 nov. 2011.

LEACH, R. K. **Fundamental Principles of Engineering Nanometrology**. Estados Unidos da América: Elsevier, 2009. 352 p.

LIRANI, J. et al. **Tolerâncias, ajustes, desvios e análise de dimensões**. Edgard Blücher, 1977. 295 p.

PALMA, E. S. **Metrologia**. Belo Horizonte, 2006. Disponível em: <<http://mea.pucminas.br/palma/metrolapostila.html>>. Acesso em: 24 out. 2011.

PICCOLI, H. C. **Mecânica das Vibrações: Unidade 6 – Medição das Vibrações**. Disponível em: <<http://www2.ee.furg.br/piccoli/mecvib.html>>. Acesso em: 17 out. 2011.

RABINOVICH, S. G. **Evaluating Measurement Accuracy: A Practical Approach**. Nova York: Springer, 2009. 271 p.

SANTOS, F. J. **Introdução às Séries de Fourier**, 2004. Disponível em:

<[http://www.matematica.pucminas.br/profs/web\\_fabiano/calculo4/sf.pdf](http://www.matematica.pucminas.br/profs/web_fabiano/calculo4/sf.pdf)>. Acesso em: 25 out. 2011.

SILVA, G. M. S. **Basic Metrology for ISO 9000 Certification**. Inglaterra: Butterworth-Heinemann, 2002. 214 p.

## APÊNDICE A

Nesta seção estão apresentados os programas em MATLAB escritos para determinar as relações trigonométricas estabelecidas na seção 5.1.1 e 5.1.4.

Código referente ao eixo se movimentando na direção horizontal:

```

b = transv_20hz;           % Arquivo de dados obtido da medição

%offset aceleração: 0.701 / frequencia: 20.2

%Deslocamento medido pelo acelerometro (perpendicular ao laser)
for i=1:5000;
H(i,1) = ((b(i,3)-0.701)/(2*pi*20.2)^2);
end;

%Angulo teta a partir do feixe de laser
for i=1:5000;
    teta(i,1) = asin(H(i,1)/0.0205);
end;

%Angulo alfa = teta/2 => teta(i,2)
for i=1:5000;
    teta(i,2) = teta(i,1)/2;
end;

%Deslocamento na direção do laser: deltaX = H*tg(alfa) => H(i,2)
for i=1:5000;
    H(i,2) = H(i,1)*tan(teta(i,2));
end;

%Derivada numerica: velocidade na direção do laser
for i=2:4999;
    der(i,1)=(H(i+1,2)-H(i-1,2))/(2*0.001);
end;
    der(5000,1)=0;

```

Código referente ao eixo se movimentando com ângulo de  $60^\circ$  em relação à linha do feixe de LASER.

```

d = per60graus_20hz;          % Arquivo de dados obtido da medição

%Deslocamento medido pelo acelerometro (componente perpendicular ao laser)
for i=1:5000;
    H60(i,1) = (((d(i,3)-0.701)*sin(60*pi/180))/(2*pi*20.2)^2);
end;

%Angulo teta a partir do feixe de laser
for i=1:5000;
    teta60(i,1) = asin(H60(i,1)/0.0205);
end;

%Angulo alfa = teta/2 => teta(i,2)
for i=1:5000;
    teta60(i,2) = teta60(i,1)/2;
end;

%Deslocamento na direção do laser: deltaX = H*tg(alfa) => H(i,2)
for i=1:5000;
    H60(i,2) = H60(i,1)*tan(teta60(i,2));
end;

%Derivada numerica: velocidade na direção do laser
for i=2:4999;
    der60(i,1)=(H60(i+1,2)-H60(i-1,2))/(2*0.001);
end;
    der60(5000,1)=0;

%Movimento na direção do laser
%Deslocamento
for i=1:5000;
    X60(i,1) = (((d(i,3)-0.701)*cos(pi*60/180))/((2*pi*20.2)^2));
end;

% Velocidade
for i=2:4999
    X60(i,2) = (X60(i+1,1)-X60(i-1,1))/(2*0.001);
end;
    X60(5000,1)=0;

```

## ANEXO A

Nesta seção é apresentado o código em MATLAB desenvolvido pelo professor Doutor Rodrigo Nicoletti, em Dezembro de 2008, para a aquisição de dados.

```
%#####
%# Este programa executa a aquisição de dados nos canais          #
%# de entrada AI da placa NI PCI 6229, enviando um sinal         #
%# CHIRP no canal de saída AO.                                   #
%#                                                                #
%#          Rodrigo Nicoletti                                     #
%#          12/12/2008                                           #
%#####

clear all

ai = analoginput('nidaq','Dev1');
addchannel(ai,0:2);
ao = analogoutput('nidaq','Dev1');
addchannel(ao,0);

T = 5;                % Período de amostragem
ai.SampleRate = 1000; % Taxa de amostragem desejada
Fs = ai.SampleRate;  % Taxa de amostragem real
ao.SampleRate = Fs;
ai.SamplesPerTrigger = round(T*Fs); % Número de amostras da aquisição
ai.InputType = 'NonReferencedSingleEnded';
ao.RepeatOutput = 1; % Número de vezes que os dados de saída são enviados

set([ai ao],'TriggerType','Manual'); % Define trigger manual
set(ai,'ManualTriggerHwOn','Trigger'); % Sincroniza AI com AO

Tmax = 5;

tt = [0:1/Fs:Tmax];
x = 1*sin(20*2*pi*tt);
putdata(ao,x)

start([ai ao])
trigger([ai ao])

[data,t] = getdata(ai);

stop([ai ao])
delete([ai ao])
```